*R. C. I. - M. E. N E. T. * Direction des Examens et Concours * Direction des Examens et Concours * R. C. I. - M. E. N E. T.*

BACCALAURÉAT **Coefficient : 4**
SESSION 2015 **Durée : 4 h**

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3 , 2/3 et 3/3.
Le candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.
Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

Partie I

On considère la fonction p définie sur $\mathbb{C}$ par :
$\forall z \in \mathbb{C}, p(z) = z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 5i)z + 2 - 2i.$

1. *a*) Calculer $p(i)$.
   b) Déterminer deux nombres complexes a et b tels que : $p(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - (3 + i)z + 2 + 2i = 0$.

3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation (E) : $p(z) = 0$.

Partie II

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, d'unité : 5 cm.
On pose : $z_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$.
On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. *a*) Calculer z_1 et z_2.
   b) Placer les points A_0, A_1 et A_2 dans le plan complexe.

2. On considère la suite U définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = |z_{n+1} - z_n|$.
   a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n|$.
   b) Démontrer que U est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$.
   c) Exprimer U_n en fonction de n.

3. On désigne par $A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$, la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
   On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
   a) Calculer l_n.
   b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} l_n$.

EXERCICE 2

Mariam, une jeune diplômée sans emploi, a reçu un fonds et décide d'ouvrir un restaurant. Après un mois d'activité, elle constate que :

- pour un jour donné, la probabilité qu'il y ait une affluence de clients est 0,6 ;
- lorsqu'il y a une affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,7 ;
- lorsqu'il n y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,4.

On désigne par A l'évènement « Il y a une affluence de clients » et par B l'évènement « Mariam réalise un bénéfice ».

1. On choisit un jour au hasard.
   a) Calculer la probabilité de l'évènement E suivant : « Il y a une affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice ».
   b) Démontrer que la probabilité $p(\text{B})$ de l'évènement B est égale à 0,58.
   c) Mariam a réalisé un bénéfice.
   Calculer la probabilité qu'il y ait eu une affluence de clients ce jour là.
   On donnera l'arrondi d'ordre 2 du résultat.

2. Mariam veut faire des prévisions pour trois jours successifs donnés.
   On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où elle réalise un bénéfice sur les 3 jours successifs.
   a) Déterminer les valeurs prises par X.
   b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   c) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.

3. Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p_n la probabilité que Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs sur une période de n jours.
   a) Justifier que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $p_n = 1 - (0{,}42)^n$.
   b) Déterminer la valeur minimale de n pour qu'on ait $p_n \geq 0{,}9999$.

PROBLÈME

Partie A

Soit r la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $r(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.
On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = r$.
Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. Démontrer que g est une solution de l'équation (E).

2. Soit l'équation différentielle (F) : $y' + y = 0$.
   a) Démontrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - g$ est une solution de (F).
   b) Résoudre l'équation différentielle (F).
   c) En déduire la solution φ de (E) qui vérifie $\varphi(0) = -\frac{3}{2}$.

Partie B

On considère la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2} e^{-x}$.

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), d'unités graphiques : OI = 2 cm ; OJ = 4 cm.

1. *a*) Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

   b) Démontrer que la courbe $(\mathscr{C})$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).

2. Calculer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.
3. *a*) Soit f' la fonction dérivée de f. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{3 + 2x - x^2}{2} e^{-x}$.

   b) Étudier les variations de f.
   c) Dresser le tableau de variations de f.

4. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0 est : $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}$.

5. Étudier les positions relatives de $(\mathscr{C})$ par rapport à l'axe des abscisses.

6. Représenter graphiquement (T) et $(\mathscr{C})$.

Partie C

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $\displaystyle\int_0^1 x e^{-x} dx$.
2. *a*) Vérifier que f est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.
   b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f'(x) + x e^{-x}$.
   c) En utilisant la question précédente, calculer en cm² l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (OI) et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.