

BACCALAURÉAT
SESSION 2016

Coefficient : 4
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

*Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux(2) feuilles de papier millimétré.*

Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.

Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont autorisées.

EXERCICE 1

- 1- On considère la fonction h dérivable et définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $h(x) = 2x - x^2$.
- a) Démontrer que h est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.
 - b) En déduire que l'image de l'intervalle $[0 ; 1]$ par h est l'intervalle $[0 ; 1]$.
- 2- Soit u la suite définie par :
- $$u_0 = \frac{3}{7} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n).$$
- a) Démontrer par récurrence que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$.
 - b) Démontrer que la suite u est croissante.
 - c) Justifier que la suite u est convergente.
- 3- On considère la suite v définie par :
- $$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(1 - u_n).$$
- a) Démontrer que v est une suite géométrique de raison 2.
 - b) Exprimer v_n en fonction de n .
 - c) Calculer la limite de la suite v .
 - d) En déduire la limite de la suite u .

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , (unité graphique : 2 cm).
On considère la transformation \mathcal{S} du plan qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \left(1 - i \frac{\sqrt{3}}{3}\right)z + 2i \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- 1- a) Soit Ω le point d'affixe 2.
Vérifier que : $\mathcal{S}(\Omega) = \Omega$
b) Justifier que \mathcal{S} est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.
- 2- a) Démontrer que : $\forall z \neq 2, \frac{z' - z}{2 - z} = i \frac{\sqrt{3}}{3}$.
b) En déduire que le triangle $M\Omega M'$ est rectangle en M .
c) Donner un programme de construction de l'image M' par \mathcal{S} d'un point M donné.
- 3- a) Placer les points A et B d'affixes respectives $-1 + i$ et $5 - i$
dans le plan muni du repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .
Construire les images respectives A' et B' de A et B par \mathcal{S} .
b) On note $z_A, z_B, z_{A'}, z_{B'}$ les affixes respectives des points A, B, A' et B' .
Démontrer que : $z_{A'} - z_A = z_{B'} - z_B$.
c) En déduire la nature du quadrilatère $AA'B'B'$.

PROBLÈME

Partie A

Soit g la fonction dérivable et définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = -1 + (2 - 2x)e^{-2x+3}$.

- 1- Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2- a) Soit g' la fonction dérivée de g .
Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (4x - 6)e^{-2x+3}$.
b) Étudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x .
c) Justifier que $g\left(\frac{3}{2}\right) = -2$.
d) Dresser le tableau de variation de g .
- 3- a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} une solution unique notée α .
b) Vérifier que : $0,86 < \alpha < 0,87$.
c) Justifier que : $\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , (unité graphique : 2cm).

On considère la fonction f dérivable et définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = -x + (x - \frac{1}{2}) e^{-2x+3}$.

On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de f .

- 1-
 - a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.
 - b) En déduire que (\mathcal{C}) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$.
- 2-
 - a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - b) Démontrer que la droite (\mathcal{D}) d'équation $y = -x$ est asymptote à (\mathcal{C}) en $+\infty$.
 - c) Étudier la position de (\mathcal{C}) par rapport à (\mathcal{D}) .
- 3-
 - a) Soit f' la fonction dérivée de f .
Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$.
 - b) En déduire les variations de f .
 - c) Dresser le tableau de variation de f . *On ne calculera pas $f(\alpha)$.*
- 4- Construire (\mathcal{D}) et (\mathcal{C}) sur le même graphique.
On précisera les points de (\mathcal{C}) d'abscisses $0 ; \frac{1}{2} ; \frac{3}{2} ; 4$.
On prendra : $\alpha = 0,865$ et $f(\alpha) = 0,4$.
- 5- Soit t un nombre réel strictement supérieur à $\frac{3}{2}$. On désigne par $\mathcal{A}(t)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (\mathcal{C}) , la droite (\mathcal{D}) et les droites d'équations $x = \frac{3}{2}$ et $x = t$.

$$\text{On pose : } I_t = \int_{\frac{3}{2}}^t (x - \frac{1}{2}) e^{-2x+3} dx.$$

- a) À l'aide d'une intégration par parties, justifier que :

$$I_t = \frac{3}{4} - \frac{t}{2} e^{-2t+3}.$$

- b) En déduire $\mathcal{A}(t)$.

- c) Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(t)$.