*R. C. I. - M. E. N. Direction des Examens et Concours * Direction des Examens et Concours * R. C. I. - M. E. N.*

BACCALAURÉAT **Coefficient : 5**
SESSION 2011 **Durée : 4 h**

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
A tout point M d'affixe z, on fait correspondre le point M′ d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$.

1- Calculer les coordonnées $(x' ; y')$ du point M′ en fonction des coordonnées $(x ; y)$ du point M.

2- *a)* Démontrer que l'ensemble (H) des points M du plan tels que z' soit un nombre imaginaire pur est une hyperbole.

b) Préciser dans le repère $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, les coordonnées du centre Ω, celles des sommets et les équations des asymptotes de (H).

c) Construire (H).

3- Soit P le point d'affixe $-\frac{5}{2} - 2i$.

Déterminer les points M du plan tels que le quadrilatère OMM′P soit un parallélogramme.

EXERCICE 2

Un livreur de pain qui fait son service à moto, doit servir tous les jours un client à 20 heures précises.
La livraison de pain chez ce client est indépendante d'un jour à l'autre.
Habituellement, le livreur met 10 minutes de la boulangerie au domicile de ce client ; mais la mairie a fait installer sur son trajet deux feux tricolores non synchronisés et indépendants.

- S'il arrive à un feu orange, il s'arrête 60 secondes et repart.
- S'il arrive à un feu rouge, il s'arrête 30 secondes et repart.

Pour chaque feu :

- la probabilité d'être vert à l'arrivée du livreur est $\frac{1}{2}$;
- la probabilité d'être orange à l'arrivée du livreur est $\frac{1}{4}$.

On note X la variable aléatoire égale au temps mis en minutes par le livreur pour arriver au domicile du client.

Tournez la page S.V.P.

1- *a)* Justifier que l'ensemble des valeurs prises par X est $\{10 ; 10,5 ; 11 ; 11,5 ; 12\}$.

b) Justifier que $P(X = 11) = \frac{5}{16}$.

c) Déterminer la loi de probabilité de X.

2- Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter ce résultat.

3- Le livreur part à 19 h 49 min de la boulangerie.

a) Calculer la probabilité qu'il arrive à 20 heures précises chez le client.

b) Calculer la probabilité qu'il arrive en retard chez le client.

4- *Pour cette question, on donnera l'arrondi d'ordre 3 de chaque résultat.*

a) Calculer la probabilité pour que le pain soit livré exactement trois fois à 20 heures précises au cours d'une semaine.

b) Calculer la probabilité pour que le pain soit livré au moins une fois à 20 heures précises au cours d'une semaine.

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.
Soit k un nombre réel non nul.
On considère la fonction f_k dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par :

$$f_k(x) = (2x + 4k)e^{-\frac{x}{2k}} - x.$$

On note $(\mathscr{C}_k)$ la courbe représentative de la fonction f_k.
Le but du problème est d'étudier les fonctions f_k, de construire la courbe $(\mathscr{C}_1)$ et de donner un programme de construction de la courbe $(\mathscr{C}_k)$ pour k différent de 1.

***Partie A* : Étude d'une fonction auxiliaire.**

Soit h la fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x) = x + e^{\frac{x}{2}}$.

1- Etudier le sens de variations de h.

2- Calculer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.

3- *a)* Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α tel que : $-0,71 < \alpha < -0,70$

b) En déduire que : $\forall x \in]-\infty ; \alpha[,\ h(x) < 0$;
$\forall x \in]\alpha ; +\infty[,\ h(x) > 0$.

***Partie B* : Étude de la fonction f_1.**

Pour tout nombre réel x : $f_1(x) = (2x + 4)\ e^{-\frac{x}{2}} - x$.

1- *a)* Démontrer que $f_1(\alpha) = -2 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$.

b) En déduire un encadrement de $f_1(\alpha)$ d'amplitude 0,1.

2- *a)* Pour tout réel x, calculer $f_1'(x)$ et démontrer que $f_1'(x) = -h(x)e^{-\frac{x}{2}}$.

b) En déduire les variations de f_1.

3- *a)* Calculer la limite quand x tend vers $-\infty$ de $f_1(x)$,

puis la limite quand x tend vers $-\infty$ de $\frac{f_1(x)}{x}$.

Interpréter graphiquement ces résultats.

b) Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$.

c) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote à ($\mathscr{C}_1$) en $+\infty$.

4- *a)* Dresser le tableau de variation de f_1.

b) Construire la droite (D) et la courbe ($\mathscr{C}_1$) dans le plan muni du repère (O, I, J).

5- *a)* A l'aide d'une intégration par parties, calculer pour tout nombre réel x :

$$I(x) = \int_0^x (2t+4)e^{\frac{-t}{2}}\,dt.$$

b) En déduire en cm^2 l'aire $\mathscr{A}_1$ de la partie du plan limitée par :

- la courbe ($\mathscr{C}_1$) ;
- la droite (D) ;
- la droite (OI) et la droite d'équation $x = 2$.

***Partie C* : Étude de la fonction f_k.**

1- *a)* Démontrer que pour tout nombre réel x :

$$f_k'(x) = -h\left(\frac{1}{k}x\right)e^{-\frac{x}{2k}}$$

b) En utilisant la partie A, étudier les variations de f_k suivant le signe de k.

c) Vérifier que $f_k(k\alpha) = kf_1(\alpha)$.

d) Dresser le tableau de variation de f_k suivant le signe de k.

(On ne demande pas de calculer les limites de f_k)

2- *a)* Démontrer que ($\mathscr{C}_k$) est l'image de ($\mathscr{C}_1$) par l'homothétie de centre O et de rapport k.

b) En déduire la construction de ($\mathscr{C}_{-\frac{1}{2}}$) dans le même repère que ($\mathscr{C}_1$).

3- On note $\mathscr{A}_k$ l'aire de la partie du plan limitée par :

- la courbe ($\mathscr{C}_k$) ;
- la droite (D) ;
- la droite (OI) et la droite d'équation $x = 2k$.

Déterminer en cm^2 $\mathscr{A}_k$ en fonction de k.