*R. C. I. - M. E. N. E. T. F. P. * Direction des Examens et Concours * R. C. I. - M. E. N. E. T. F. P. * Direction des Examens et Concours*

BACCALAURÉAT **Coefficient : 5**
SESSION 2017 **Durée : 4 h**

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont également autorisées.

EXERCICE 1

On désigne par Y une variable aléatoire vérifiant les conditions suivantes :

- Y prend les valeurs 1, -1 et 2 avec les probabilités respectives e^a, e^b et e^c où a, b et c sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r tels que : $a = b - r$ et $c = b + r$.
- L'espérance mathématique E(Y) de Y est égale à 1.

1- *a*) Justifie que le couple (b, r) est solution du système (S) $\begin{cases} e^b e^{-r} + e^b + e^b e^r = 1 \\ e^b e^{-r} - e^b + 2e^b e^r = 1 \end{cases}$.

b) Résous le système (S).

c) Déduis de ce qui précède que : $a = \ln(\frac{1}{7})$ et $c = \ln(\frac{4}{7})$.

2- Justifie que la variance V(Y) de Y est égale à $\frac{12}{7}$.

3- On marque sur une droite graduée (D) les points A, B et C d'abscisses respectives 1 ; -1 et 2.
On désigne par G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 2) et (C, 4).
On note (Γ) l'ensemble des points M de la droite (D) tels que : $MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2 = 187$ et on pose : $h(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$.

a) Calcule l'abscisse du point G.
b) Démontre que : $h(G) = V(Y)$.
c) Détermine l'ensemble (Γ).

EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle OIJ tel que : OI = OJ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}}) = \frac{\pi}{2}$.

A, B et C sont les milieux respectifs des segments [IJ], [JO] et [OI].

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$. On pose : $F = r \circ t$ et $G = t \circ r$.

1- Fais une figure. (*On prendra : OI = 8 cm*).

2- *a*) Détermine F(C) et G(B).
b) Déduis de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations F et G.

3- On désigne par F^{-1} la réciproque de la transformation F.
a) Détermine la nature de la transformation $G \circ F^{-1}$.

b) Détermine $(GoF^{-1})(O)$, puis caractérise la transformation GoF^{-1}.
c) Détermine (GoF)(I) puis déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de la transformation GoF.

4- On munit le plan du repère orthonormé (O, I, J) tel que défini précédemment. Soit h l'homothétie de centre B et de rapport -2. On pose : $S = h o r$.
a) Écris l'affixe de chacun des points A, B et C.
b) Détermine l'écriture complexe de h et celle de r.
c) Soit g l'application complexe associée à S.
Démontre que : $\forall\, z \in \mathbb{C},\ g(z) = -2iz - 2 + \frac{3}{2}i$.
d) Déduis de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de S.

PROBLÈME

On considère la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $t_n = n - (n + \frac{1}{2})\ln(n) + \ln(n!)$.

Le but de ce problème est d'étudier la convergence de la suite (t_n) et de démontrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = \ln(\sqrt{2\pi})$.

Partie I : Etude de la convergence de la suite (t_n).

Soit n un entier naturel non nul et ψ la fonction définie sur $]-n\,;+\infty[$ par : $\psi(t) = \ln(1 + \frac{t}{n}) - \frac{t}{n}$.

On suppose que ψ est dérivable sur $]-n\,;+\infty[$ et on note ψ' sa fonction dérivée.

1- *a*) Justifie que : $\forall\, t \in\,]-n\,;+\infty[,\ \psi'(t) = \dfrac{-t}{n^2(1 + \frac{t}{n})}$.

b) Calcule $\psi(0)$.
c) Dresse le tableau de variation de la fonction ψ (On ne calculera pas les limites).
d) Déduis de ce qui précède que : $\forall\, t \in\,]-n\,;+\infty[,\ \ln(1 + \frac{t}{n}) \leq \frac{t}{n}$.

2- *a*) En utilisant la question 1-*d*) et en effectuant un changement de variable, démontre que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln x \leq x - 1$.

b) Démontre que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} (\frac{x}{k} - 1)\, dx = 0$.

c) Déduis des questions 2-*a*) et 2-*b*) que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(\frac{x}{k})\, dx \leq 0$.

d) Justifie alors que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(x)\, dx \leq \ln(k)$.

e) En utilisant la relation de Chasles, démontre que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(x)\, dx \leq \ln(n\,!).$$

3- *a*) En utilisant une intégration par parties, démontre que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ n - (n+\frac{1}{2})\ln(n+\frac{1}{2}) + \ln(n\,!) \geq \ln(\sqrt{2}).$$

b) Démontre que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ t_n \geq \ln(\sqrt{2})$.

4- On définit la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,1[$ par : $f(x) = \frac{1}{2x}\ln(\frac{1+x}{1-x})$.

On admet que : $\forall\, x \in\,]0\,;\,1[,\ f(x) \geq 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ t_{n+1} - t_n = 1 - f(\frac{1}{2n+1})$.

a) Détermine le sens de variation de la suite (t_n).

b) Déduis des questions précédentes la convergence de la suite (t_n).

Partie II : Calcul de la limite de la suite (t_n).

On définit la suite (w_n) par :

$$w_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt.$$

1- *a*) Calcule w_1.

b) Démontre que la suite (w_n) est décroissante et positive. On admettra que la suite (w_n) est à termes strictement positifs.

c) A l'aide d'une intégration par parties, démontre que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, w_n$.

(*On remarquera que : $\sin^{n+2}(t) = \sin(t) \times \sin^{n+1}(t)$*).

d) En utilisant les questions 1-*b*) et 1-*c*) de la partie II, justifie que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{w_{n+1}}{w_n} \leq 1.$$

e) Déduis de ce qui précède $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n}$.

2- On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ y_n = (n+1)w_{n+1} \times w_n$.

a) Démontre que la suite (y_n) est constante.

b) Déduis de ce qui précède que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ y_n = \frac{\pi}{2}$.

c) Détermine $\lim\limits_{n \to +\infty} n w_n^2$ (*On remarquera que : $n w_n^2 = \frac{n}{n+1} \times y_n \times \frac{w_n}{w_{n+1}}$*).

d) Déduis de ce qui précède que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, w_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

3- On admet dans toute la suite du problème que si une suite (a_n) converge vers ℓ alors la suite (a_{2n}) converge aussi vers ℓ.

a) Déduis de la question 2-*c*) de la partie II la limite de la suite $(n w_{2n}^2)$.

(*On remarquera que : $n w_{2n}^2 = \frac{1}{2}(2n w_{2n}^2)$*).

b) En utilisant la question 1-*c*) de la partie II, démontre par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ w_{2n} = \frac{(2n)\,!}{2^{2n}(n\,!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

c) Démontre que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ e^{t_n} = n\,!\,(\frac{e}{n})^n \times \frac{1}{\sqrt{n}}$.

d) En admettant que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ e^{t_{2n} - 2t_n} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{n w_{2n}^2}$, détermine la limite de la suite (t_n).