*R. C. I. - M. E. N * Direction des Examens et Concours * R. C. I. - M. E. N*

BACCALAURÉAT **Coefficient : 4**
SESSION 2016 **Durée : 4 h**

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux(2) feuilles de papier millimétré.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont autorisées.

EXERCICE 1

1- On considère la fonction h dérivable et définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par : $h(x) = 2x - x^2$.
a) Démontrer que h est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.
b) En déduire que l'image de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par h est l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

2- Soit u la suite définie par :
$u_0 = \dfrac{3}{7}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = h(u_n)$.
a) Démontrer par récurrence que :
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$.
b) Démontrer que la suite u est croissante.
c) Justifier que la suite u est convergente.

3- On considère la suite v définie par :
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln(1 - u_n)$.
a) Démontrer que v est une suite géometrique de raison 2.
b) Exprimer v_n en fonction de n.
c) Calculer la limite de la suite v.
d) En déduire la limite de la suite u.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique : 2 cm).
On considère la transformation $\mathcal{S}$ du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = (1 - i\frac{\sqrt{3}}{3})z + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

1- *a*) Soit Ω le point d'affixe 2.
Vérifier que : $\mathcal{S}(\Omega) = \Omega$

b) Justifier que $\mathcal{S}$ est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

2- *a*) Démontrer que : $\forall\, z \neq 2,\ \dfrac{z' - z}{2 - z} = i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

b) En déduire que le triangle MΩM' est rectangle en M.

c) Donner un programme de construction de l'image M' par $\mathcal{S}$ d'un point M donné.

3- *a*) Placer les points A et B d'affixes respectives $-1 + i$ et $5 - i$
dans le plan muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Construire les images respectives A' et B' de A et B par $\mathcal{S}$.

b) On note z_A, z_B, $z_{A'}$ et $z_{B'}$ les affixes respectives des points A, B, A' et B'.
Démontrer que : $z_{A'} - z_A = z_B - z_{B'}$.

c) En déduire la nature du quadrilatère AA'BB'.

PROBLÈME

Partie A

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -1 + (2 - 2x)e^{-2x+3}$.

1- Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2- *a*) Soit g' la fonction dérivée de g.
Justifier que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g'(x) = (4x - 6)\, e^{-2x+3}$.

b) Étudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.

c) Justifier que $g(\frac{3}{2}) = -2$.

d) Dresser le tableau de variation de g.

3- *a*) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique notée α.

b) Vérifier que : $0{,}86 < \alpha < 0{,}87$.

c) Justifier que : $\forall\, x \in]-\infty\,;\alpha[,\ g(x) > 0$ et $\forall\, x \in]\alpha\,; +\infty[,\ g(x) < 0$.

Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J), (unité graphique : 2cm).

On considère la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + (x - \frac{1}{2})\,e^{-2x+3}$.

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f.

1- *a*) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) En déduire que $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$.

2- *a*) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = -x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

c) Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(\mathscr{D})$.

3- *a*) Soit f' la fonction dérivée de f.

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$.

b) En déduire les variations de f.

c) Dresser le tableau de variation de f. *On ne calculera pas $f(\alpha)$.*

4- Construire $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$ sur le même graphique.

On précisera les points de $(\mathscr{C})$ d'abscisses 0 ; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; 4.

On prendra : $\alpha = 0{,}865$ et $f(\alpha) = 0{,}4$.

5- Soit t un nombre réel strictement supérieur à $\frac{3}{2}$. On désigne par $\mathscr{A}(t)$ l'aire en cm² de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite $(\mathscr{D})$ et les droites d'équations $x = \frac{3}{2}$ et $x = t$.

On pose : $I_t = \displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{t} (x - \frac{1}{2})\,e^{-2x+3}dx$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, justifier que :

$$I_t = \frac{3}{4} - \frac{t}{2}\,e^{-2t+3}.$$

b) En déduire $\mathscr{A}(t)$.

c) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathscr{A}(t)$.