SECONDAIRE
Tle C
MATHÉMATIQUES

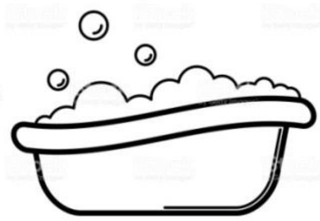
CÔTE D’IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Thème : géométrie du plan

Leçon2 : BARYCENTRE – LIGNES DE NIVEAUX

A. SITUATION D’APPRENTISSAGE

Une baignoire de bébé peut contenir 30 litres d'eau. i
Sur les conseils d'un pédiatre, une jeune maman cherche à la remplir d'eau à 34 °C pour le bain de son bébé. Elle dispose pour cela d'eau froide à 10 °C et doit faire bouillir de l'eau à 100 °C pour faire un mélange afin d’obtenir cette température. Mais elle éprouve des difficultés.
On admet que la température de l'eau est la moyenne des températures de l'eau froide et de l'eau bouillante affectées des coefficients égaux à la quantité d'eau froide et d'eau bouillante.
Elle te sollicite pour trouver une solution à son problème. A ton tour, tu soumets le problème à tes camarades de classe pour déterminer les quantités d'eau froide et d’eau qu’il faut faire bouillir.



B. CONTENU DE LA LEÇON

Dans toute la leçon, $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$ sont n points pondérés, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$.

I. Barycentre de *n* points pondérés

1. propriétés

Propriété et définition

Soit $(A_1, \alpha_1), (A_1, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$, n points pondérés.

Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$, alors il existe un unique point G tel que :

$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$.

Ce point G est appelé barycentre des n points pondérés $(A_1, \alpha_1), (A_1, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$.

Remarques

- Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$, alors le barycentre des n points pondérés $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$, n’existe pas.

propriété

- Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$, alors le barycentre G des n points pondérés $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ est tel que :
  $\overrightarrow{A_1G} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}\overrightarrow{A_1A_2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}\overrightarrow{A_1A_3} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}\overrightarrow{A_1A_n}$
  Dans le cas particulier de deux points pondérés $(A, \alpha); (B, \beta)$, on a : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$.
  Remarque on peut également exprimer le vecteur $\overrightarrow{A_kG}$ pour $k \in \{1; 2; \ldots; n\}$ en fonction des Vecteurs $\overrightarrow{A_kA_i}$ pour $i \in \{1; 2; \ldots; k-1; k+1; \ldots; n\}$

Notations

On note : $G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \ldots, (A_n, \alpha_n)\}$ ou

G = bar

A_1	A_2	…	A_n
α_1	α_2	…	α_n

$(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \ldots, (A_n, \alpha_n)$ se note $(A_i ; \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$

La somme : $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ se note $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

$\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n}$ se note $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{GA_i}$

Exercice de fixation

ABCD est un parallélogramme.

On considère les points pondérés (A ; −1) ; (B ; 1) ; (C ; 1) ; (D ; 4)

1) Justifie que ces points pondérés admettent un barycentre G.

2) Exprime le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Solution

1) On a : $-1 + 1 + 1 + 4 = 5$ et $5 \neq 0$, par suite ces 4 points pondérés admettent un barycentre G.

2) $G = \text{bar}\{(A, -1), (B, 1), (C, 1), (D, 4)\}$

On a :

$-\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + 4\overrightarrow{GD} = \vec{0}$;

$-\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{AD} = \vec{0}$;

$5\,\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - 4\,\overrightarrow{AD}$;

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{5}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 4\,\overrightarrow{AD}\right)$;

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{5}\left(2\overrightarrow{AB} + 5\,\overrightarrow{AD}\right)$, car $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

2. Isobarycentre

Définition

Le barycentre de *n* points pondérés $(A_1, \alpha), (A_2, \alpha), \dots, (A_n, \alpha)$ où $\alpha \neq 0$ est appelé isobarycentre des *n* points $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Remarque

- Si $n = 2$, alors G est le milieu de $[A_1A_2]$.
- Si $n = 3$ et que les points A_1, A_2 et A_3 sont non alignés, alors G est le centre de gravité du triangle $A_1A_2A_3$.
- Si G est l'isobarycentre de $A_1, A_2, \dots, A_n$, alors : $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

Exemple

Dans le parallélogramme ABCD de centre O, le point O est l'isobarycentre des points A, B, C et D car $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

3. Propriétés

a. Homogénéité

Le barycentre des *n* points pondérés ne change pas lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul.

Autrement dit :

Si $k \neq 0$ et $G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$, alors

$G = \text{bar}\{(A_1, k\alpha_1), (A_2, k\alpha_2), \dots, (A_n, k\alpha_n)\}$

<u>Exercice de fixation</u>

A et B sont deux points distincts du plan et G est le point défini par : $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

Détermine parmi les cas suivants ceux pour lesquels le point G est le barycentre :

a) (A, 1) et (B, 2)
b) (A, 2) et (B, 6)
c) (A, -2) et (B, 2)
d) (A, 2) et (B, -3)
e) $\left(A, -\frac{1}{2}\right)$ et $\left(B, -\frac{3}{2}\right)$

Solution :

$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{3+1}\overrightarrow{AB}$; donc G est le barycentre de (A, 1) et (B, 3).

Seuls les cas b) et e) conviennent.

b. Réduction de $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$

Propriété

Soit $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ n points pondérés. Pour tout point M du plan, on a :

- Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MG}$, où G est le barycentre des points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$
- Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, alors : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ est indépendant de M (c'est un vecteur constant).

Exercice de fixation

ABCD est un parallélogramme et M un point quelconque du plan. Réduis les sommes vectorielles suivantes :

1) $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$

2) $4\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$

Solution

1) On a : $3 + 1 + 1 - 2 = 3$ et $3 \neq 0$, donc (A , 3), (B ,1), (C ,1) et (D , –2) ont un barycentre G.
Par suite : $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG}$

2) On a : $4 - 5 + 2 - 1 = 0$, donc $4\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$ est indépendant de M (vecteur constant).

Par suite, en remplaçant M par A dans le vecteur $4\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$, on obtient :

$4\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{5AB} + \overrightarrow{2AC} - \overrightarrow{AD}$.

D'où : $4\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Car : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

c. Coordonnées du barycentre

Propriété

L'espace ξ est muni d'un repère $(O\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$, n points pondérés admettant un barycentre G.

Si (x_i, y_i, z_i) sont les coordonnées du point A_i $(1 \leq i \leq n)$ alors celles (x_G, y_G, z_G) du barycentre G vérifient :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \quad ; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \quad \text{et} \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

Exercice de fixation

Dans l'espace muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0\ ;-1;2)$, $B(8\ ;5;-1)$ et $C(8\ ;-5;-2)$. Soit G le barycentre des points pondérés $(A, -1)$; $(B, 1)$ et $(C, -1)$.
Parmi les triplets de nombres réels ci-dessous, un seul est le triplet de coordonnées de G.
Détermine-le.

a − $(-11\ ;1;2)$ **b** − $(0\ ;-11;1)$ **c** − $(8\ ;5;0)$

Réponse :b car :

$x_G = \frac{-1\times0+1\times8-1\times8}{-1+1-1} = 0.$

d. Barycentre partiel

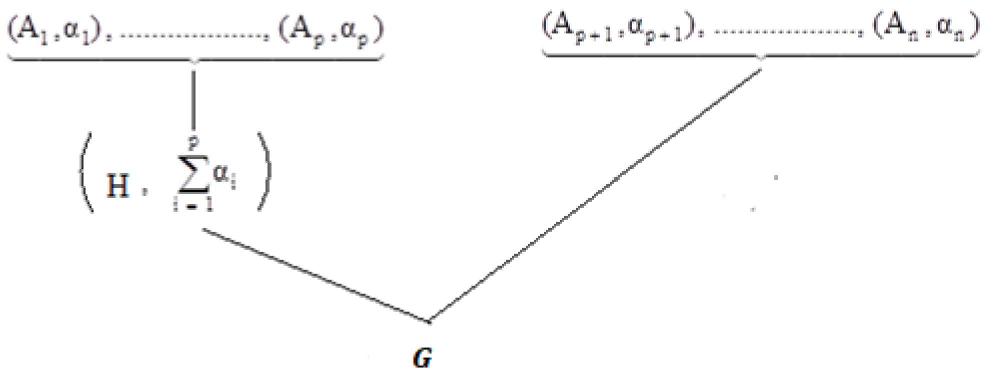
Propriété et définition

On ne change pas le barycentre G de n points pondérés $(n \geq 3)$ en remplaçant p d'entre eux $(1 < p < n)$, dont la somme des coefficients est non nulle, par leur barycentre H affecté de la somme des coefficients de ces p points pondérés.

Le point H est appelé barycentre partiel.

Remarque

$\text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \ldots, (A_n, \alpha_n)\} = \text{bar}\{(H, \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p), (A_{p+1}, \alpha_{p+1}), \ldots, (A_n, \alpha_n)\}$



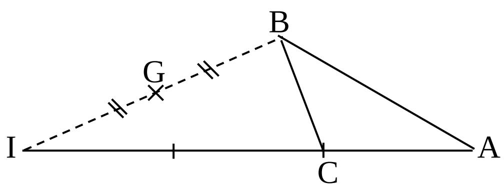
Exercice de fixation

Soit un triangle ABC tel que AB $= 3$ cm et AC $= 2$ cm.
En utilisant la propriété du barycentre partiel, construis le barycentre G des points pondérés $(A\ ;\ -2)$; $(B\ ;\ 1)$ et $(C\ ;3)$.

Solution

On a : $-2 + 3 \neq 0$. Posons : I = bar{(A ;-2),(C ;3)}. D'où: G = bar {(I ;1),(B ;1)}.

On construit I tel que $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AC}$ et G comme milieu de [IB].



II. Lignes de niveau

1. Définition

Soit f une application du plan $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}$ et k un nombre réel.

On appelle ligne de niveau k de f l'ensemble des points M du plan tel que : $f(\mathrm{M}) = k$.

2. Quelques lignes de niveau

a. Ligne de niveau $\mathrm{M} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{MA}_i^2$

Propriété : Réduction de $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{MA}_i^2$

Soit $(\mathrm{A}_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ n points pondérés du plan.

Pour tout point M du plan, on a :

- Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{MA}_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \mathrm{MG}^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{GA}_i^2$ où G est le barycentre des points pondérés $(\mathrm{A}_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$.
- Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, alors : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{MA}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{OA}_i^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{OA}_i}\right) . \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ (O est un point quelconque du plan).

Propriété

Soit k un nombre réel.

Soit f est l'application $\mathrm{M} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{MA}_i^2$.

- Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors la ligne de niveau k de f est : $\emptyset$, $\{ \mathrm{G} \}$ ou un cercle de centre G ; avec $\mathrm{G} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}_1, \alpha_1), (\mathrm{A}_2, \alpha_2), \ldots, (\mathrm{A}_n, \alpha_n)\}$.

- Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, alors la ligne de niveau k de f est :
  - ➢ l'ensemble vide ou le plan si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{OA}_i} = \vec{0}$

➢ une droite de vecteur normal $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$ si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \neq \vec{0}$.

Remarque : dans l'espace,

- Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors la surface de niveau k de f est : $\emptyset$, { G } ou une sphère de centre G ; avec

  G = bar$\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \ldots, (A_n, \alpha_n)\}$

- Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, alors la surface de niveau k de f est :

  ➢ l'ensemble vide ou l'espace si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$

  ➢ un droite de vecteur normal $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$ si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \neq \vec{0}$

Exercice de fixation

A et B sont deux points distincts du plan. Dans chacun des cas suivants, détermine l'ensemble des points M du plan vérifiant la condition :

1. $MA^2 - 2\,MB^2 = 4$ où $AB = 2$;
2. $MA^2 - MB^2 = 16$ où $AB = 4$.

Solution

1. Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - 2\,MB^2 = 4$ où $AB = 2$.

On a : 1-2$\neq 0$. Soit G = bar$\{(A, 1), (B, -2)\}$.

D'où :

$\overrightarrow{AG} = 2\,\overrightarrow{AB}$, soit : $AG^2 = 4\,AB^2$;

$\overrightarrow{BG} = -\overrightarrow{BA}$, soit $BG^2 = BA^2$;

$MA^2 - 2\,MB^2 = -MG^2 + GA^2 - 2\,GB^2$;

On a : $MA^2 - 2\,MB^2 = 4 \Leftrightarrow MG^2 = 4$.

L'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - 2\,MB^2 = 4$ où $AB = 2$ est le cercle de centre G et de rayon 2.

2. Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = 16$ où $AB = 4$.

On a : $1-1 = 0$, donc le barycentre de (A, 1) et (B;-1) n'existe pas.

$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$. Par suite : $MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{BA}.(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$

Soit I le milieu de [AB]. On a :

$MA^2 - MB^2 = 2\,\overrightarrow{MI}\,.\,\overrightarrow{BA}$

$MA^2 - MB^2 = 16 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\,.\,\overrightarrow{AB} = 8.$

Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB). On a : $\overline{IM}\,.\,\overline{AB} = \overline{IH} \times \overline{AB}$.

$MA^2 - MB^2 = 16 \Leftrightarrow \overline{IH} = \frac{8}{\overline{AB}}$. Ce qui équivaut à $\overline{IH} = \frac{8 \times \overline{AB}}{AB^2} = \frac{\overline{AB}}{2}$. D'où H est le point B.

L'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = 16$ où AB = 4 est la droite perpendiculaire à (AB) au point B.

b. Ligne de niveau M $\longmapsto \frac{MA}{MB}$

Propriété

Soit A et B deux ponts distincts du plan, k un nombre réel strictement positif.

- Si $k \neq 1$, alors la ligne de niveau k de l'application : M $\longmapsto \frac{MA}{MB}$ est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$ où G_1 = bar$\{(A\,,1),(B\,,k)\}$ et G_2 = bar$\{(A\,,1),(B\,,-k)\}$
- Si $k = 1$, alors la ligne de niveau 1 de l'application : M $\longmapsto \frac{MA}{MB}$ est la médiatrice du segment [AB].

Remarque

On peut aussi se ramener à la ligne de niveau précédente en écrivant $\frac{MA^2}{MB^2} = k^2$

Exercice de fixation

A et B sont deux points distincts du plan. Détermine puis construis l'ensemble (E) des points M tels que : $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$.

Solution

$\frac{1}{2} \neq 1$, l'ensemble des points M cherché est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$ où

G_1 = bar$\left\{(A\,,1),\left(B\,,\frac{1}{2}\right)\right\}$ et G_2 = bar$\left\{(A\,,1),\left(B\,,-\frac{1}{2}\right)\right\}$

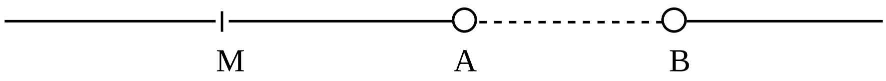
ou bien G_1 = bar$\{(A\,,2),(B\,,1)\}$ et G_2 = bar$\{(A\,,2),(B\,,-1)\}$

c. Ligne de niveau M $\longmapsto$ Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,,\overrightarrow{MB}}\right)$

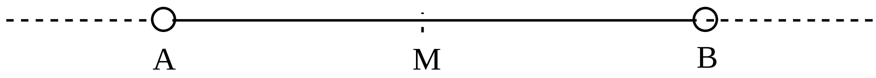
Propriété 1

Soit A et B deux points distincts du plan.

- L'ensemble des points M du plan tel que Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,,\overrightarrow{MB}}\right) = 0$ est la droite (AB) privé du segment [AB]



- L’ensemble des points M du plan tel que Mes $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \pi$ est le segment [AB] privé des points A et B.



Propriété 2

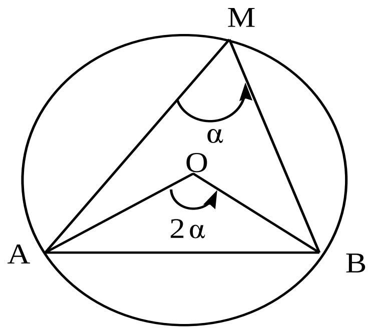
Soit A et B deux points distincts du plan, α un nombre réel de$]-\pi, 0[\ \cup\ ]0, \pi[$.

O est le point de la médiatrice de [AB] tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = 2\,\hat{\alpha}$.

(C) le cercle de centre O passant par A et B.

L’ensemble des points M du plan tel que Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = \alpha$ est un arc du cercle (C) d’extrémités A et B.

M est situé dans le demi-plan de bord (AB) contenant le point O si et seulement si : $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.



<u>**Exercice de fixation**</u>

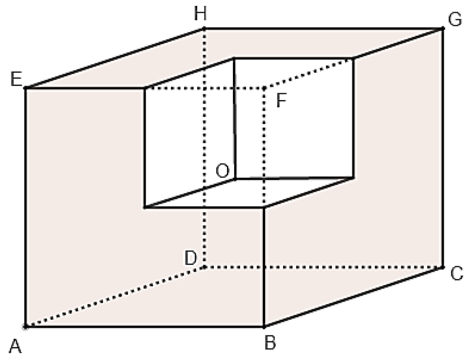
ABC est un triangle rectangle et isocèle en C de sens direct et $(\mathcal{C})$ son cercle circonscrit.
Réponds par vrai $(\mathbf{V})$ ou faux $(\mathbf{F})$ à chacune des affirmations suivantes :

1) L’ensemble des points M du plan tels que Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}}\right) = 0$ est la droite (AB) privée du segment [AB].
2) L’ensemble des points M du plan tels que Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}}\right) = \pi$ est le segment [AB] privée des points A et B
3) L’ensemble de points M du plan tels que Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{2}$ est l’arc $\breve{AB} - \{A; B\}$ contenant C
4) Le point C appartient à la ligne de niveau $\frac{\pi}{4}$ de l’application $M \mapsto$ Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}}\right)$.

Réponse : 1) V ; 2) V ; 3) V ; 4) F

C. SITUATION COMPLEXE

Lors d'une recherche en Physique-Chimie par des élèves de terminale C portant sur l'étude des solides, ils découvrent le solide dont on veut déterminer le centre de gravité. Le solide homogène de forme cubique de centre O est amputé d'une partie comme l'indique la figure ci-contre.
Le coté du petit cube est la moitié de celui du grand cube.
Les élèves savent que le centre de gravité d'un cube homogène est son centre, et qu'il est affecté de la masse de ce dernier. L'un d'eux affirme malgré l'amputation, le centre de gravité n'a pas changé. Ce qui n'est pas de l'avis des autres. Ils te sollicitent.



En utilisant les outils mathématiques au programme, départage les deux groupes.

Solution

- **Pour départager les deux groupes, on va utiliser les barycentres de points pondérés .**
- **Nous allons déterminer la masse du cube retranché**
- **Nous allons déterminer la masse du grand cube.**

Soit a l'arête du grand cube et ρ sa masse volumique.

La masse du petit cube retranché est $\frac{a^3\rho}{8}$ et celle du grand cube évidé est $\frac{7a^3\rho}{8}$, puisque le grand cube est 8 fois plus volumineux que le petit. Les coefficients affectés aux points O et K sont respectivement $\frac{7a^3\rho}{8}$ et $\frac{-a^3\rho}{8}$ (masse retranchée).

On en déduit que G = bar{(O ; $\frac{7a^3\rho}{8}$), (K ; $-\frac{a^3\rho}{8}$)} = bar{(O ; 7), (K ; –1)}

On déduit de ce qui précède que : $\overrightarrow{OG} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{OK} = \frac{1}{12}\overrightarrow{OD}$.

Donc le centre de gravité de ce solide est le point G du segment [OD] tel que : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{12}\overrightarrow{OD}$.

Donc l'affirmation de l'élève n'est pas exacte.

IV- EXERCICES

Exercice 1

ABC est un triangle équilatéral direct de côté 4cm et de centre de gravité K. P milieu de [AB].

Pour chacune des propositions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte. Indique la bonne réponse. (Exemple 6- A)

N°	Propositions	Réponses A	Réponses B	Réponses C
1	{M∈$\mathcal{P}$/$MA^2+MB^2=8$} est	{P}	Un cercle	{ }
2	{M∈$\mathcal{P}$/$MA^2+MB^2+MC^2=0$} est	{K}	Un cercle	{ }
3	{M∈$\mathcal{P}$/Mes($\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}$)=π} est	Un segment	Un arc de cercle	Une demi-droite
4	{M∈$\mathcal{P}$/$MB^2-MC^2=8$} est	Une droite	Un segment	Un cercle
5	{M∈$\mathcal{P}$/$MA^2+MB^2+MC^2=32$} est	{K}	Un cercle	{ }

Solution

1 – A ; 2 – C ; 3 – A ; 4 – A ; 5 – B ;

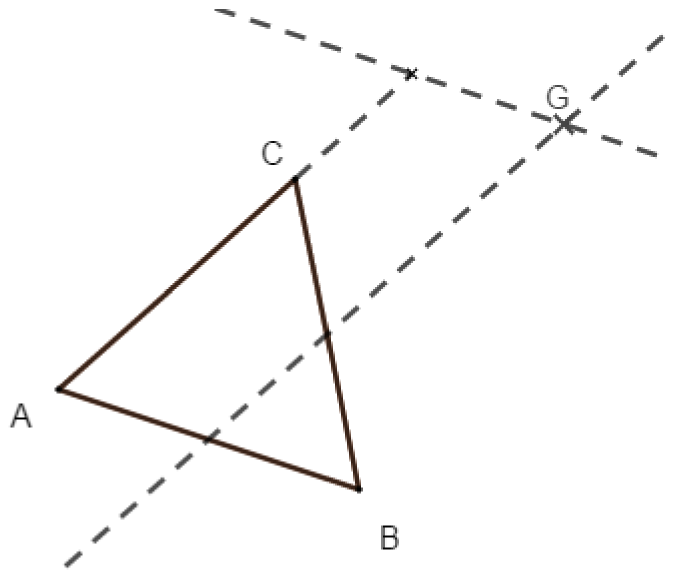
Exercice 2

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 3 et G le barycentre des points pondérés (A, -2); (B ,1) et (C ,3) . Construis le point G

Solution

On a $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Construction de G.



Exercice 3

Soit ABC un triangle et I, J et K les points définis par : I est le milieu de [AB], $\overrightarrow{JC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{JA}$ et

$\overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{BC}$.

1- Exprime I comme barycentre de A et B, J comme barycentre de A et C, et K comme barycentre de B et C.
2- Démontre que les droites (AK), (BJ) et (CI) sont concourantes en G, barycentre de (A;2),(B;2) et (C; −3).

Solution

1) On a : I=bar{(A ; 1), (B ; 1)}, J=bar{(A ; 2), (C ; –3)} et K=bar{(B ; 2), (C ; –3)},
2) Comme G=bar{(A; 2), (B; 2)}, (C; –3)}, d'après la propriété des barycentres partiels, on a :
   - I=bar{(A ; 1), (B ; 1)} entraine G=bar{(I; 4), (C; –3)} donc G∈(CI)
   - J=bar{(A ; 2), (C ; –3)} entraine G=bar{(J; –1), (B; 2)} donc G∈(BJ)
   - K=bar{(B ; 2), (C ; –3)} entraine G=bar{(K; –1), (A; 2)} donc G∈(AK)

   Les droites (AK), (BJ) et (CI) sont donc concourantes en G..

Exercice 4

ABC est un triangle. I est milieu de [AB]. J et L sont définis par : $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AL} = 3\overrightarrow{CA}$. La droite parallèle à (AC) menée par J coupe la droite (BC) en K.

1- a) Exprime I comme barycentre de A et B, et L comme barycentre des points A et C.
   b) Exprime J comme barycentre des points A et B.
2- Exprime K est comme barycentre de B et C.
3- Démontre que les points I, K et L sont alignés et préciser la position de ces trois points

Solution

1- a) On a : I=bar{(A ; 1), (B ; 1)} et L=bar{(A ; 4), (C ; –3)}.
   b) On a : J=bar{(A ; 3), (B ; 2)}
2- Les projetés sur (BC) parallèlement à la droite (AC) des points A, B et J sont respectivement C, B et K. Par conservation de du barycentre par la projection, on a :
   K=bar{(C ; 3), (B ; 2)}
3- On a : $\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AC}$
   Donc $\overrightarrow{IL} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC} = -5\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}\right)$ d'où $\overrightarrow{IL} = -5\overrightarrow{KI}$.
   On en déduit que les points I, K et L sont alignés.

Exercice 5

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.
On considère dans le plan, un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 2a$ et $AC = a$, où a est un nombre réel strictement positif donné.

1- a) Détermine et construis le barycentre G des points pondérés $(A, 1)$, $(B, -1)$ et $(C, 1)$.
   b) Détermine et construis l'ensemble (C) des points M du plan tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$$

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

2- Soit H le point du plan défini par :

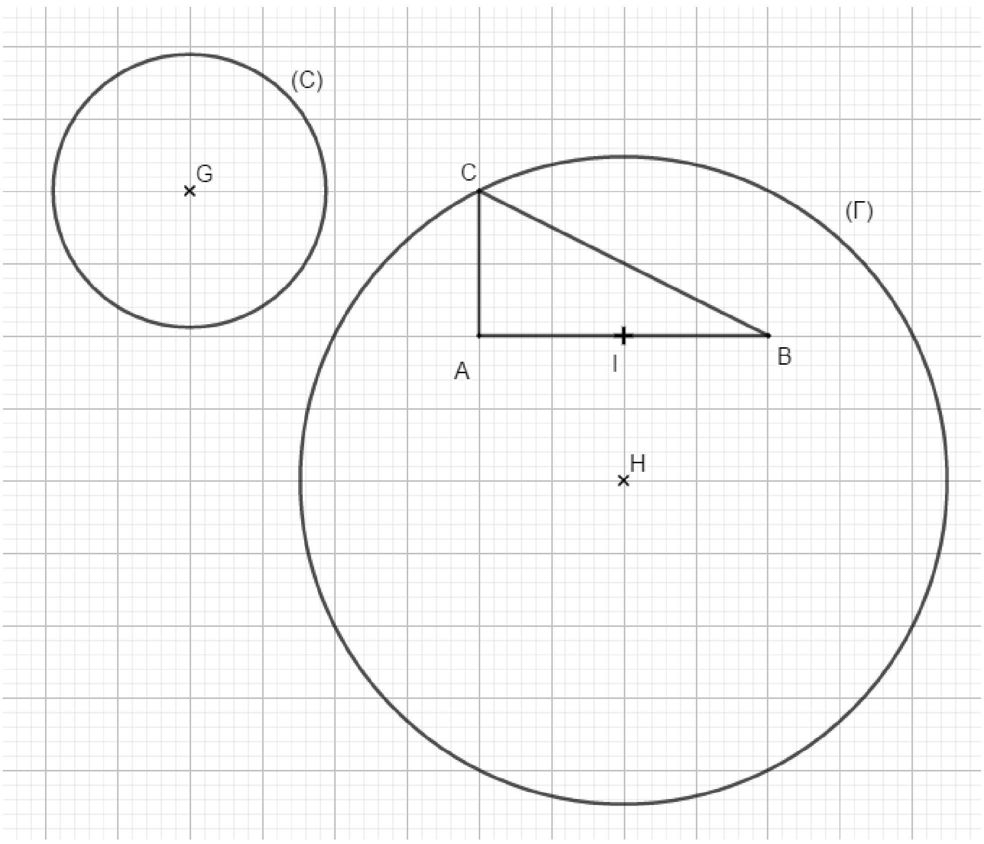
a) Démontre que le point H est le barycentre des points pondérés $(A, 3)$, $(B, 1)$ et $(C, -2)$.

b) Pour tout nombre réel k, on désigne par E_k l'ensemble des points M du plan tels que : $3MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = ka^2$.
Détermine la valeur de k pour laquelle, E_k contient le point C.

c) Détermine et construis l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $3MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 8a^2$.

Solution

1) a) On a : $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
Construction de G



b) $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$ équivaut à 3MG = 2IC où I est le milieu de [AB].

On en déduit que MG = $\frac{2}{3}$ IC. Donc (C) est le cercle de centre G et de rayon $\frac{2}{3}$ IC.

On a $IC^2 = IA^2 + AC^2$ donc IC = a$\sqrt{2}$. (Construction de (C) : voir figure)

2) a) On a : $2\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$, on en déduit que $3\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH} - 2\overrightarrow{CH} = 0$.
Donc H=bar$\{(A; 3), (B; 1), (C; -2)\}$

b) On sait que $3MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 3CA^2 + CB^2 = 8a^2$, donc pour k=8 on a : C∈E_k

c) On a C∈(Γ), donc (Γ) est le cercle de centre H passant par C.

(Construction de (Γ) : voir figure)