BACCALAUREAT
SESSION 2007

Coefficient : 5
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : C

Cette épreuve comporte trois(03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Toute calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1

Dans une ville de Côte d'Ivoire, un sondage a permis de constater que 30% de la population sont gauchers et que 70% sont droitiers. *(Les résultats seront des arrondis d'ordre 4).*

1- Justifier que dans un groupe de 6 personnes choisies au hasard dans cette ville, la probabilité pour qu'il y ait un seul gaucher est égale à 0,3025.

2- Calculer la probabilité pour qu'un groupe de 6 personnes choisies au hasard dans cette ville contienne :

a) exactement 2 gauchers ;

b) au moins un gaucher.

3- Un atelier de couture de cette ville est équipé de 5 paires de ciseaux pour droitiers et 2 paires de ciseaux pour gauchers. Cet atelier vient de recevoir 6 stagiaires.

Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de stagiaires de l'atelier pouvant trouver une paire de ciseaux à sa convenance.

a) Déterminer les valeurs prises par X.

b) Justifier que la probabilité pour que X prenne la valeur 2 est égale à 0,0007.

c) Calculer la probabilité pour que X prenne la valeur 6.

EXERCICE 2

On considère le triangle ABC rectangle en B tel que : AB = 5 cm et Mes $(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) = \frac{\pi}{3}$.

Soit E le milieu du segment [AC].

1- a) Construire le triangle ABC.

b) Démontrer qu'il existe une rotation r transformant B en C et A en E.

c) Déterminer l'angle de la rotation r.

d) Construire son centre O.

2- Soit S la similitude directe de centre O qui transforme B en E.
Soit J le centre du cercle circonscrit au triangle OAE.

a) Déterminer l'angle et le rapport de S.

b) Démontrer que S(A) = J.

3- Soit k un nombre réel non nul, M et M' deux points du plan tels que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EM'} = k\,\overrightarrow{EC}$.

a) Construire les points M et M' pour $k = \frac{3}{2}$.

b) Démontrer que M est le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs $(k-1)$ et $(-k)$.

c) Démontrer que r(M) = M' et en déduire que le triangle OMM' est équilatéral.

d) Démontrer que les points O, A, M et M' sont cocycliques.

4- Soit N le centre du cercle circonscrit au triangle OMM'.

a) Démontrer que S(M) = N.

b) Déterminer l'ensemble des points N lorsque M décrit la droite (AB).

PROBLEME

On considère la fonction numérique f dérivable et définie sur l'intervalle $]-1\,;\,1[$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé (O ; I ; J).

Unité graphique 2 cm.

Partie A

1- Calculer les limites de f en −1 et en 1.
Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2- a) Démontrer que :

$$\forall x \in]-1\,;\,1[\,;\; f'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

b) En déduire le tableau de variation de f.

c) Déterminer une équation de la droite (T), tangente à (C) au point d'abscisse 0.

3- Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f(x) - x$.

a) Déterminer le sens de variation de g.

b) Calculer g(0) et en déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.
d) Déterminer la position de C par rapport à (T).

4- Construire, dans le même repère, (C) et (T).

5- a) Démontrer que f est une bijection de $]-1\,;\,1[$ sur $\mathbb{R}$.

b) On désigne par f^{-1}, la bijection réciproque de f et par (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le repère (O, I, J). Construire (C').

c) Démontrer que : $\forall y \in \mathbb{R},\; f^{-1}(y) = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$.

Partie B

1- Soit ϕ une primitive de f^{-1} sur $\mathbb{R}$ (*on ne cherchera pas à déterminer $\phi(x)$*).

a) Démontrer que $\phi o f$ est une primitive de la fonction $x \mapsto x f'(x)$ sur $]-1\,;1[$.

b) Démontrer que pour tous éléments a et b de $]-1\,;1[$,

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \phi o f(b) - \phi o f(a).$$

c) En déduire que $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \int_a^b t f'(t)dt.$

d) Démontrer que pour tout élément x de $]-1\,;1[$:

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_0^x t f'(t)dt$$ (*on pourra utiliser B 1- c*).

2- a) Démontrer que pour tout élément x de $]-1\,;1[$:

$$\int_0^x t f'(t)dt = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2).$$ *(On pourra utiliser A2-a).*

b) En déduire que, pour tout élément y de $\mathbb{R}$,

$$\int_0^y f^{-1}(t)dt = \ln\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right).$$

3- Soit A l'aire de la partie du plan délimitée par :
la courbe (C') de f^{-1} et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.
Calculer A en unité d'aire.

4- a) Hachurer sur le graphique, l'ensemble D des points dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$0 \le x \le 1\,;\ 0 \le y \le 1$ et $f^{-1}(x) \le y \le f(x)$.

b) Calculer l'aire de D en cm².