*R. C. I. - M. E. N. Direction des Examens et Concours * Direction des Examens et Concours * R. C. I. - M. E. N.*

BACCALAURÉAT **Coefficient : 4**
SESSION 2012 **Durée : 4 h**

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte quatre (04) pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.
La page 4/4 est une feuille annexe à rendre avec la copie
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.

EXERCICE 1

Madame Kouamé, statisticienne à la retraite, a créé une petite entreprise de fabrication de colliers traditionnels. Dans l'intention de faire des prévisions pour la production de colliers de l'année 2011 elle a fait l'état des ventes des huit types de colliers fabriqués en 2010.

Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Type de collier	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix x_i de vente en centaines de francs CFA du collier de type i	54	60	66	72	84	90	96	102
Nombre y_i de dizaines de colliers vendus au prix x_i	18	16	15	13	10	9	8	7

On désigne par :

X le caractère « prix de vente du collier » ;

Y le caractère « nombre colliers vendus au prix X ».

1- Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série statistique double de caractère (X ; Y) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). On prendra 2 cm pour 10 centaines de francs sur (OI) et 2 cm pour 2 dizaines de colliers sur (OJ).

2- Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage.

3-

a) Calculer la variance V(X) de X.

b) Calculer la covariance COV(X ;Y) de la série statistique double de caractère (X ; Y).

c) On admet que V(Y) = 14,50. Démontrer que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire est égal à – 0,99.

Tournez la page S.V.P.

4- Soit (D) la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés.

a) Justifier que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient directeur de (D) est égal à - 0,23.

b) Démontrer qu'une équation de la droite (D) est : $y = -0{,}23x + 29{,}94$.

5- Pour l'année 2011, Madame Kouamé souhaite fabriquer un nouveau type de collier qu'elle vendrait à 11 500 francs CFA l'unité. Combien de colliers de ce type pourrait-elle vendre selon l'ajustement linéaire réalisé ?

EXERCICE 2

On considère la suite numérique U définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{4}{U_n}\right) \end{cases}.$$

1- On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) où les unités respectives sur (OI) et (OJ) sont 4 cm et 2 cm.

La courbe (C) et la droite (D) d'équation $y = x$ sont tracées sur la feuille annexe à rendre avec la copie.

a) Représenter sur l'axe des abscisses (OI) les termes U_1, U_2, et U_3 de la suite U en utilisant la courbe (C) et la droite (D).

b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la convergence de la suite U ?

2- On admet que f est continue et strictement croissante sur $[2 ; 3]$.

a) Démontrer que $f([2 ; 3]) \subset [2 ; 3]$.

b) En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$2 \leq U_n \leq 3$.

3-

a) Démontrer que la suite U est décroissante.

b) En déduire que la suite U est convergente.

4- On considère la suite V définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2}$.

a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $V_{n+1} = (V_n)^2$.

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $V_n = (V_1)^{2^{n-1}}$.

c) Calculer V_1 puis exprimer V_n en fonction de n.

d) Exprimer U_n en fonction de n.

e) Démontrer que $\lim V = 0$. En déduire la limite de U.

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction g dérivable et définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = e^x + 2\ln x$.

1-

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

b) Calculer $g'(x)$.

c) Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

2-

a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0\,;+\infty[$.

b) Vérifier que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

c) Démontrer que :

$$\forall\, x \in\,]0\,;\alpha[,\ g(x) < 0\,;$$
$$\forall\, x \in\,]\alpha\,;+\infty[,\ g(x) > 0.$$

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = e^x + 2x\ln x - 2x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est 4 cm.

1-

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

b) Interpréter graphiquement les résultats.

2-

a) Démontrer que f est continue en 0.

b) Démontrer que : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$.

c) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier la réponse.

d) Interpréter graphiquement le résultat de la question 2.b).

3- On admet que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

a) Démontrer que : $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[,\ f'(x) = g(x)$.

b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

4- Tracer la courbe (C) sur l'intervalle $[0\,;2]$. (*On prendra $\alpha = 0{,}45$ et on admettra que la courbe (C) coupe la droite (OI) en deux points d'abscisses respectives 0,3 et 0,6.*)

5-

a) On pose $K = \displaystyle\int_1^2 x\ln x\,dx$. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $K = 2\ln 2 - \dfrac{3}{4}$.

b) Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

Calculer $\mathcal{A}$ puis donner l'arrondi d'ordre 2 du résultat.

Feuille annexe à rendre avec la copie