CÔTE D’IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

MINISTÈRE DE L’EDUCATION NATIONALE ET DE L’ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D’IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ECOLE A LA MAISON

2^{nde} C
MATHEMATIQUES

CÔTE D’IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 06 heures Code :

COMPETENCE 3 : **Traiter une situation relative à la géométrie du plan, à la géométrie de l’espace et aux transformations de plan.**

THEME 1 : **Géométrie du plan**

Leçon :12 **HOMOTHETIE**

A. - SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pendant le cours d'arts plastiques, un professeur demande à ses élèves d'une classe de 2nd C d'agrandir une image en respectant les proportions. Ne sachant pas comment procéder, ils sollicitent leurs ainés de la 1ère C qui leurs demandes de faire des cherches sur les homothéties.

B. - RESUME DE COURS

I. Définition et premières propriétés

1. Définition

Soit Ω un point du plan et k un nombre réel non nul.

On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k, l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M du plan associe le point M'du plan tel que : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

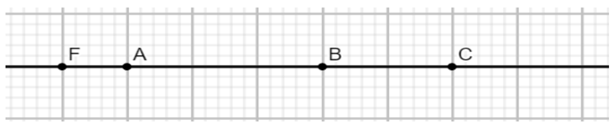
- **Notation**

L'homothétie de centre Ω et de rapport k se note : $h_{(\Omega;k)}$, ainsi :

$h_{(\Omega;k)}(M) = M' \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

Exemple

On considère la figure suivante :



- $\overrightarrow{FB} = 4\overrightarrow{FA}$ donc $h_{(F;4)}(A) = B$
- $\overrightarrow{BF} = -2\overrightarrow{BC}$ donc $h_{(B;-2)}(C) = F$

- **Cas particuliers**

- L'homothétie de rapport 1 est l'application identique du plan.
- L'homothétie de centre O et de rapport -1 est la symétrie centrale de centre O.

2. Conséquence de la définition

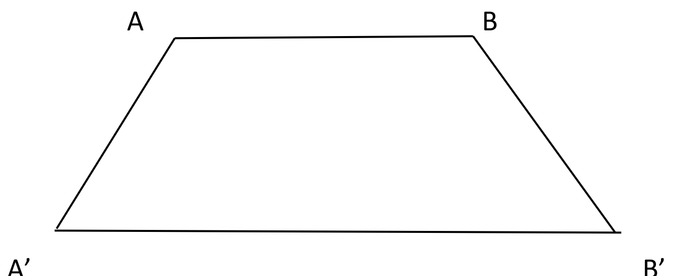
Propriété

Si M'est l'image de M par une homothétie de centre O, alors les points O, M et M'sont alignés.

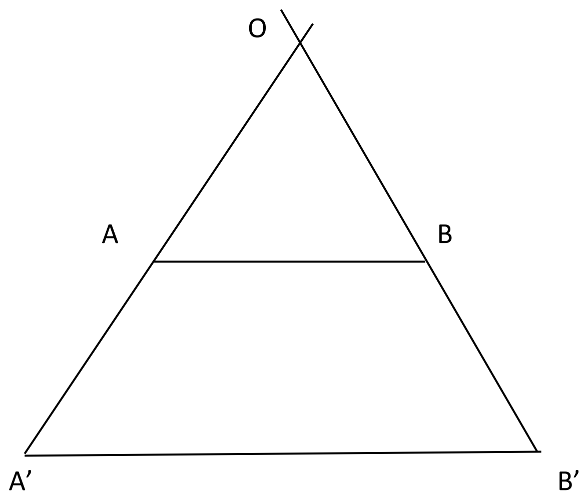
Exercice de fixation.

Sur la figure ci – dessous, ABB'A' est un trapèze de petite base [AB]. On admet qu'il existe une homothétie h qui transforme A en A' et B en B'.

Construis le centre O de cette homothétie.



Solution
- Comme l'homothétie h transforme A en A' alors son centre O et les points A et A' sont alignés donc O appartient à la droite (AA').
- Comme l'homothétie h transforme B en B' alors son centre O et les points B et B' sont alignés donc O appartient à la droite (BB').
O est donc le point d'intersection des droites (AA') et (BB')



3. Point invariant

Propriété

Toute homothétie de rapport différent de 1 a un seul point invariant : c'est son centre.

Exercice de fixation

Soit I, J et K trois points alignés du plan et h l'homothétie de centre I qui transforme J en K.
Réponds par Vrai ou par Faux à chacune des affirmations suivantes.
1) h(J) = J 2) h (I) = I 3) h (K) = K

Solution

1) Faux
2) vrai
3) Faux

4. Propriété fondamentale

Propriété

Si M et N sont deux points distincts d'images respectives M' et N' par une homothétie de rapport k, alors $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$

<u>Exercice de fixation</u>

Soit h une homothétie de centre Ω et de rapport -2.
On donne : h (E) = F et h (S) = T
Réponds par Vrai ou par Faux à chacune des affirmations suivantes :

a) $\overrightarrow{\Omega E} = -2\,\overrightarrow{\Omega S}$ b) $\overrightarrow{TF} = -2\overrightarrow{SE}$; c) $\overrightarrow{ES} = -2\overrightarrow{FT}$; d) $\overrightarrow{FT} = -2\overrightarrow{ES}$

<u>Solution</u>

a) Faux ; b) vrai ; c) Faux ; d) Vrai.

II. Images de figures simples

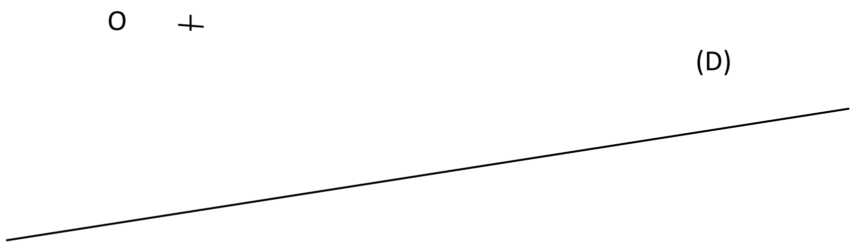
1. Image d'une droite, d'une demie droite

<u>Propriété</u>

- L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.
- L'image d'une demi-droite par une homothétie est une demie droite.

Exercice de fixation

Dans la figure ci – dessous, (D) est une droite du plan et O est un point donné du plan n'appartenant pas à la droite (D). Construis l'image de la droite (D) par l'homothétie h de centre O et de rapport $\frac{3}{2}$.

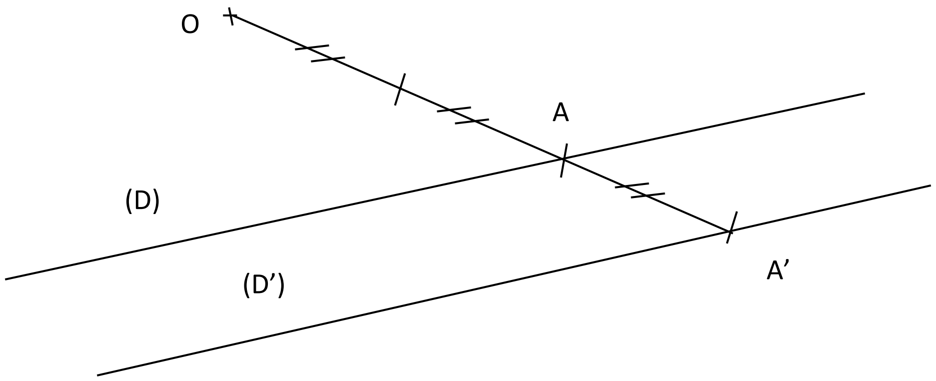


Solution

Soit A un point de la droite (D) et A' son image par l'homothétie h de centre O et de rapport $\frac{3}{2}$.

On a $\overrightarrow{OA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$ et cette égalité vectorielle permet de construire le point A' connaissant le point A.

L’image (D’) de la droite (D) est alors la droite passant par A’ et parallèle à (D).



Remarque

Soit *h* une homothétie de centre O et (D) une droite du plan.
Si O appartient à la droite (D), alors l’image de la droite (D) par h est la droite (D) elle-même.
Dans ce cas on dit que la droite (D) est globalement invariante par l’homothétie h.

2. Image d’un segment

Propriété 1

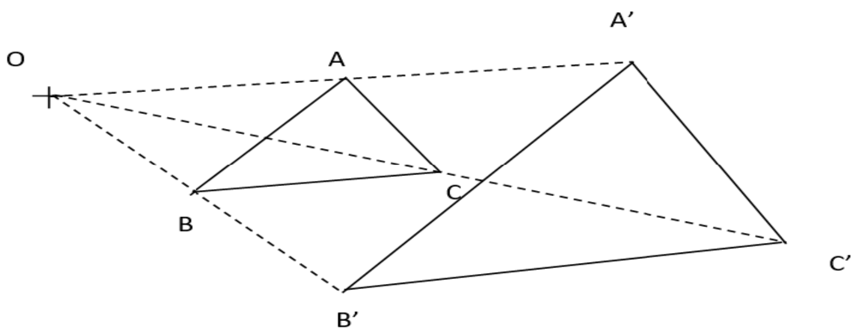
Si A et B sont deux points distincts du plan d’images respectives A’ et B’ par une homothétie de rapport k, alors l’image du segment $[AB]$ par cette homothétie est le segment $[A'B']$ et on a :
$A'\,B' = |k|AB$.

Propriété 2

L’homothétie multiplie les aires de surface plane par le carré de son rapport.

Exercice de fixation

Sur la figure ci-dessous les points A’, B’ et C’ sont les images respectives des points A, B et C par l’homothétie h de centre O et de rapport 2.
On donne AB=6 , AC=5 et BC=7



1. Détermine les images respectives des segments [AB] et [BC] par h.
2. Calcule A’C’ et B’C’.

Solution

1. On a h(A)=A' et h(B)=B' donc h([AB])= [A'B'].

De même h(B)=B' et h(C)=C' donc h([BC])= [B'C'].

2 .On a h([AC])= [A'C'] donc A'C'= $|2|$AC = 2×5 = 10

h([BC]) = [B'C'] donc B'C'= $|2|$BC = 2×7 = 14

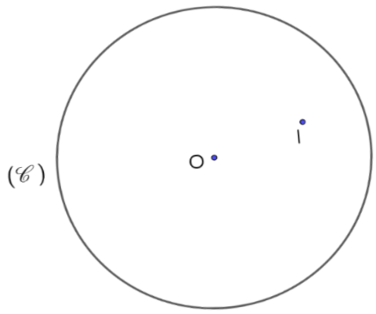
3. Image d'un cercle

Propriété

L'image d'un cercle (C) de centre O et de rayon r par une homothétie h de rapport k est le cercle (C) de centre h(O) et de rayon $|k|r$.

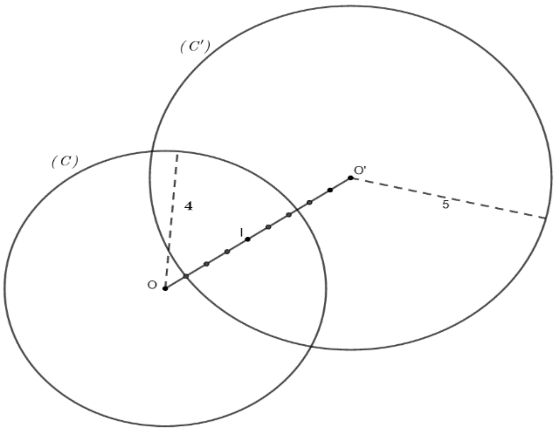
Exercice de fixation

L'unité de mesure est le centimètre.
Sur la figure ci-contre (C) est le cercle de centre O et de rayon 4 ; I $\notin$ (C).
Construis l'image du cercle (C) par l'homothétie h de centre I et de rapport $-\frac{5}{4}$.



Solution

On construit l'image O' de O par h.
Le rayon de (C') est 5.



4. Propriétés de conservation

Propriétés :

Par une homothétie ;

- Des points alignés ont pour images des points alignés.
- Le milieu d'un segment a pour image le milieu de l'image de ce segment.
- Deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles.
- Deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires.
- Un angle orienté a pour image un angle orienté de même mesure.

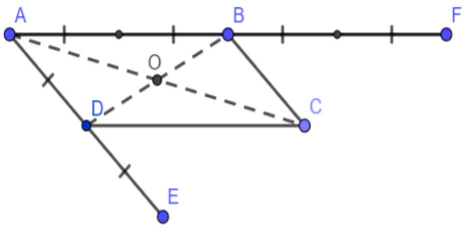
Exercices de fixation

Exercice 1

ABCD est un parallélogramme de centre O tel que AB = 2AD.
Soit E le symétrique de A par rapport à D et F celui de A par rapport à B.
On considère l'homothétie de centre A et de rapport 2

1. Démontrer que les points E , C et F sont alignés.
2. Justifier que C est le milieu de [EF].

Solutions



1-

E est le symétrique de A par rapport à D, alors $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{DE}$, on a donc :
$\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AE}$, par conséquent :
$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AD}$.
De même $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$
On a donc : $h_{(A;2)}$

A	A
B	F
D	E
O	C

Les points D, O et B sont alignés donc leurs images respectives E,C et F par $h_{(A;2)}$ sont aussi alignés.

2-$h_{(A;2)}([DB]) = [EF]$ or O est le milieu de [DB] donc C est le milieu de [EF].

Exercice 2

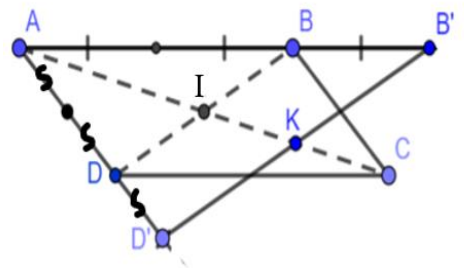
Soient un parallélogramme ABCD de centre I et h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$.

On pose B' = h(B) et D'= h(D).

1. Démontrer que les droites (BD) et (B'D') sont parallèles.
2. La droite (AC) coupe (B'D') en K.

Démontrer que le point K est le milieu du segment [B'D'].

Solutions



h

A	A
B	B’
D	D’

1-$h((BD)) = (B'D')$ donc (BD)// (B’D’).

2-AD’K est un triangle tel que I$\in [AK], D \in [AD']$ et (DI)// (D’K).
D’après la conséquence de la propriété de Thalès on a :

$$\frac{\text{AK}}{\text{AI}} = \frac{\text{AD}'}{\text{AD}}$$

Alors AK $= \frac{3}{2}\ AI$

Comme $\overrightarrow{\text{AK}}$ et $\overrightarrow{\text{AI}}$ on le même sens donc $\overrightarrow{\text{AK}} = \frac{3}{2}\ \overrightarrow{\text{AI}}$.

Ainsi h(I)=K or I est le milieu de [DB] donc K est le milieu de [D’B’].

5. <u>Caractérisation d’une homothétie</u>

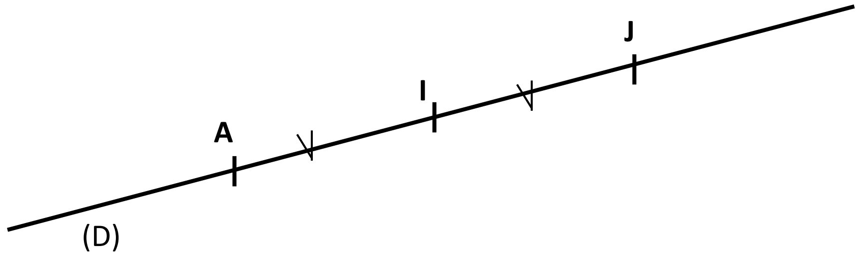
5.1- Homothétie caractérisée par son centre, un point et son image

Propriété

Soient A, B et C trois points alignés, deux à deux distincts du plan.
Il existe une homothétie et une seule de centre A qui applique B sur C.

<u>Exercice de fixation</u>

Dans la figure codée ci – dessous, (D) est une droite, A, I et J sont des points de (D).



1. Justifie qu’il existe une seule homothétie de centre I qui applique A sur J.
2. Détermine cette homothétie.

<u>Solution</u>

1. A , I et J sont trois points alignés, deux à deux distincts du plan alors il existe une seule homothétie de centre I qui applique A sur J.
2. Soit h cette homothétie.

On a $\overrightarrow{\text{IJ}} = -\overrightarrow{IA}$ alors h est l’homothétie de centre I et de rapport -1.

5.2- Homothétie caractérisée par son rapport, un point et son image

Propriété

Soient deux points distincts A et B, et k un nombre réel non nul et différent de 1.
Il existe une homothétie et une seule de rapport k qui applique A sur B.

<u>Exercice de fixation</u>

ABC est un triangle, G son centre de gravité et H le milieu de [BC].

Détermine l'homothétie de rapport $\frac{3}{2}$ qui applique H sur G.

Solution

Soit O le centre de cette homothétie alors $\overrightarrow{OG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OH}$.

Or $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AH}$ donc le centre de cette homothétie est A.

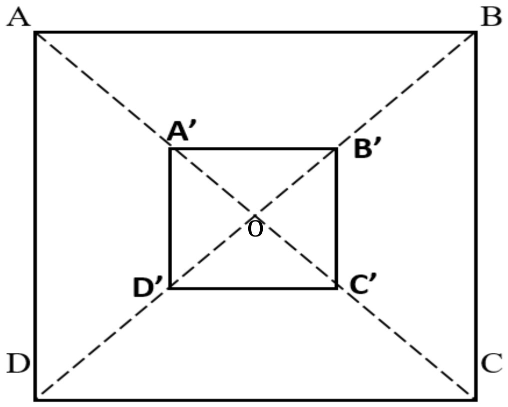
5.3- Homothétie caractérisée par deux points distincts et leurs images

Propriété

Soient M, N, N'et M' quatre points deux à deux distincts tels que (M'N') // (MN) et $\overrightarrow{M'N'} \neq \overrightarrow{MN}$.
Il existe une homothétie et une seule qui applique M sur M'et N sur N'.

Exercice de fixation.

Sur la figure ci-contre ABCD et A'B'C'D' sont des carrés
h est l'homothétie qui transforme A en A ',Ben B' ,C en C'
et D en D'.
Détermine le centre de cette homothétie.

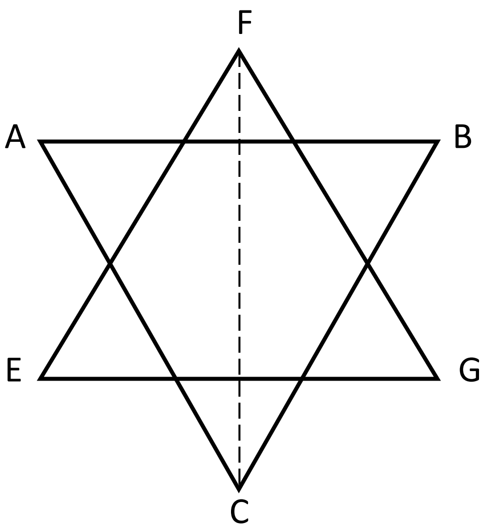


Solution

Ce centre appartient à (AA') et à(BB').
Alors c'est le point d'intersection O de (AA') et (BB').

C- Situation Complexe

Pendant la lecture d'un ouvrage, Sékou, élève en classe de seconde C au Lycée moderne de Korhogo découvre l'étoile de David qui est un schéma croisé de deux triangles équilatéraux ABC et EFG, comme l'indique la figure ci-dessous.

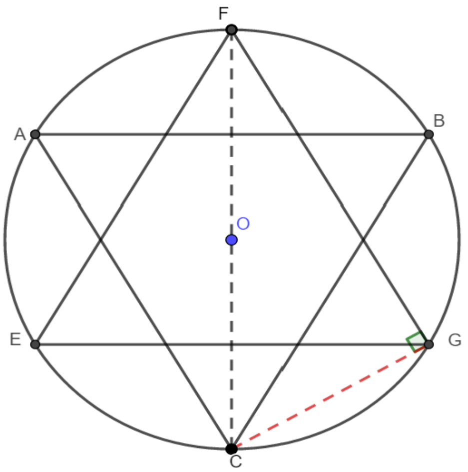


AB = 6 cm
EF = 6 cm

Impressionné par cette figure, Il désire la reproduire, mais il ne dispose que d'une feuille de forme carrée de côté 4 cm. Sa feuille n'étant pas très grande, il souhaite avoir la plus grande reproduction possible. Ne sachant pas comment procéder, il te sollicite.
En utilisant tes connaissances en mathématiques, apporte une solution à la préoccupation de Sékou.

Solution
Pour apporter une solution à la préoccupation de Sékou, nous allons utiliser des notions d'homothétie.
Pour cela, je vais :
- Déterminer la longueur du plus grand segment de la figure ;
- Déterminer le rapport de l'homothétie que je vais utiliser ;
- Déterminer la longueur des côtés des deux triangles équilatéraux ;
- Construire la figure sur la feuille.
    - <u>Déterminons la longueur du plus grand segment de la figure</u>
    le segment $[FC]$ est le plus grand segment de la figure

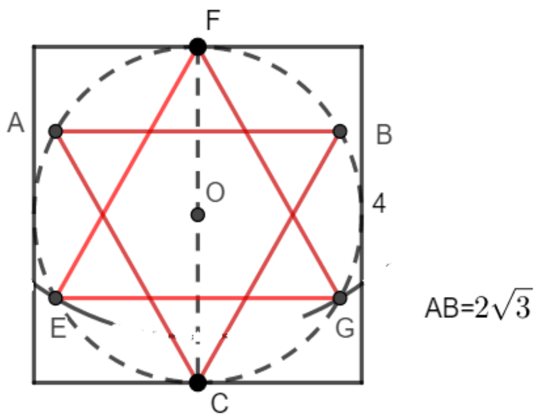
Considérons le cercle circonscrit aux deux triangles. Soit O son centre.



FGC est un triangle inscrit dans le cercle de diamètre [FC] donc il est rectangle en G.
On a : $cos\widehat{CFG} = \frac{FG}{FC}$ alors $FC = FGcos\widehat{CFG} = \frac{FG}{cos30°} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$
donc $FC = 4\sqrt{3}$
- <u>Déterminons le rapport de l'homothétie que je vais utiliser</u>
Pour avoir la plus grande reproduction possible, le plus grand segment [FC] doit est de 4 cm de longueur, ainsi le rapport de l'homothétie à utiliser est : $r = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- <u>Déterminons la longueur des côtés des deux triangles équilatéraux</u>
La longueur des côtés des deux triangles équilatéraux sur la feuille carrée est :
$\frac{\sqrt{3}}{3} \times 6 = 2\sqrt{3}$
- <u>Construisons la figure sur la feuille</u>

Programme de construction :
- On construit l'axe de symétrie (FC) du carré.
- On place O le milieu de [FC]
- On construit le cercle (C) de diamètre [FC]

- Le cercle (C') de centre F et de rayon $2\sqrt{3}$ coupe (C) en E et G.On obtient le triangle équilatéral FEG.
- On construit l'image du triangle FEG par l'homothétie de centre O et de rapport -1.

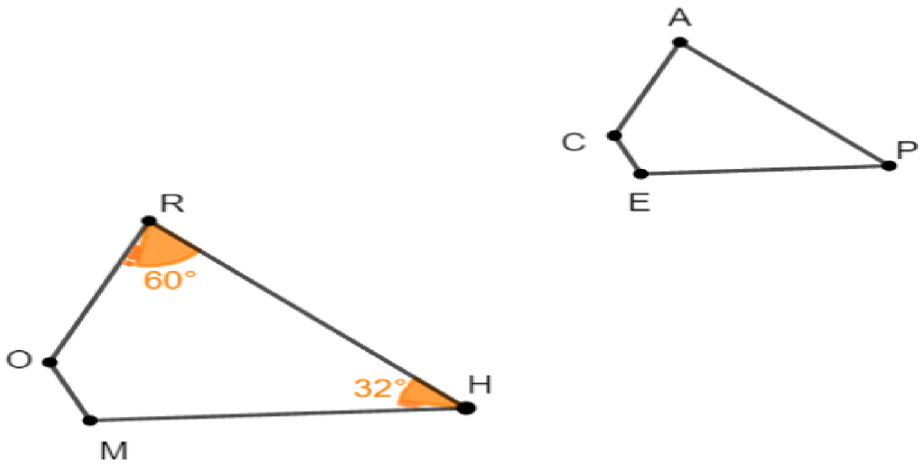


D- EXERCICES

Exercices de fixation

<u>Exercice</u> 1

Sur la figure ci-contre, le quadrilatère APEC est l'image du quadrilatère RHMO par une homothétie de rapport $\frac{2}{3}$.



1- Complète le tableau ci-dessous

Point	R	H	M	O
Image par h				

2- Détermine les mesures des angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PE}})$, justifie ta réponse.

Solution

1.

Point	R	H	M	O
Image par h	A	P	E	C

2. $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP}}\right) = \frac{\pi}{3}$ et Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{PE},\overrightarrow{PA}}\right) = \frac{-8\pi}{45}$

<u>EXERCICE</u> 2

Détermine dans chaque cas, le rapport de l'homothétie h de centre A qui transforme B en C :

a) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$

b) $4\,\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

Solution

Soit k le rapport de cette homothétie.

$h(B) = C \iff \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

a) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ donc le rapport de h est 2

b) $4\,\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Alors le rapport de h est $\frac{3}{4}$

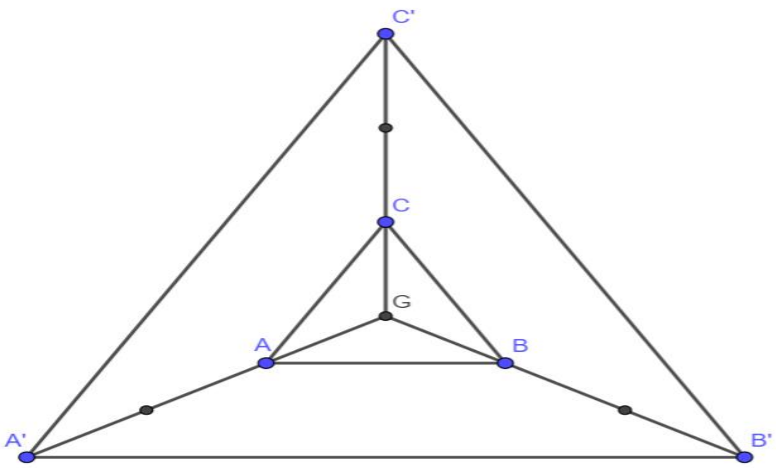
<u>EXERCICE</u> 3

ABC est un triangle équilatéral de côté 4 cm et G le centre de gravité du triangle ABC.

1- Fais une figure.

2- Construis l'image A' B' C'par l'homothétie de centre G et de rapport 3 du triangle ABC.

Solution

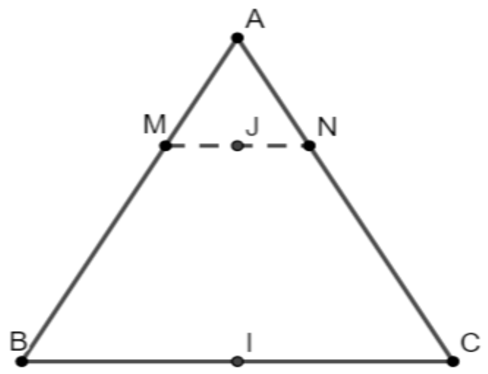


Exercices de renforcement et d'approfondissement

<u>EXERCICE</u> 4

Sur la figure ci-contre, les points M et N sont tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

I et J sont les milieux respectifs des segments $[BC]\ et\ [MN]$.
Par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$ démontre que les points A, I et J sont alignés.



Réponse

h(B)=M et h(C)=N donc h([BC])=[MN].Or I est le milieu de [BC] et J le milieu de [MN] donc h (I)= J car l'homothétie conserve le milieu d'un segment.
Par conséquent A, I et J sont alignés.

EXERCICE 5

On considère un cercle (C) et A un point de (C).
M est un point quelconque de (C).
Détermine l'ensemble des points M', milieu du segment $[AM]$ lorsque M décrit le cercle (C).

Réponse

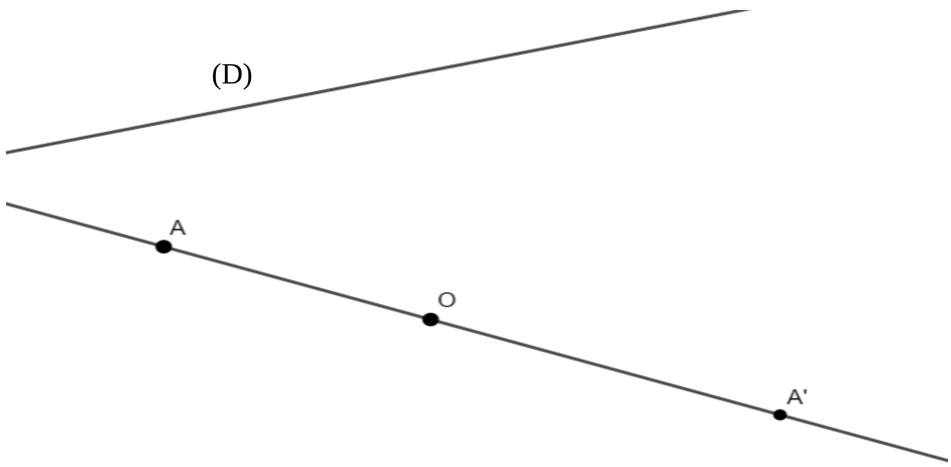
On a $\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

Soit l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

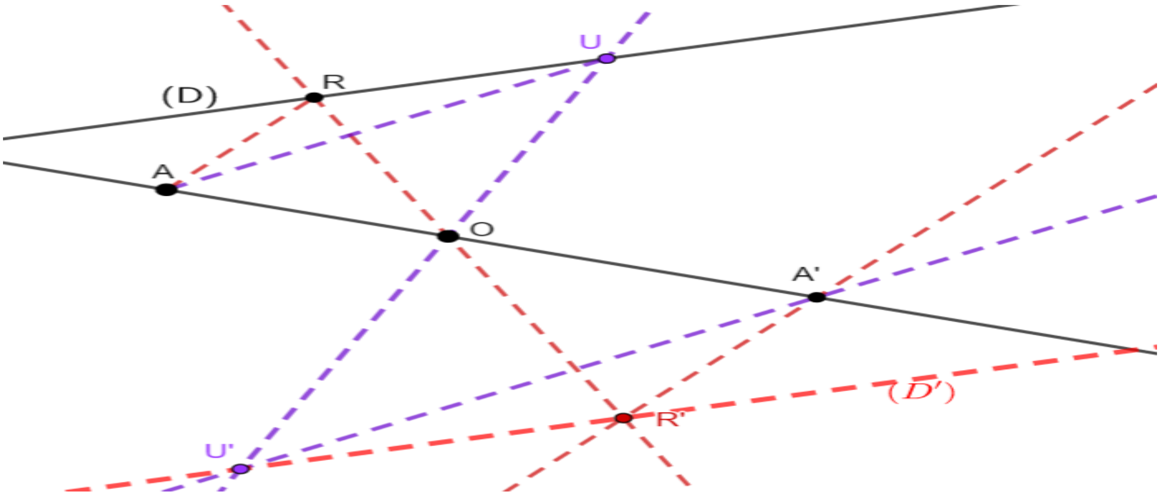
h(M)=M' donc M' décrit le cercle (C') image de (C) par h.

EXERCICE 6

On donne la figure ci-dessous.
On désigne par h l'homothétie de centre O qui transforme A en A'.
Construis l'image de la droite (D) par h.



Réponse



Programme de construction

- On place un point R sur (D).
- On trace la droite (RO).
- On trace la droite parallèle à (RA) et passant par A'.
- L'image R' de R par h est l'intersection des deux droites.
- De même on place un autre point U sur (D) et on construit son image U' par h.
- L'image de (D) est la droite (D') passant par R' et U'.