*R. C. I. - M. E. N. Direction des Examens et Concours * Direction des Examens et Concours * R. C. I. - M. E. N.*

BACCALAUREAT
SESSION 2009

Coefficient : 4
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : D

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra trois (03) feuilles de papier millimétré.
Toute calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1

L'entreprise Ivoirbois, spécialisée dans l'industrie du bois, envisage de faire des prévisions pour l'année 2007 du coût de production de feuilles de contre-plaqués en fonction du chiffre d'affaires. Elle dispose à cet effet des statistiques résumées dans le tableau ci-dessous :

Années	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Chiffre d'affaires X (en millions de francs)	350	380	500	450	580	650	700
Coût de production Y (en millions de francs)	40	45	50	55	60	65	70

1- Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série double (X, Y) dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O, I, J).
On prendra 1 cm pour 50 millions de francs en abscisse et 1 cm pour 5 millions de francs en ordonnées.

2- a) Calculer le chiffre d'affaire moyen $\overline{X}$.
b) Calculer le coût moyen de production $\overline{Y}$.

3- a) Vérifier qu'un arrondi à l'entier de la covariance Cov(X, Y) de la série statistique est égale à 1193.
b) Justifier l'existence d'un ajustement linéaire entre X et Y.

4- a) Déterminer une équation de la droite (D) d'ajustement de Y en fonction de X par la méthode des moindres carrés.
b) Construire (D) dans le repère (O, I, J).

5- Utiliser l'ajustement précédent pour prévoir le coût de production de l'entreprise Ivoirbois de l'année 2007 si le chiffre d'affaires de l'année 2007 est de 800 millions de francs.

EXERCICE 2

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{3}{5}U_n + 1 \end{cases}$$

1- Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), représenter sur l'axe des abscisses les termes U_0 ; U_1 ; U_2 ; U_3 de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(unité graphique 2 cm).*

Tournez la page S.V.P.

2- a) Démontrer par récurrence que la suite $(U_n)_{n\in \mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{5}{2}$.

b) Démontrer que la suite $(U_n)_{n\in \mathbb{N}}$ converge.

3- Soit la suite $(V_n)_{n\in \mathbb{N}}$ définie par :

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ V_n = U_n - \frac{5}{2}$.

a) Démontrer que la suite $(V_n)_{n\in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de $(U_n)_{n\in \mathbb{N}}$.

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $g(x) = (1 - x)e^{1-x} - 1$.

1- a) Justifier que la limite de g en $+\infty$ est -1.
b) Déterminer la limite de g en $-\infty$.

2- a) Démontrer que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $g'(x) = (x - 2)\, e^{1-x}$.
b) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

3- a) Démontrer que l'équation $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$ admet une solution unique α.
b) Justifier que : $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.
c) En déduire que :

$\forall\, x \in \left]-\infty\,;\alpha\right[,\ g(x) > 0$;

$\forall\, x \in \left]\alpha\,;+\infty\right[,\ g(x) < 0$.

Partie B

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$f(x) = x e^{1-x} - x + 2$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est 2 cm.

1- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2- a) Démontrer que f est une primitive de g.
b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3- a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
b) Étudier la position relative de (D) et (C).

4- Démontrer que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

5- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

6- Démontrer que $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$.

7- Justifier que pour tout nombre réel x, $f(-x + 2) = e^{x-1} f(x)$.

8- On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions. On appelle β l'une de ces solutions Démontrer que $-\beta + 2$ est l'autre solution.

9- Tracer (D), (T) et (C). *(On prendra : $\alpha = 0,4$ et $\beta = 2,5$.)*

Partie C

Soit λ un nombre réel strictement positif et $A(\lambda)$ l'aire en cm² de la partie du plan délimitée par (C), la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$.

1- Calculer $A(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties.

2- Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.