*R. C. I. - M. E. N. Direction des Examens et Concours * Direction des Examens et Concours * R. C. I. - M. E. N.*

BACCALAUREAT **Coefficient : 4**
SESSION 2010 **Durée : 4 h**

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.

EXERCICE 1

Partie A

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :
(E) : $4z^3 - 6i\sqrt{3}\,z^2 - 3(3 + i\sqrt{3}\,)\,z - 4 = 0$.

1- Déterminer les racines carrées de $6 + 6i\sqrt{3}$.

2- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3}\,)z - 4 = 0$.

3- *a*) Développer, réduire et ordonner $(2z+1)[\,2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3}\,)z - 4]$.

b) En déduire les solutions de (E).

4- Soit $z_0 = -\dfrac{1}{2}$, $z_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

Exprimer chacun des nombres complexes z_0, z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

Partie B

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ où l'unité est 1 cm, on considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives $-\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\sqrt{3}$ et $1 + i\sqrt{3}$.

S est la similitude directe de centre O, d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ et de rapport 2.

1- *a*) Déterminer l'écriture complexe de S.

b) Justifier que $S(M_0) = M_1$ et $S(M_1) = M_2$.

2- Soit M_n un point du plan d'affixe z_n. On pose pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1} = S(M_n)$.
Justifier que $z_{n+1} = (1 - i\sqrt{3}\,)z_n$ où z_{n+1} est l'affixe de M_{n+1}.

3- On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = |\,z_n\,|$.

a) Démontrer que (U_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Justifier que la distance $OM_{12} = 2048$.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 2

On teste un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé. Pour cela, 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant une substance neutre et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie.

Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de 0,8 ; on ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant reçu la substance neutre.

1- Calculer la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament.

2- Démontrer que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est 0,52.

3- On soumet au test un individu pris au hasard.
Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie.

4- On contrôle 5 individus au hasard.
a) Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé.
b) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé.

5- On contrôle n individus pris au hasard. (n est un entier naturel non nul).
Déterminer n pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieur à 0,98.

PROBLÈME

Partie A

Soit la fonction g dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et définie par : $g(x) = 1 + x\ln x$.

1- *a*) Justifier que : $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ g'(x) = 1 + \ln x$.
b) Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.
(On ne calculera pas les limites de g.*)*

2- En déduire que : $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in]0\,;+\infty[,\ f(x) = \dfrac{x}{1 + x\ln x}. \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). *(Unité : 4 cm).*

1- *a*) Étudier la continuité de f en 0.

b) Étudier la dérivabilité de f en 0.

c) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point O est : $y = x$.

d) Démontrer que :

(C) est au-dessus de (T) sur $]0\,;1[$;

(C) est au-dessous de (T) sur $]1\,;+\infty[$.

2- Démontrer que la droite (OI) est une asymptote à (C) en $+\infty$.

3- *a*) On suppose que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Démontrer que : $\forall x \in \,]0\,;+\infty[\,,\ f'(x) = \dfrac{1-x}{(1+x\ln x)^2}$.

b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.

4- Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J).

Partie C

1- *a*) Justifier que : $\forall x \in \,]0\,;+\infty[\,,\ f(x) \leq 1$.

b) Démontrer que : $\forall x \in [1\,;e]\,,\ 1 - \dfrac{1}{1+x} \leq f(x)$.

2- Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Démontrer que : $16(e-1) + 16\ln\left(\dfrac{2}{1+e}\right) \leq A \leq 16(e-1)$.