

BACCALAUREAT
SESSION 2010

Coefficient : 4
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

*Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.*

EXERCICE 1

Partie A

On considère dans \mathbb{C} l'équation :

$$(E) : 4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4 = 0.$$

- 1- Déterminer les racines carrées de $6 + 6i\sqrt{3}$.
- 2- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 0$.
- 3- a) Développer, réduire et ordonner $(2z+1)[2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4]$.
b) En déduire les solutions de (E).
- 4- Soit $z_0 = -\frac{1}{2}$, $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

Exprimer chacun des nombres complexes z_0 , z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

Partie B

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) où l'unité est 1 cm, on considère les points M_0 , M_1 et M_2 d'affixes respectives $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ et $1 + i\sqrt{3}$.

S est la similitude directe de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.

- 1- a) Déterminer l'écriture complexe de S.
b) Justifier que $S(M_0) = M_1$ et $S(M_1) = M_2$.
- 2- Soit M_n un point du plan d'affixe z_n . On pose pour tout nombre entier naturel n , $M_{n+1} = S(M_n)$.
Justifier que $z_{n+1} = (1 - i\sqrt{3})z_n$ où z_{n+1} est l'affixe de M_{n+1} .
- 3- On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = |z_n|$.
a) Démontrer que (U_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
b) Justifier que la distance $OM_{12} = 2048$.

EXERCICE 2

On teste un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé. Pour cela, 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant une substance neutre et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie.

Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de 0,8 ; on ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant reçu la substance neutre.

- 1- Calculer la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament.
- 2- Démontrer que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est 0,52.
- 3- On soumet au test un individu pris au hasard.
Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie.
- 4- On contrôle 5 individus au hasard.
 - a) Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé.
 - b) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé.
- 5- On contrôle n individus pris au hasard. (n est un entier naturel non nul).
Déterminer n pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieur à 0,98.

PROBLÈME

Partie A

Soit la fonction g dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et définie par : $g(x) = 1 + x \ln x$.

- 1-
 - a) Justifier que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, g'(x) = 1 + \ln x$.
 - b) Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.
(On ne calculera pas les limites de g .)
- 2- En déduire que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in]0 ; +\infty[, f(x) = \frac{x}{1 + x \ln x} \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
(Unité : 4 cm).

- 1-
 - a) Étudier la continuité de f en 0.
 - b) Étudier la dérivabilité de f en 0.
 - c) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point O est : $y = x$.
 - d) Démontrer que :
 - (C) est au-dessus de (T) sur $]0 ; 1[$;
 - (C) est au-dessous de (T) sur $]1 ; +\infty[$.

2- Démontrer que la droite (OI) est une asymptote à (C) en $+\infty$.

3- a) On suppose que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

$$\text{Démontrer que : } \forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) = \frac{1-x}{(1+x \ln x)^2} .$$

b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.

4- Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J).

Partie C

1- a) Justifier que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, f(x) \leq 1$.

b) Démontrer que : $\forall x \in [1 ; e] , 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$.

2- Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Démontrer que : $16(e-1) + 16 \ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq A \leq 16(e-1)$.