

BACCALAURÉAT
SESSION 2013

Coefficient : 5
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

*Cette épreuve comporte quatre (04) pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.*

EXERCICE 1 (5 points)

a est un nombre réel strictement positif et différent de 1. On considère la fonction f dérivable sur \mathbb{R}^+ et définie par : $f(x) = \sqrt{1 + ax^2}$.

On admettra que f est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ .

Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1- On suppose que : $0 < a < 1$.

a) Démontrer par récurrence que :

i) pour tout n élément de \mathbb{N} , $0 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$;

ii) la suite (u_n) est croissante.

b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

2- On suppose que : $a > 1$.

Soit la suite (v_n) définie par :

$$v_n = (u_{n+1})^2 - (u_n)^2 \text{ pour tout entier naturel } n.$$

a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u_{n+1})^2 - (u_n)^2 = a^n.$$

c) On pose : $S_0 = 1$ et $S_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Justifier que : $S_n = \frac{1-a^n}{1-a}$.

d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{S_n}.$$

EXERCICE 2 (5 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, d'unité 1 cm, on considère les points $A(-1 ; 0)$ et $I(4 ; 0)$.

On note (E) l'ellipse de centre I dont un sommet est A et un foyer est le point O .

- 1-
 - a) Déterminer les coordonnées des trois autres sommets de (E) dans le repère $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
 - b) Justifier que l'excentricité de (E) est égale à $\frac{4}{5}$.
 - c) Donner une équation de la directrice (D) de l'ellipse (E) associée au foyer O dans le repère $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

- 2-
 - a) Démontrer qu'une équation de (E) dans le repère $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est :
$$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$
 - b) Construire (E) .

- 3- On considère l'équation :
$$(E_\alpha) : z \in \mathbb{C}, z^2 - 2(4 + 5\cos\alpha)z + (4\cos\alpha + 5)^2 = 0 \text{ avec } \alpha \in [0 ; \pi].$$
 - a) Justifier que le discriminant de (E_α) est : $\Delta = (6i \sin\alpha)^2$.
 - b) Résoudre l'équation (E_α) .

On notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est strictement positive et z_2 l'autre solution.
 - c) On note M_1 le point d'affixe z_1 et M_2 le point d'affixe z_2 dans le repère $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Démontrer que M_1 et M_2 appartiennent à (E) lorsque α décrit l'intervalle $[0 ; \pi]$.

PROBLÈME (10 points)

Partie A.

On considère la fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et définie par : $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J) .

Unités : $OI = 2$ cm et $OJ = 4$ cm.

I- Soit la fonction u dérivable sur $]0, +\infty[$ et définie par : $u(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.

- 1- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$.

- 2-
 - a) Etudier les variations de u sur $]0 ; +\infty[$ puis dresser son tableau de variation.
 - b) Démontrer que l'équation :
$$(E) : x \in]0 ; +\infty[, u(x) = 0$$
admet une solution unique α .
 - c) Démontrer que : $1,89 < \alpha < 1,9$.

d) Justifier que :
$$\begin{cases} \text{si } x \in]0, \alpha[\text{ alors } u(x) > 0 \\ \text{si } x \in [\alpha, +\infty[\text{ alors } u(x) \leq 0 \end{cases}$$

II-

- 1- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2- a) Démontrer que pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $f'(-x) = \frac{u(x)}{x(1+x^2)^2}$.
 b) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$.
 c) Étudier les variations de f sur $]0; +\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f .
- 3- a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (\mathcal{C}) et (OI) .
 b) Déterminer suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$ pour tout x élément de $]0; +\infty[$.
- 4- Tracer (\mathcal{C}) dans le plan muni du repère $(O; I, J)$.

Partie B.

On note F la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par :
$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt.$$

- 1- a) Déterminer le signe de F sur $]0; +\infty[$.
 b) Calculer $F'(x)$ pour tout nombre réel x élément de $]0; +\infty[$.
- 2- On note φ la bijection réciproque de la fonction tangente sur $[0; \frac{\pi}{2}[$.
 a) Démontrer que pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
 b) Soit h la fonction définie par :
$$\begin{cases} \forall x \in]0, +\infty[, h(x) = \frac{\varphi(x)}{x} \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

 Démontrer que h est continue en 0.
- 3- a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, F(x) = \varphi(x) \ln x - \int_1^x h(t) dt.$$

 b) En utilisant la question 2-b) de la partie B, démontrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) \ln x = 0$.
- 4- On admettra que F est prolongeable par continuité en 0 et que : $\forall x \in]0; +\infty[, F(x) = F(\frac{1}{x})$. Soit G le prolongement par continuité de F en 0. On pose $G(0) = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$).
 G est définie par :
$$\begin{cases} \forall x \in]0, +\infty[, G(x) = F(x) \\ G(0) = \ell \end{cases}$$

 On désigne par (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O; I, J)$.
 a) Démontrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \ell$.
 b) Étudier les variations de G sur $]0; +\infty[$ puis dresser son tableau de variation.

5- On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

$$\text{On admet que : } |\ell - v_n| < \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

a) Justifier que : $v_2 = \frac{209}{225}$.

b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $\frac{1}{(2n+3)^2} < 25 \cdot 10^{-3}$.

c) En déduire une valeur approchée de ℓ à $25 \cdot 10^{-3}$ près.

d) Donner l'allure de (Γ) dans le plan muni du repère (O, I, J) .