MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE L'ALPHABETISATION

MENET - FP

INISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT TECHN
ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE
2nde C
MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 12 heures Code :

Compétence 1
Traiter une situation relative aux calculs algébriques et aux fonctions

Thème2 : Fonctions

Leçon 13 : ETUDE DE FONCTIONS ELELENTAIRES

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un projectile est lancé à un point du sol au sommet d'une montagne par un dispositif construit à cet effet.

Le professeur de mathématique qui a assisté à l'expérience informe que l'attitude du projectile, en mètres, repérée par rapport au niveau de l'eau en bas de la montagne, est exprimé en fonction du temps écoulé, en seconde, depuis son départ par : $h(t) = -40t^2$.

Un élève curieux qui a bien écouté le professeur veut connaître, la hauteur de la montagne, l'altitude maximum du projectile et le temps au bout duquel le projectile atteindra l'eau.

Les élèves qui partagent cette curiosité décident d'étudier la fonction h et de la représenter.

B- CONTENU DE LA LECON

I. Fonction affine par intervalles

Définition

Une fonction est dite affine par intervalles si elle est définie sur un ou plusieurs intervalles disjoints par restrictions de fonctions affines à ces intervalles.

Exemple

On considère les fonctions $f; g; h; i; j; k; l; m\ et\ n$ définies de $\mathbb{R}\ vers\ \mathbb{R}$ par :

$\begin{cases} f(x) = 3x - 2\,, si\ x \leq 4 \\ f(x) = 1 - x\,, si\ x > 4 \end{cases}$; $\begin{cases} m(x) = x + 8\,, si\ x \leq -5 \\ m(x) = 3\,, -5 \leq x \leq 5 \\ m(x) = 2x - 7\,, si\ x > 5 \end{cases}$

$\begin{cases} g(x) = x^2 + 3\,, si\ x \leq 0 \\ g(x) = 5x + 7\,, si\ x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} l(x) = x + 13\,, si\ x < 1 \\ l(x) = \sqrt{x}\,,\ si\ x \geq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} h(x) = 2020\,, si\ x \leq -2 \\ h(x) = -9x\,, si\ x > -2 \end{cases}$; $i(x) = |7x + 11|$; $j(x) = -4x + 1$

$k(x) = x^2 - 11$;

$\begin{cases} n(x) = -x - 2\,, si\ x < \frac{5}{4} \\ n(x) = 6x + 1\,, si\ x \geq \frac{5}{4} \end{cases}$

Parmi ces fonctions, les fonctions affines par intervalles sont : f ; h ; i ; m et n.

Remarque

La représentation graphique d'une fonction affine par intervalles est une réunion de segments ou de demi- droites.

1. Fonction partie entière

Définition et notation

La *partie entière* d'un nombre réel est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à ce nombre
La partie entière d'un nombre x est notée *E(x)*.

Propriété

Quelque soit le nombre réel x, il existe un unique nombre entier relatif z tel que :

$z \leq x < z + 1$

Exercice de fixation

Détermine la partie entière des nombres suivants : 7,8 ; $-4{,}02$; 9 et 31,365.

SOLUTION

$7 \leq 7{,}8 \leq 8$ donc $E(7{,}8) = 7$

$-5 \leq -4{,}02 < -4$ donc $E(-4{,}02) = -5$

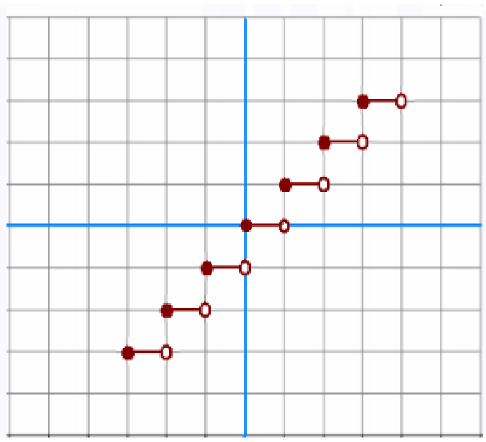
$9 \leq 9 < 10$ donc $E(9) = 9$

$31 \leq 31{,}365 < 32$ donc $E(31{,}365) = 31$

Remarque

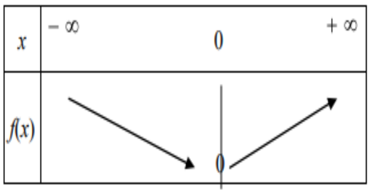
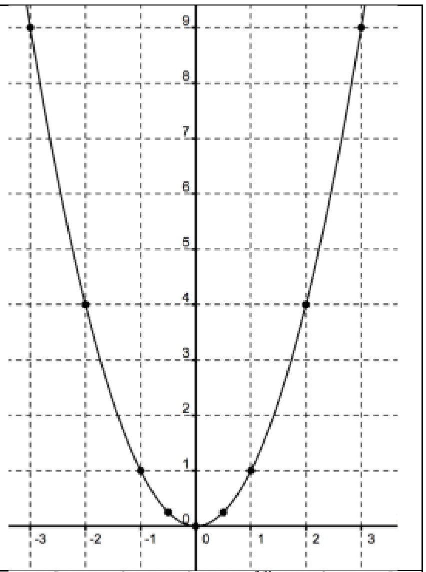
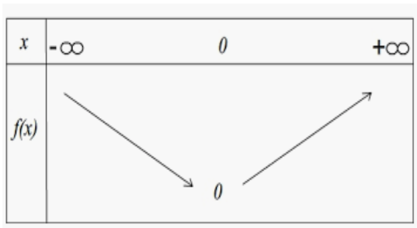
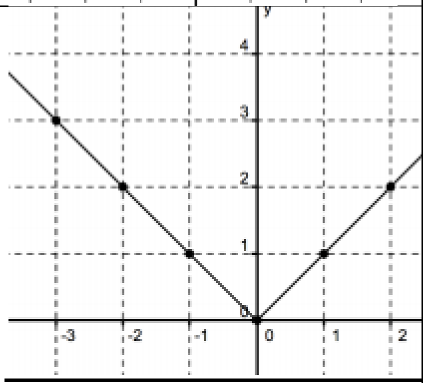
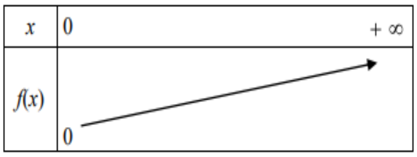
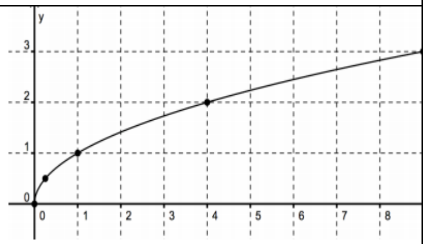
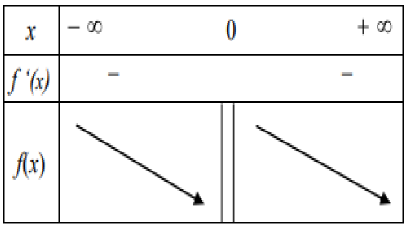
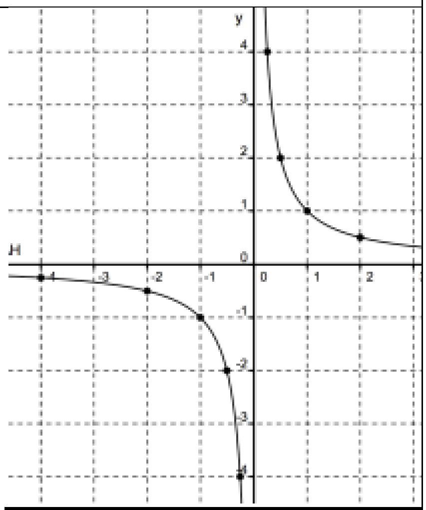
L'application $\begin{aligned} E : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto E(x) \end{aligned}$

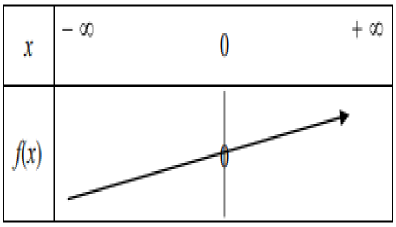
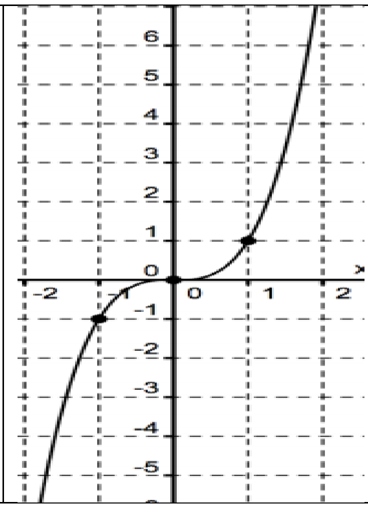
La représentation graphique de la fonction partie entier.



2. Etude de quelques fonctions élémentaires

Fonctions	Ensemble de définition	Sens de variation et tableau de variation.	Représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé

$\boldsymbol{x \mapsto x^2}$	$\mathbb{R}$	•f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ • f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ Tableau de variation : 	
$\boldsymbol{x \mapsto \lvert x \rvert}$	$\mathbb{R}$	• f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ • f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ 	
$\boldsymbol{x \mapsto \sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+$ ou $[\mathbf{0}; +\infty[$	f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ Tableau de variation : 	
$\boldsymbol{x \mapsto \frac{1}{x}}$	$]-\infty; \mathbf{0}[\cup]\mathbf{0}; +\infty[$ **Ou** $\mathbb{R}^*$	•f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ • f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ 	

$x \mapsto x^3$	$\mathbb{R}$	f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Tableau de variation : 	

C - Situation complexe

Mlle Moya, élève en classe de seconde, veut choisir un abonnement pour son téléphone portable. Les formules suivantes sont proposées :

	Forfait pour deux heures de connections	Supplément par minute de dépassement
Formule 1	300 F CFA	25 F CFA
Formule 2	150 F CFA	75 F CFA

Moya sait qu'elle va dépasser les deux heures de connection, et voudrait savoir quelle est la formule la plus intéressante en fonction du nombre x de minutes de dépassement.

Pour le mois prochain, Moya estime qu'elle va se connecter pendant 153 minutes. Elle te sollicite pour l'aider à choisir.

Détermine la formule qu'elle devra choisir. Justifie ta réponse.

SOLUTION

Pour résoudre cet exercice, je vais utiliser les fonctions élémentaires.

- Je vais faire la mise en équation des deux formules proposées.
- Je vais déterminer le nombre de minutes qui reste dans les 153 min après y avoir retrancher deux (2) heures.
- Je vais remplacer x dans chaque équation par le nombre de minutes trouver.
- Je vais comparer les différents couts par formule afin de faire le meilleur choix pour Mlle Moya.
    - Mise en équation de la formule 1 :

$$300 + 25x$$

    - Mise en équation de la formule 2 :

$$150 + 75x$$

On a : $2h = 120\ min$, alors en retranchant les 120min des 153, on obtient : 153-120=33 min.

En remplaçant le x par 33 dans :

- La formule 1, on obtient : $300 + 25 \times 33 = 1125$
- La formule 2, on obtient : $150 + 75 \times 33 = 2625$

$2625 > 1125$, alors la meilleure formule pour Mlle Moya est **la formule 1.**

D- EXERCICES

Exercices d'application

Exercice 1

f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |3x - 6|$

1) Détermine l'ensemble de définition de f
2) Justifie que f est une fonction affine par intervalle
3) Représente graphiquement la fonction f.

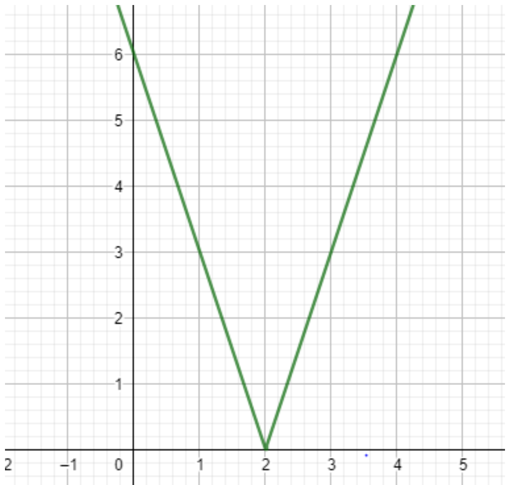
SOLUTION

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $3x - 6\ existe\ alors\ |3x - 6| existe$,donc $D_f = \mathbb{R}$.
2) $3x - 6 = 0 \rightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x - 6$	-	0	+
$\|3x - 6\|$	$-3x + 6$	0	$3x - 6$

on a donc : $f(x) = \begin{cases} -3x + 6 & pour\ x\ \in]-\infty; 2] \\ 3x - 6 & pour\ x \in [2; +\infty[\end{cases}$; alors f est une fonction affine par intervalle.

3) Représentation graphique



Exercice 2

On donne la fonction numérique : $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto x^3$$

1) Donne le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2) Dresse le tableau de variation de f
3) Trace la courbe représentative de la fonction f sur $[-2\,;2]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$.

SOLUTION

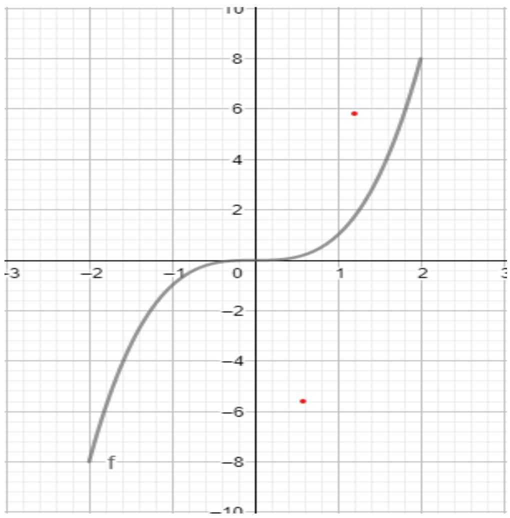
On donne la fonction numérique : $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto x^3$$

1) $f(x) = x^3$ alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		↗	

3) Représentation graphique



Exercice de renforcement

Exercice 3

Soit la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} pour\ x\ \in\ ]-\infty\,;0]\,, f(x) = -x-5 \\ pour\ x\ \in\ ]0\,;2[\,, f(x) = \dfrac{3}{2}x+1 \\ pour\ x\ \in\ [2\,;\,+\infty[\,; f(x) = x-5 \end{cases}$$

1) Détermine l'ensemble de définition de f.
2) Calcule $f(3); f(-5) et\ f(0)$
3) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$
4) Représente graphiquement la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;I\,;J)$.

SOLUTION

1) L'ensemble de définition de f est : $]-\infty\,;0] \cup]0\,;2[\cup [2\,;\,+\infty[= \mathbb{R}$
2) $3\ \in\ [2\,;\,+\infty[$; alors $f(3) = 3-5 = -2$
   $5\ \in]-\infty\,;0]$; alors $f(-5) = -(-5)-5 = 0$
   $0\ \in]-\infty\,;0]$; alors $f(0) = -0-5 = -5$
3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$
   - $pour\ x\ \in]-\infty\,;0]\,, f(x) = 0 \to -x-5 = 0; \quad x = -5$
   - $pour\ x\ \in\ ]0\,;2[\,, f(x) = 0 \to \frac{3}{2}x+1 = 0 \ ; \quad x = -\frac{2}{3}$

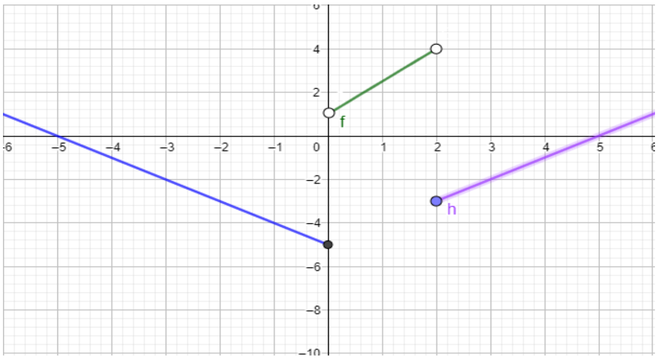
   $-\frac{2}{3} \notin]0\,;2[$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-\infty\,;0]$.
   - $pour\ x\ \in\ [2\,;\,+\infty[\,; f(x) = 0 \to x-5 = 0 \quad ; x = 5$

$pour\ x \in]-\infty\,;0]\,, l'équation\ f(x) = 0\ a\ pour\ solution -5$

$pour\ x \in]0\,;2[\,, l'équation\ f(x) = 0\ n'admet\ pas\ de\ solution$

$pour\ x \in [2\,;\ +\infty[\,;\ l'équation\ f(x) = 0\ a\ pour\ solution\ 5.$

4) Représentation graphique



Exercice 4

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} Pour\ x \in [-6\,;\ -4], f(x) = 3x+8 \\ Pour\ x \in]-4\,;\ 3[, f(x) = -\frac{8}{7}x + \frac{10}{7} \\ Pour\ x \in [3\,;4], f(x) = -1 \\ Pour\ x \in]4\,;8]\,, f(x) = 2{,}5x - 12 \end{cases}$$

1) Calcule l'image par f de chacun des nombres réels : $-5\,;0\,;3\,;7$
2) a- Etudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.
   b- Trace la courbe représentative (Cf) de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; I; J)$.
3) Utilise (Cf) pour résoudre chacune des équations suivantes :

$f(x) = -3\,;\ \ f(x) = -1\ \ ; f(x) = 0\ \ ; f(x) = 6\,; f(x) = 7$

SOLUTION

1)
- $-5 \in [-6\,;\ -4], alors\ f(5) = 3(-5) + 8 = -7$
- $0 \in]-4\,;\ 3[, alors\ \ f(0) = -\frac{8}{7} \times 0 + \frac{10}{7} = \frac{10}{7}$
- $3 \in [3\,;4], alors\ \ f(3) = -1$
- $7 \in]4\,;8]\,, f(7) = 2{,}5 \times 7 - 12 = 5{,}5$

2) a- <u>sens de variation</u>
- $Pour\ x \in [-6\,;-4], f(x) = 3x + 8\ ;\ \ 3 > 0$ alors $f$est strictement croissante sur $[-6\,;\ -4]$
- $Pour\ x \in]-4\,;\ 3[, f(x) = -\frac{8}{7}x + \frac{10}{7}\ \ ;\ -\frac{8}{7} < 0$, alors $f$est strictement décroissante sur $]-4\,;\ 3[$.
- $Pour\ x \in [3\,;4], f(x) = -1$, alors f est constante sur $]-4\,;\ 3[$
- $Pour\ x \in]4\,;8]\,, f(x) = 2{,}5x - 12;\ \ \ \ 2{,}5 > 0$, alors $f$est strictement croissante sur $]4; 8]$.

Tableau de variation

x	-6		-4		3		4		8
$f(x)$	-10	↗	-4	↘	-1	→	-1	↗	8

b- représentation graphique

3) Utilisons (Cf) pour résoudre chacune des équations suivantes :

$f(x) = -3$; $f(x) = -1$; $f(x) = 0$; $f(x) = 6$; $f(x) = 7$