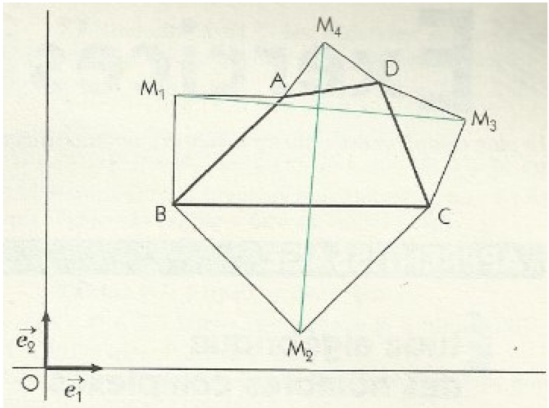
# LEÇON 13 : NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE DU PLAN

## 1. SITUATION D'APPRENTISSAGE




Des élèves d'un lycée ont décoré par différentes figures géométriques les murs de la salle du club Mathématiques.
La figure ci-contre représentant l'une d'elle est constituée d'un quadrilatère ABCD de sens direct et de triangles rectangles isocèles $AM_1B$, $BM_2C$, $CM_3D$ et $DM_4A$ de sommets respectifs $M_1, M_2, M_3$ et $M_4$.
Observant attentivement cette figure, l'un des élèves de la promotion terminale, passionné de nombres complexes et géométrie, affirme que les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ ont des supports perpendiculaires et ont la même longueur. D'autres élèves n'étant pas de cet avis, portent le problème aux autres.
Ceux-ci décident d'effectuer des calculs avec des nombres complexes pour vérifier cette affirmation.

## 2. RESUME DE COURS

## 1. LIGNES DE NIVEAU ET NOMBRES COMPLEXES.

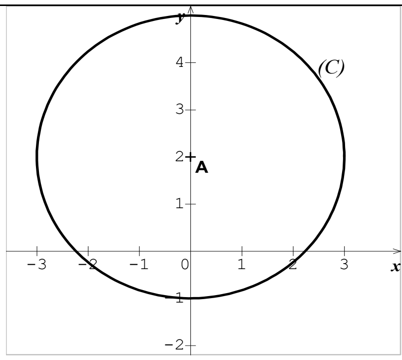
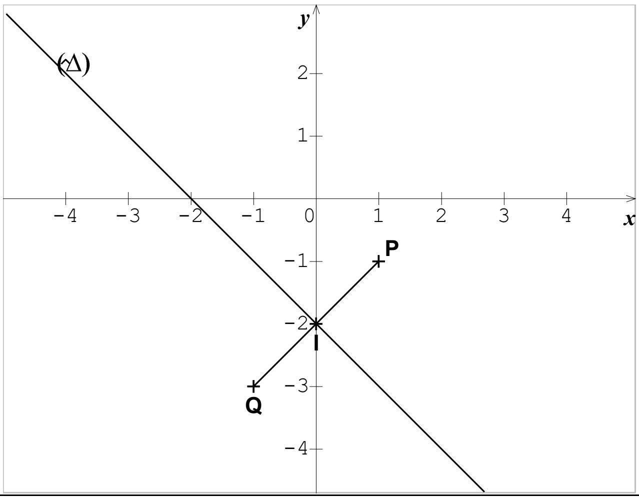
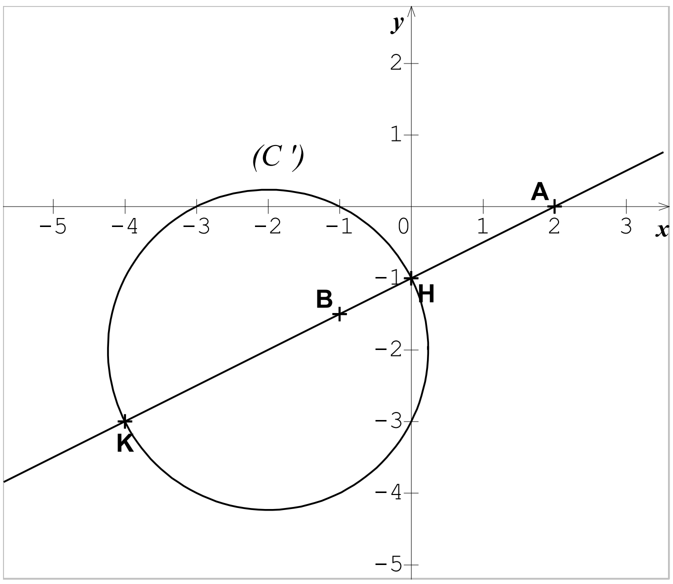
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\overrightarrow{e_1}$ , $\overrightarrow{e_2}$ ).
A et B deux points distincts du plan d'affixes respectives $z_A$ et $z_B$.
M est un point quelconque du plan d'affixe $z$.

| CARACTERISATIONS COMPLEXES | CARACTERISATIONS GEOMETRIQUES | LIGNES DE NIVEAU |
|---|---|---|
| $\lvert z - z_A\rvert = r,\ r \in \mathbb{R}_+^*$ | $AM = r$ | Cercle de centre A et de rayon $r$. |
| $\lvert z - z_A\rvert = \lambda\,\lvert z - z_B\rvert,\ \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ | $AM = \lambda\, BM$<br>Ou bien<br>$\frac{AM}{BM} = \lambda$ | - la médiatrice du segment [AB] lorsque $\lambda = 1$<br>- le cercle de diamètre $[G_1G_2]$ lorsque $\lambda \neq 1$, où<br>$G_1 = $ bar {(A ;1), (B; $\lambda$)} et<br>$G_2 = $ bar {(A ;1), (B;- $\lambda$)} |
| $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) \equiv 0\ [\pi]$ | mes $\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = k\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$ | La droite (AB) privée des points A et B. |
| $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ | mes $\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$ | Le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B. |
| $\arg(z - z_A) \equiv \alpha[\pi]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ | mes$\left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AM}}\right) = \alpha + k\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$ | la droite de repère (A, $\overrightarrow{u}$), privée de A, où mes$\left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u}}\right) = \alpha$ |
| $\mathrm{Arg}(z - z_A) \equiv \alpha[2\pi], \alpha \in \mathbb{R}$ | mes$\left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AM}}\right) = \alpha + 2k\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$ | la demi-droite de repère (A, $\overrightarrow{u}$), privée de A, où mes$\left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u}}\right) = \alpha$ |

**Exercice (10 min)**
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\overrightarrow{u}$ , $\overrightarrow{v}$ ).
Dans chaque cas, détermine et construis l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la condition donnée :

a) $|z - 2i| = 3$
b) $|z - 1 + i| = |z + 1 + 3i|$.
c) $|2iz - 3 + 2i| = |z - 2|$.
d) $\arg(z - 1 - i) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

## Corrigé

| | |
|---|---|
| a) $\lvert z-2i\rvert=3 \Leftrightarrow$ AM $=3$ où A est le point d'affixe 2i.<br>L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifiant :<br>$\lvert z-2i\rvert=3$ est le cercle (C) de centre A de rayon 3. |  |
| b)<br>$\lvert z-1+i\rvert=\lvert z+1+3i\rvert$<br>$\Leftrightarrow \lvert z-(1-i)\rvert=$<br>$\lvert z-(-1-3i)\rvert$<br>$\Leftrightarrow$ PM = QM où P et Q sont les points d'affixes respectives $1-i$ et $-1-3i$.<br><br>L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :<br>$\lvert z-1+i\rvert=\lvert z+1+3i\rvert$ est la médiatrice $(\Delta)$ du segment [PQ]. |  |
| c)<br>$\lvert 2iz-3+2i\rvert=\lvert z-2\rvert$<br>$\Leftrightarrow \left\lvert 2i\left(z+1+\frac{3}{2}\,i\right)\right\rvert=\lvert z-2\rvert$<br>$\Leftrightarrow 2\left\lvert z+1+\frac{3}{2}i\right\rvert=\lvert z-2\rvert$<br>$\Leftrightarrow 2\left\lvert z-(-1-\frac{3}{2}i)\right\rvert=\lvert z-2\rvert$<br>$\Leftrightarrow$ 2 BM = AM où A et B sont les points d'affixes respectives 2 et $-1-\frac{3}{2}i$.<br>$\Leftrightarrow \frac{\text{MA}}{\text{MB}}=2$.<br>On considère les points H et K tels que<br>H = bar {(A ; 1), (B ; 2)} et<br>K = bar {(A ; 1), (B ; - 2)}.<br>L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :<br>$\lvert 2iz-3+2i\rvert=\lvert z-2\rvert$ est le cercle de diamètre [HK]. | On a<br>$z_{\text{H}}=\frac{2+2\left(-1-\frac{3}{2}i\right)}{3}=-1.$<br>et<br>$z_{\text{K}}=\frac{2-2\left(-1-\frac{3}{2}i\right)}{-1}=-4-3i.$<br> |

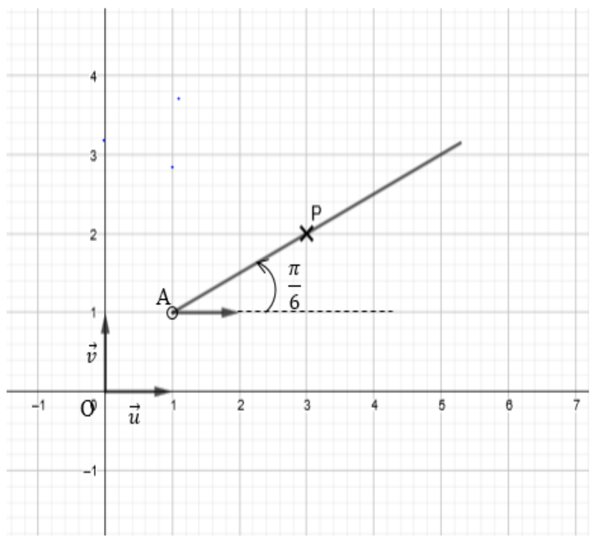
d) $\arg(z-1-i) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg(z-(1+i)) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg(z-z_{\mathrm{A}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$, où A$(1+i)$

$\Leftrightarrow \mathrm{Mes}\left(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{\mathrm{AM}}}\right) = \frac{\pi}{6}$

L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $\arg(z-1-i) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ est la demi-droite [AP) privé du point A, où $\mathrm{Mes}\left(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{\mathrm{AP}}}\right) = \frac{\pi}{6}$.




**Exercice à faire à la maison**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\,)$.

Dans chaque cas, détermine et construis l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la condition donnée :

1) $|z-1+i| = |z+1+3i|$

2) $\arg(z-3+i) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$

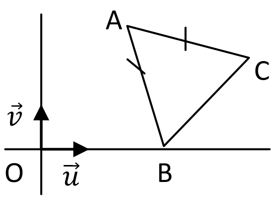
3) $\arg\left(\frac{z-2+i}{z+2}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

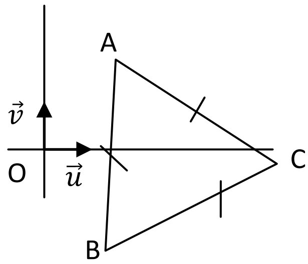
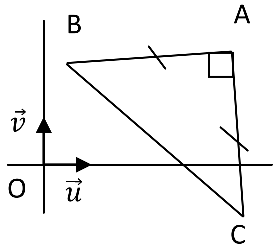
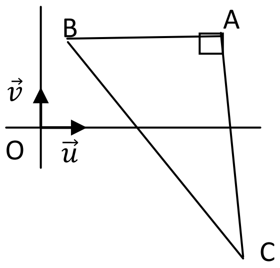
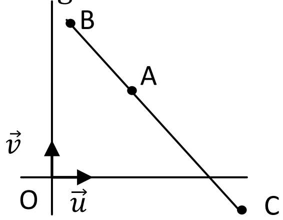
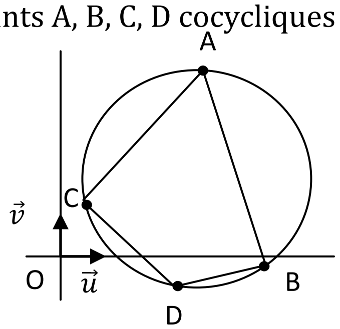
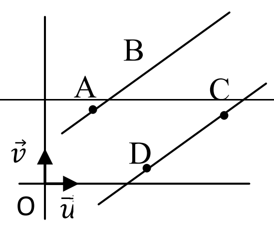
4) $|2iz-2+6i| = 4$;

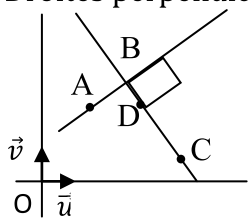
5) $\left|(1-i\sqrt{3})z-2\sqrt{3}+2i\right| = |z-2|$

## 2. CONFIGURATIONS DU PLAN ET NOMBRES COMPLEXES

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\,)$.

| Configurations | Caractérisations géométriques | Caractérisations complexes |
|---|---|---|
| Triangle ABC isocèle en A.   | $AB = AC$ et $\mathrm{mes}\widehat{A} = \alpha$ <br> $(0 < \alpha < \pi)$. | $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ <br> ou <br> $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$ |

| | | |
|---|---|---|
| Triangle ABC équilatéral.<br> | $AB = AC$ et $\text{mes}\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$. | $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$<br>ou<br>$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ |
| Triangle ABC rectangle et isocèle en A.<br> | $AB = AC$ et $\text{mes}\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$. | $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = i$<br>ou<br>$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = -i$ |
| Triangle ABC rectangle en A.<br> | $\text{mes}\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$ | $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = bi$, avec $b \in \mathbb{R}^*$ |
| Points A, B, C alignés.<br> | $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ | $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} \in \mathbb{R}^*$ |
| Points A, B, C, D cocycliques<br> | $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) =$<br>$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right) + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$<br><br>et $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \neq k\pi,$<br>$k \in \mathbb{Z}$ | $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C} : \frac{z_B-z_D}{z_A-z_D} \in \mathbb{R}^*$ |
| Droites parallèles<br> | Il existe un nombre réel $\lambda$ non nul tel que :<br>$\overrightarrow{CD} = \lambda\, \overrightarrow{AB}$.<br>ou | $\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right) = k\pi$ ;<br>$k \in \mathbb{Z}$<br>ou |

| | | |
|---|---|---|
| | $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right) = k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$ | $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$ |
| Droites perpendiculaires   | $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$<br>ou<br>$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ | $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$<br>ou<br>$\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\,\mathbb{R}^*$ |

**Exercice (15 min)**
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\vec{u}\,,\vec{v}\,)$.
On donne les points A, B, C, D et K d'affixes respectives $2 + i$, $2 - i$, $5 - 2i$, $5 + 2i$ et 4.
Justifie que :
1) Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ;
2) Les points J, I et B sont alignés ;
3) Les droites (OK) et (DC) sont perpendiculaires ;
4) Le triangle JBD est rectangle en B ;
5) Les points A, B, C et D sont cocycliques.

**Corrigé**
1) On a : $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{5+2i-(5-2i)}{2-i-(2+i)} = \frac{4i}{-2i} = -2$ .
D'où : $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$ ;
Par suite les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

2) On a : $\frac{z_B - z_I}{z_J - z_I} = \frac{2-i-1}{i-1} = -1$. D'où : $\frac{z_B - z_I}{z_J - z_I} \in \mathbb{R}^*$.
Par suite les points J, I et B sont alignés.

3) On a : $\frac{z_D - z_C}{z_K - z_O} = \frac{5+2i-(5-2i)}{4-1} = \frac{4}{3}\,i$ .
D'où : $\frac{z_D - z_C}{z_K - z_O} \in i\,\mathbb{R}^*$.
Par conséquent les droites (OK) et (DC) sont perpendiculaires.

4) On a : $\frac{z_B - z_D}{z_B - z_J} = \frac{2-i-(5+2i)}{2-i-i} = \frac{-3-3i}{2-2i} = -\frac{3}{2}i$.
D'où : $\frac{z_B - z_D}{z_B - z_J} \in i\,\mathbb{R}^*$.
Par suite le triangle JBD est rectangle en B.

5) On a : $\frac{z_D - z_C}{z_D - z_A} : \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{4i}{3+i} : \frac{-3+i}{-2i} = \frac{-2}{5}$.
D'où : $\frac{z_D - z_C}{z_D - z_A} : \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$.
Par suite les points A, B, C et D sont cocycliques.

Exercice à la maison
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\,)$. L'unité graphique est 2 cm.
1- On donne les points A, B et C d'affixes respectives 2i, $\sqrt{3}$ + i et $\sqrt{3}$ – i.
a) Calcule $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ puis donne le résultat sous forme exponentielle.
b) Déduis-en la nature du triangle ABC.
2-On considère les points E, F et G d'affixes respectives
$-1 + i\sqrt{3}$ ; 2 et $-1 - i\sqrt{3}$
Justifie que le triangle EFG est équilatéral.
3. On considère les points U, V et T d'affixes respectives
$u = i$ ; $v = -2 + 3i$ et $t = -4 + i$.
a. On pose : $Z = \frac{u-v}{t-v}$. Ecris le nombre complexe Z sous forme trigonométrique.
b. Déduis-en que le triangle VUT est rectangle isocèle en V.

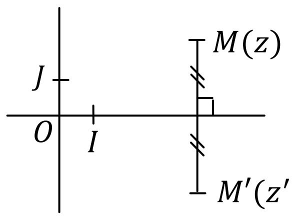
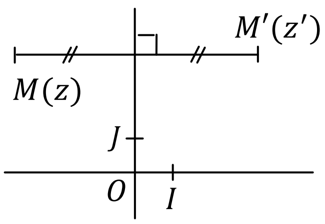
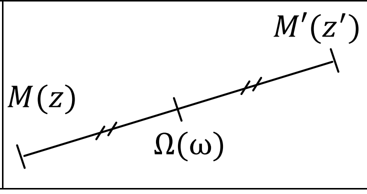
## 3. TRANSFORMATIONS DU PLAN ET NOMBRES COMPLEXES

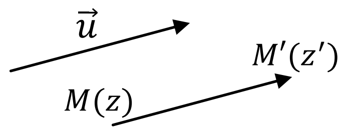
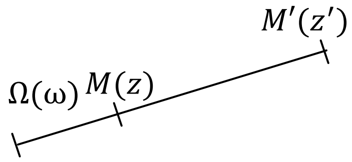
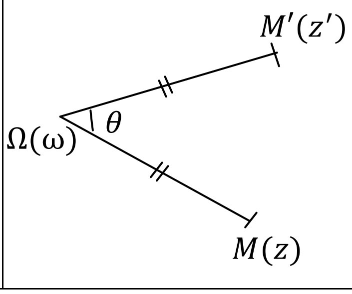
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\overrightarrow{OI}\,,\overrightarrow{OJ}\,)$.

- Une transformation du plan est une application bijective du plan dans le plan.
- Soit $f$ une transformation du plan qui à tout point M associe le point M'.
  L'application $F$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à l'affixe $z$ de M associe l'affixe $z'$ de M' s'appelle la transformation complexe associée à $f$ .
  L'application $f$ s'appelle la transformation ponctuelle associée à $F$.
  L'expression de $z'$ en fonction de $z$ s'appelle l'écriture complexe de $f$.

### 3.1 Ecritures complexes des transformations usuelles

Le tableau suivant donne des transformations du plan et leurs écritures complexes

| Transformation du Plan | Image M′(z′ ) d'un point M(z) | Définition géométrique | Ecriture complexe |
|---|---|---|---|
| Symétrie orthogonale d'axe (OI) |  | La droite (OI) est la médiatrice du segment [MM′] | $z' = \bar{z}$ |
| Symétrie orthogonale d'axe (OJ) |  | La droite (OJ) est la médiatrice du segment [MM′] | $z' = -\bar{z}$ |
| Symétrie centrale de centre Ω(ω) |  | $\overrightarrow{\Omega M'} = -\,\overrightarrow{\Omega M}$ | $z' - \omega = -(z - \omega)$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b |  | $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ | $z' = z + b$ |
| Homothétie de Centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k$ ( $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ) |  | $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ | $z' - \omega = k(z - \omega)$ |
| Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ |  | M$\neq$ Ω $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \end{cases}$ | $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ |

**Exercice (10 min)**
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

1) Détermine l'écriture complexe de l'homothétie h de centre Ω d'affixe $-1 - i$ et de rapport 3.

2) Détermine l'écriture complexe de la translation $t$ de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1 + 4i$.

3) Détermine l'écriture complexe de la rotation $r$ de centre A d'affixe $1 + i$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

**<u>Corrigé</u>**
1) h étant l'homothétie de centre Ω d'affixe $-1 - i$ et de rapport 3, son écriture complexe est : $z' - (-1 - i) = 3(z - (-1 - i))$.
Par suite, l'écriture complexe de l'homothétie h de centre $\Omega(-1 - i)$ et de rapport 3 est :
$z' = 3z + 2 + 2i$.

2) L'écriture complexe de la translation $t$ de vecteur $\vec{u}$ est : $z' = z + z_{\vec{u}}$. Or $z_{\vec{u}} = 1+4i$
L'écriture complexe de la translation $t$ de vecteur $\vec{u}$ est : $z' = z + 1 + 4i$.

3) L'écriture complexe de la rotation $r$ de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est :

$$z' - (1 + i) = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - (1 + i))$$
$$z' = (\frac{-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2})(z - (1 + i)) + 1 + i$$
$$z' = \left(\frac{-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + \frac{3+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

L'écriture complexe de la rotation $r$ de centre A d'affixe $1 + i$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est :

$z' = \left(\frac{-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + \frac{3+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

**Exercices de maison :**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
Détermine l'écriture complexe de la rotation r de centre $\Omega(2i)$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

### 3.2 Reconnaitre une transformation du plan définie par son écriture complexe.

**Propriété**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.
On considère la transformation $f$ d'écriture complexe :
$z' = az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

Transformation $f$ d'écriture complexe
$z' = az + b$
$a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

- $a = 1$
  $f$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $b$
- $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$
  $f$ est l'homothétie de rapport $a$ et de centre $\Omega(\frac{b}{1-a})$
- $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $|a| = 1$
  $f$ est la rotation de centre $\Omega(\frac{b}{1-a})$ et d'angle $\mathrm{Arg}(a)$

**Exercice (10 min)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
Détermine dans chaque cas, la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $f$ du plan définie par son écriture complexe :

a) $z' = 5z + 2i$;

b) $z' = z + 1 + 3i$;

c) $z' = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ;

**Solution**

a) $a = 5$, $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, $f$ est une homothétie de rapport 5.
Déterminons l'affixe $z_0$ de son centre.
$z_0 = \frac{2i}{1-5} = -\frac{1}{2}i$
Donc $f$ est l'homothétie de centre A d'affixe $-\frac{1}{2}i$ et de rapport 5.
b) $a = 1$
D'où, $f$ est la translation de vecteur d'affixe 1+3i.
c) $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i| = 1$. Donc $f$ est une rotation.
- son angle : $\mathrm{Arg}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{\pi}{3}$

- son centre a pour affixe : $\frac{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})} = 1$

D'où, $f$ est la rotation de centre d'affixe 1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

**Exercice à faire à la maison**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
Détermine dans chaque cas, la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $f$ du plan définie par son écriture complexe :

a) $z' = -\frac{1}{2}z + 3 - 6i$.

b) $z' = z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ;

c) $z' = (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

# 3. EXERCICES

## 3-1. Exercices de fixation

Dans tous les exercices, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.

**Exercice 1**
On donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2-2i$ ; $1-i$ et $10+2i$.
Démontre que les points A, B et C sont alignés.

**Exercice 2**
On donne les points A, B et C d'affixes respectives 3 ; $\frac{5+7i}{2}$ et $\frac{-1-i}{2}$.
Démontre que le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

**Exercice 3**
On considère les points A, B, C d'affixes respectives $-4$; $-1+i\sqrt{3}$ et $-1-i\sqrt{3}$.
Démontre que le triangle ABC est équilatéral.

**Exercice 4**
Les points A, B, C, D ont pour affixes respectives $a=2-2\mathrm{i}$, $b=-1+7\mathrm{i}$, $c=4+2\mathrm{i}$ et $d=-4-2\mathrm{i}$.
$\Omega$ désigne le point d'affixe $-1+2\mathrm{i}$.
Démontre que A, B, C, D appartiennent au cercle de centre $\Omega$ et de rayon 5.

**Exercice 5**
On a quatre points A, B, C et D d'affixes respectives 8 ; 8i ; 12 – 32i et 12 + 32i.
Démontre que les points A, B, C et D sont sur un même cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

**Exercice 6**
Détermine dans chacun des cas suivants, l'écriture complexe de la transformation F
1) F est la rotation de centre O, et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2) F est la rotation de centre O, et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
3) F est l'homothétie de centre O, et de rapport $-2$

**Exercice 7**
Détermine l'écriture complexe de la rotation de centre $(1-2i)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

**Exercice 8**
Détermine l'écriture complexe de l'homothétie de centre $\Omega(3+2i)$ et de rapport 4.

**Exercice 9**
Détermine l'écriture complexe de la translation de vecteur d'affixe $1-i$.

**Exercice 10**
Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation du plan F dont l'écriture complexe est donnée dans chacun des cas suivants.
a) $z'=-3z+2-i$
b) $z'=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z-i+1$
c) $z'=z+2-3i$ ;

## 3-2. Exercices de renforcement

Dans tous les exercices, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\overrightarrow{OI}\,,\overrightarrow{OJ}\,)$.

**Exercice11**

Dans le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) d'unité 2 cm, on donne les points A, B et K d'affixes respectives -2i ; 2 et -1.

1) Faire une figure soignée.
2) Démontre que le quadrilatère ABJK est un trapèze isocèle.
3) Justifie que les points A, B, J et K appartiennent à un cercle (C) dont on précisera l'affixe du centre $\Omega$ et le rayon.
4) Détermine et construis l'ensemble des points M d'affixes z vérifiant :

$\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}$

**Exercice 12**

On donne les points A, B et C d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$ telles que :

$a = 1 + \frac{3}{4}i\,;\, b = 2 - \frac{5}{4}i\,;\, c = 3 + \frac{7}{4}i$

1) Place les points A, B et C dans le repère $(O\,;\overrightarrow{OI}\,,\overrightarrow{OJ}\,)$.
2) Détermine la nature du triangle ABC.
3) Calcule l'affixe de A' tel que ABA'C soit un carré.

**Exercice 13**

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :$-1$ ;$3 + 4i$ et $-3 + 4i$ .

a) Détermine l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.
b) Démontre que ABDC est un carré.

**Exercice 14**

Soit A, B et C des points non alignés d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$.

1. Précise la nature du triangle ABC dans chacun des cas suivants :

a) $\frac{c-a}{b-a} = -i$

b) $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

c) $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1$

2. Détermine la position des droites (AC) et (AB) dans chacun des cas suivants :

a) $\frac{c-a}{b-a}$ est un nombre réel.

b) $Arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2}$

**Exercice 15**

Détermine dans chacun des cas suivants, l'écriture complexe de la transformation F qui est la composée de la rotation de centre d'affixe 2i et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de l'homothétie de centre $(1+2i)$ *et* de rapport $\frac{3}{2}$.

**Exercice 16**

Détermine dans chacun des cas suivants, l'écriture complexe de la transformation F qui est la composée de l'homothétie de centre $\Omega(3-i)$ et de rapport $-2$ et de la translation qui applique le point A d'affixe 1-i sur le point B d'affixe 3 +2i.

## 3-3. Exercices d'approfondissement

**Exercice 17**

Soit $f$ l'application de $\mathbb{C} \setminus \{-3\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = \frac{z+1-i}{z+3}$

On désigne par A, B et M les points d'affixes respectives $-3$ ;$-1+i$ et z.

1. Donne une interprétation géométrique du module et d'un argument de $f(z)$.
2. Détermine et construis :

a) l'ensemble ( $C_1$) des points M tels que $|f(z)| = 1$ ;
b) l'ensemble ( $C_2$) des points M tels que $f(z)$ soit un réel strictement négatif ;
c) l'ensemble ( $C_3$) des points M tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

**Exercice 18**

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E) : $z^3 + (4-2i)z^2 + (8-6i)z + 8 - 4i = 0$

1.a) Démontre que (E) admet une solution réelle, que l'on déterminera.
b) Résous l'équation (E)
2. On considère dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives :$-1+3i$ ;$-2$ ; $-1-i$.
Soit $r$ la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega$ d'affixe $i$.

a. Place les points A, B et C.
b. Démontre que le point B est l'image du point A par la rotation $r$.
c. Détermine l'antécédent D du point C par $r$. Place D sur la figure.

3.a. Démontre que les quatre points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
b. Démontre que le quadrilatère ADBC est un trapèze isocèle.

**Exercice 19**

1. Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $4z^2 - 12z + 153 = 0$
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C et P d'affixes respectives $z_A = \frac{3}{2} + 6i$, $z_B = \frac{3}{2} - 6i$, $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$ et $z_P = 3 + 2i$ et le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $-1 + \frac{5}{2}i$.

a) Détermine l'affixe $z_Q$ du point Q, image du point B par la translation de vecteur $\vec{w}$.
b) Détermine l'affixe $z_R$ du point R, image du point P par l'homothétie $h$ de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.
c) Détermine l'affixe $z_S$ du point S, image du point P par la rotation $r$ de centre A et de rapport $-\frac{\pi}{2}$.
d) Place les points P, Q, R et S.

3.a) Démontre que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.
b) Calcule $\frac{z_R-z_Q}{z_P-z_Q}$. Déduis- en la nature du parallélogramme PQRS.
c) Démontre que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

**Exercice 20**
Dans le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) d'unité 2 cm, on donne les points A, B et K d'affixes respectives -2i ; 2 et -1.
1. Fais une figure soignée.
2. Démontre que le quadrilatère ABJK est un trapèze isocèle.
3. Justifie que les points A, B, J et K appartiennent à un cercle (C) dont on précisera l'affixe du centre Ω et le rayon.
4. Détermine et construis l'ensemble des points M d'affixes z vérifiant :
$\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$.

**Exercice 21**
Dans le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J)
Soit F le point du plan d'affixe $1 - \mathrm{i}$
1) Détermine l'affixe de l'image de F par la symétrie par rapport à (OI).
2) Détermine l'affixe de l'image de F par la symétrie par rapport à (OJ).
3) Détermine l'affixe de l'image de F par la symétrie par rapport à O.
4) Détermine l'affixe de l'image de F par la symétrie par rapport au point B d'affixe $1 + \mathrm{i}$ .

**Exercice 22**
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\vec{u}\ ,\vec{v}\ )$ (unité : 4 cm)
Soit A le point d'affixe $z_A = i$ et B le point d'affixe $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$
1. Soit $r$ la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.on appelle C l'image de B par $r$.
  a. Détermine l'écriture complexe de $r$.
  b. Justifie que l'affixe de C est $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$
  c. Construis les points A, B et C dans le repère.
2 Soit D le point d'affixe $\frac{\sqrt{3}}{2} + i\ \frac{1}{2}$
Justifie que A, B, C, D sont sur un même cercle $(\mathcal{C})$.

3. Soit $h$ l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par $h$.
  a. Détermine l'écriture complexe de $h$.
  b. Justifie que l'affixe de E est$z_E = \sqrt{3}$ . Construis le point E.

4. a Calcule le rapport $\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}$ .On écrira le résultat sous la forme exponentielle.
  b. Détermine la nature du triangle CDE.

**Exercice 23**
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J).
(On prendra pour unité 2ccm).
Soient les points A $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\frac{1}{2}\right)$, B $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\frac{1}{2}\right)$ et C $(0\ ;-1)$.
On considère la rotation $r$ de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.
Soit M un point quelconque d'affixe z et M'le point tel que M'= $r$(M).
1. Détermine l'écriture complexe de $r$.

2. Justifie que : $r(\mathrm{A}) = \mathrm{J}$.
3. Calcule les affixes des points E et F tels que $r$(B)=E et $r$(F)=C.

**Exercice 24**
Le plan complexe est muni du repère orthonormé (O, I, J). Unité : 2cm.
Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A$= -1, $z_B$= 1+2$i$ et $z_C$= 4+5$i$.
1) a) Fais une figure.
b) Détermine le nombre complexe $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ .
c) En déduis que les points A, B et C sont alignés.

2) Soit E et D les symétriques respectifs de C et B par rapport à la droite (OI).
a) Place les points E et D.
b) Justifie que les points B, C, D et E appartiennent à un même cercle ($\mathcal{C}$) dont on précisera le centre et le rayon.

3) On considère l'homothétie h de centre A qui transforme C en B.
Soit ($\mathcal{C}$') l'image du cercle ($\mathcal{C}$) par h
a) Détermine l'écriture complexe de h.
b) Calcule l'affixe du centre de ($\mathcal{C}$')
c) Construis ($\mathcal{C}$')

**Exercice 25**
Le plan complexe est muni du repère orthonormé (O, I, J).
A, B et D sont les points d'affixes respectives $-1 + 3i$ ; $-2$ et $2 + 2i$
Soit $r$ la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre le point J d'affixe $i$.
1- a) Fais une figure.
b) Démontre que l'écriture complexe de $r$ est : $z' = i\,z + 1 + i$

2- a) Justifie que B est l'image du point A par la rotation $r$.
b) Justifie que D est l'antécédent du point A par $r$.

3- Soit C l'image du point A par la symétrie centrale de centre J.
a) Calcule l'affixe du point C.
b) Démontre que le quadrilatère ABCD est un carré.

**Exercice 26**
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$ , $\vec{v}$ ) .
L'unité graphique est : 2 cm.
Soit M un point du plan d'affixe z. On pose : z = $x + y\,i$ , $x$ et $y$ sont des nombres réels.
On note H le point du plan d'affixe $x + 3\,i$ .
Soit (Γ) l'ensemble des points M tels que : $2|z| = |y - 3|$ .
1. Démontre que : M ∈ (Γ) $\Leftrightarrow$ $\frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{MH}} = \frac{1}{2}$
2. Justifie que (Γ) est une ellipse dont on précisera l'excentricité, un foyer et une directrice.

**Exercice 27**
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$ , $\vec{v}$ ) .

On note f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{-iz-2}{z+1}$
On désigne par A et B les points d'affixes respectives 2i et -1. On se propose de rechercher l'ensemble (E) des points M tels que M'appartient à l'axe des abscisses, privé de O.
1- Démontre que :
$\forall\, z \neq 1,\ z' = -i\omega$ où $\omega = \frac{z-2i}{z+1}$
2- Donne une interprétation géométrique d'un argument de ω, lorsque $z \neq 2i$.
3- Exprime : arg(z') en fonction de arg(ω).
4- Déduis de ce qui précède l'ensemble (E).

## Exercice 28

Soit A et B les points d'affixes respectives 1 et 2i.
A tout nombre complexe z distinct de 2i, on associe le nombre complexe z tel que :
$z = \frac{z-1}{z-2i}$
1. Détermine l'ensemble ($C_1$) des points M d'affixe z tel que : $\mathrm{Arg}(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$
2. Détermine l'ensemble ($C_2$) des points M d'affixe z tels que $|z| = 2$.
3. Démontre que ($C_1$) et ($C_2$) ont un unique point commun dont on précisera l'affixe.

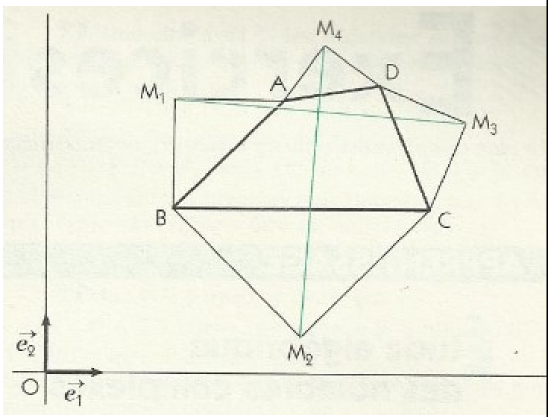
## Exercice 29

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit A, B et C les points d'affixes respectives a, b, c et d tel que : a = -1 +i, b = -1 – i
c = 2i et d = 2 – 2i
On note G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, -1) et (C, 1).
1. Détermine l'affixe du point G, puis place le dans le plan muni du repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
2. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\left\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$$
a) Vérifie que B appartient à (Γ)
b) Détermine et construis (Γ).
3. Démontre que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

## 4. SITUATIONS D'EVALUATION

**Exercice 30**

Des élèves d'un lycée ont décoré par différentes figures géométriques les murs de la salle du club Mathématiques.
La figure ci-contre représentant l'une d'elle est constituée d'un quadrilatère ABCD de sens direct et de triangles rectangles isocèles $AM_1B$, $BM_2C$, $CM_3D$ et $DM_4A$ de sommets respectifs $M_1, M_2, M_3$ et $M_4$.
Observant attentivement cette figure, l'un des élèves de la promotion terminale, passionné de nombres complexes et géométrie, affirme que les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ ont des supports perpendiculaires et ont la même longueur.
Démontre en utilisant les nombres complexes que l'affirmation de cet élève est correcte




**Exercice 31 (Situation complexe 2)**

Lors de la préparation d'un exposé en géométrie, un groupe d'élèves d'une classe de terminale découvre l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$, $2z^2 + 2z + 1 = 0$. Ils veulent avoir des informations sur cette équation.
Après réflexion, un élève de ce groupe affirme que si l'on note $a$ la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive, les nombres $a$, $a^2$et $a^3$ seront les affixes des sommets d'un triangle équilatéral. Sa voisine de classe ne partage pas cet avis.
Ayant suivi la discussion, tu décides de les départager.
Dis, en argumentant, lequel des deux élèves a raison.