

**BACCALAURÉAT**  
**SESSION 2016**

**Coefficient : 4**  
**Durée : 4 h**

# MATHÉMATIQUES

## SÉRIE D

*Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.  
Chaque candidat recevra deux(2) feuilles de papier millimétré.  
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.*

*Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont autorisées.*

### EXERCICE 1

- 1- On considère la fonction  $h$  dérivable et définie sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  par :  $h(x) = 2x - x^2$ .
- Démontrer que  $h$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; 1]$ .
  - En déduire que l'image de l'intervalle  $[0 ; 1]$  par  $h$  est l'intervalle  $[0 ; 1]$ .
- 2- Soit  $u$  la suite définie par :
- $$u_0 = \frac{3}{7} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n).$$
- Démontrer par récurrence que :  
 $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$ .
  - Démontrer que la suite  $u$  est croissante.
  - Justifier que la suite  $u$  est convergente.
- 3- On considère la suite  $v$  définie par :
- $$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(1 - u_n).$$
- Démontrer que  $v$  est une suite géométrique de raison 2.
  - Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
  - Calculer la limite de la suite  $v$ .
  - En déduire la limite de la suite  $u$ .

## EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , (unité graphique : 2 cm).  
On considère la transformation  $\mathcal{S}$  du plan qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que :

$$z' = \left(1 - i \frac{\sqrt{3}}{3}\right)z + 2i \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- 1- a) Soit  $\Omega$  le point d'affixe 2.  
Vérifier que :  $\mathcal{S}(\Omega) = \Omega$   
b) Justifier que  $\mathcal{S}$  est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.
  
- 2- a) Démontrer que :  $\forall z \neq 2, \frac{z' - z}{2 - z} = i \frac{\sqrt{3}}{3}$ .  
b) En déduire que le triangle  $M\Omega M'$  est rectangle en  $M$ .  
c) Donner un programme de construction de l'image  $M'$  par  $\mathcal{S}$  d'un point  $M$  donné.
  
- 3- a) Placer les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $-1 + i$  et  $5 - i$   
dans le plan muni du repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .  
Construire les images respectives  $A'$  et  $B'$  de  $A$  et  $B$  par  $\mathcal{S}$ .  
b) On note  $z_A, z_B, z_{A'}, z_{B'}$  les affixes respectives des points  $A, B, A'$  et  $B'$ .  
Démontrer que :  $z_{A'} - z_A = z_B - z_{B'}$ .  
c) En déduire la nature du quadrilatère  $AA'BB'$ .

## PROBLÈME

### Partie A

Soit  $g$  la fonction dérivable et définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = -1 + (2 - 2x)e^{-2x+3}$ .

- 1- Calculer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
  
- 2- a) Soit  $g'$  la fonction dérivée de  $g$ .  
Justifier que :  $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (4x - 6)e^{-2x+3}$ .  
b) Étudier le signe de  $g'(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .  
c) Justifier que  $g\left(\frac{3}{2}\right) = -2$ .  
d) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
  
- 3- a) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une solution unique notée  $\alpha$ .  
b) Vérifier que :  $0,86 < \alpha < 0,87$ .  
c) Justifier que :  $\forall x \in ]-\infty; \alpha[, g(x) > 0$  et  $\forall x \in ]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$ .

## Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ , (unité graphique : 2cm).

On considère la fonction  $f$  dérivable et définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = -x + (x - \frac{1}{2}) e^{-2x+3}$ .

On note  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$ .

- 1-
  - a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ .
  - b) En déduire que  $(\mathcal{C})$  admet une branche parabolique de direction  $(OJ)$  en  $-\infty$ .
- 2-
  - a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
  - b) Démontrer que la droite  $(\mathcal{D})$  d'équation  $y = -x$  est asymptote à  $(\mathcal{C})$  en  $+\infty$ .
  - c) Étudier la position de  $(\mathcal{C})$  par rapport à  $(\mathcal{D})$ .
- 3-
  - a) Soit  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .  
Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$ .
  - b) En déduire les variations de  $f$ .
  - c) Dresser le tableau de variation de  $f$ . *On ne calculera pas  $f(\alpha)$ .*
- 4- Construire  $(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{C})$  sur le même graphique.  
On précisera les points de  $(\mathcal{C})$  d'abscisses  $0 ; \frac{1}{2} ; \frac{3}{2} ; 4$ .  
*On prendra :  $\alpha = 0,865$  et  $f(\alpha) = 0,4$ .*
- 5- Soit  $t$  un nombre réel strictement supérieur à  $\frac{3}{2}$ . On désigne par  $\mathcal{A}(t)$  l'aire en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan limitée par la courbe  $(\mathcal{C})$ , la droite  $(\mathcal{D})$  et les droites d'équations  $x = \frac{3}{2}$  et  $x = t$ .

$$\text{On pose : } I_t = \int_{\frac{3}{2}}^t (x - \frac{1}{2}) e^{-2x+3} dx.$$

- a) À l'aide d'une intégration par parties, justifier que :

$$I_t = \frac{3}{4} - \frac{t}{2} e^{-2t+3}.$$

- b) En déduire  $\mathcal{A}(t)$ .

- c) Calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(t)$ .