*R. C. I. - M. E. N. E. T. * Direction des Examens et Concours * R. C. I. - M. E. N. E. T. * Direction des Examens et Concours*

**BACCALAURÉAT**
**SESSION 2014**

**Coefficient : 5**
**Durée : 4 h**

# MATHÉMATIQUES

## SÉRIE C

***Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.***
***Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.***
***Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.***
***Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont autorisées.***

## EXERCICE 1

**I.**

1- Démontrer qu'il existe un couple ($a$ ; $b$) d'entiers relatifs tel que : $45a - 16b = 1$.

2- Soit l'équation (E) : $45x - 16y = 2$ où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.
*a*) Justifier que le couple (10 ; 28) est une solution particulière de (E).
*b*) Résoudre (E).

**II.**

Deux navires A et B accostent régulièrement et périodiquement dans un port pour décharger et charger des marchandises.
Le navire A accoste tous les 90 jours et B accoste tous les 32 jours.
Le navire A accoste un jour $J_0$ au port et quatre jours plus tard, B accoste au port à son tour.
On note $J_1$ le jour de la prochaine entrée simultanée des deux navires au port.

1- Soient $u$ et $v$ le nombre d'entrées au port effectuées respectivement par A et B entre $J_0$ et $J_1$ ($J_0$ non compris).
Démontrer que le couple ($u$ ; $v$) est une solution de (E).

2- Déterminer le couple ($u$ ; $v$).

3- Calculer le nombre de jours qui s'écoulent entre $J_0$ et $J_1$ ($J_0$ non compris).

## EXERCICE 2

L'unité de longueur est le centimètre.
Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que :

$$\text{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \text{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = -\frac{\pi}{6}.$$

**I.**

1- On considère la similitude directe S qui transforme A en B et C en A.
*a*) Faire une figure en prenant AC = 7. (*On complétera la figure au fur et à mesure.*)
*b*) Justifier que S n'est pas une translation.
*c*) Justifier que l'angle de la similitude directe S est $-\frac{\pi}{2}$.
*d*) Déterminer le rapport de S.



Tournez la page S.V.P.

2- On note $\Omega$ le centre de S.

*a)* Démontrer que $\Omega$ appartient aux cercles $(\mathscr{C}')$ et $(\mathscr{C})$ de diamètres respectifs [AB] et [AC].

*b)* Justifier que $\Omega$ est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

3- Soit $(\Delta)$ une droite passant par A et ne passant pas par $\Omega$.

(D) est la perpendiculaire à $(\Delta)$ passant par C. On appelle B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur $(\Delta)$.

*a)* Déterminer les images respectives de (D) et $(\Delta)$ par S.

*b)* En déduire l'image du point C' par S.

*c)* Déduire de ce qui précède que le cercle de diamètre [B'C'] passe par un point fixe lorsque la droite $(\Delta)$ varie. Préciser ce point fixe.

**II.**

1- Placer le point I de la demi-droite [AC) tel que : AB = AI.

2- Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(A ; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB})$.

*a)* Démontrer que l'affixe du point C est $\sqrt{3}$.

*b)* Soit M un point d'affixe $z$ et M' le point d'affixe $z'$, image de M par S.

Justifier que : $z' = -i\dfrac{\sqrt{3}}{3}z + i$.

*c)* Déterminer l'affixe du centre $\Omega$ de S.

3- *a)* Déterminer l'ensemble $(\Gamma)$ des points M d'affixe z tel que $|z'| = 1$.

*b)* Tracer $(\Gamma)$.

# PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est égale à 2 cm.

***Partie A***

Soit $f$ la fonction dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2(1 - 2\ln x), \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans le plan muni du repère (O, I, J).

1- Démontrer que $f$ est continue en 0.

2- Justifier que la courbe $(\mathscr{C})$ admet en son point d'abscisse 0, une tangente horizontale.

3- *a)* Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

*b)* Interpréter graphiquement les résultats de la question 3-*a)*.

4- *a)* Démontrer que pour tout $x$ élément de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = -4x\ln x$.

*b)* Étudier les variations de $f$ sur $[0 ; +\infty[$, puis dresser son tableau de variation.

*c)* Calculer $f(\sqrt{e})$ et justifier que :

$$\begin{cases} \forall x \in [0 , \sqrt{e}], \ 0 \leq f(x) \leq 1 \\ \forall x \in ]\sqrt{e}, +\infty[, \ f(x) < 0 \end{cases}$$

5- *a)* Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse $\sqrt{e}$.

*b)* Tracer (T) et $(\mathscr{C})$.

***Partie B***

$a$ est un élément de $]0\,;\sqrt{e}\,[\cup]\sqrt{e}\,;+\infty[$ et $x$ est un nombre réel strictement positif.

On pose : $\mathrm{S} = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

1- A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\mathrm{S} = \dfrac{x^3}{3}\left(\dfrac{5}{3} - 2\ln x\right) - \dfrac{a^3}{3}\left(\dfrac{5}{3} - 2\ln a\right)$.

2- On note $\mathcal{A}(a)$ l'aire en cm² de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations : $y = 0, x = a$ et $x = \sqrt{e}$.

*a)* Démontrer que : $\mathcal{A}(a) = \left(4\displaystyle\int_a^{\sqrt{e}} f(t)\mathrm{d}t\right)$ cm².

(*On distinguera les cas $a < \sqrt{e}$ et $a > \sqrt{e}$*)

*b)* On suppose dans cette question que $a < \sqrt{e}$.

Calculer la limite de $\mathcal{A}(a)$ lorsque $a$ tend vers 0. (*On admettra que cette limite est l'aire en cm² de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x = 0, x = \sqrt{e}$ et $y = 0$.*)

*c)* On suppose dans cette question que $a > \sqrt{e}$.

Déterminer la valeur de $a$ pour laquelle $\mathcal{A}(a) = \left(\dfrac{8}{9}e\sqrt{e}\right)$ cm².

3- Déduire de ce qui précède que l'aire en cm² de la partie du plan comprise entre la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e^{\frac{5}{6}}$ est égale à : $\dfrac{16}{9}e\sqrt{e}$.

***Partie C***

$n$ est un entier naturel.

Soit $f_n$ la fonction dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et définie par : $\begin{cases} f_n(x) = x^2(n - 2\ln x)e^{\frac{1-n}{2}}, \text{ si } x > 0 \\ f_n(0) = 0. \end{cases}$

On note $(\mathscr{C}_n)$ la représentation graphique de $f_n$ dans le plan muni du repère (O, I, J).

1- Démontrer que $(\mathscr{C}_n)$ est l'image de $(\mathscr{C}_1)$ par l'homothétie de centre O et de rapport $e^{\frac{n-1}{2}}$.

*On remarquera que : $(\mathscr{C}_1) = (\mathscr{C})$.*

2- *a)* Construire la courbe $(\mathscr{C}_2)$ et ses tangentes aux points d'abscisses respectives 0 et $e$.

*b)* Déterminer en cm², l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C}_2)$, les droites (OI), (OJ) et la droite d'équation $x = e$.

3- Déterminer l'aire en cm² de la partie du plan comprise entre la courbe $(\mathscr{C}_2)$, la droite (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e^{\frac{4}{3}}$.