Leçon 11 : EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un père voyant sa mort venir, réunit ses quatre enfants : Claude, Martial, Léa et Dieudonné à qui il confie la répartition d'une somme d'argent placée en Banque à leur profit.
15% de la somme revient à Claude, deux cinquième à Martial, un quart à Léa et 600.000f restant reviennent à Dieudonné.
Pour savoir combien de francs le père a mis en Banque, le benjamin, Dieudonné, élève en classe de second C, approche ses amis de classe et décident ensemble d'utiliser leurs acquis sur les équations.

RESUME DE COURS

1- Equation dans $\mathbb{R}$

1-1 : Définition

f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$
L'égalité (E): $f(x) = g(x)$ est appelée une équation dans $\mathbb{R}$ d'inconnue x
(E) est le nom de l'équation et $\mathbb{R}$ est le référentiel de l'équation.

Exemple :

(E) : $x^2 - 5 = x + 3$ est une équation à une inconnue dans $\mathbb{R}$

Remarque

- ✓ Si le référentiel n'est pas mentionné alors le référentiel supposé est l'ensemble $\mathbb{R}$
- ✓ La lettre utilisée pour l'inconnue est sans importance car les équations $g(x) = f(x)$ et $g(t) = f(t)$ ont le même ensemble de solutions.

Exercice de fixation

Soit l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}_+$, $x^2 - 1 = 3$
Précise le référentiel et l'inconnue de l'équation (E).

Proposition de solution :

Le référentiel est $\mathbb{R}_+$ et l'inconnu est x.

1.2 : Solution d'une équation, ensemble de validité d'une équation, équations équivalentes

Définition

On considère l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$

- ✓ Le nombre réel x est une solution de (E) lorsque $f(x) = g(x)$
- ✓ L'ensemble de validité de l'équation (E) est : Df ∩ Dg
- ✓ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E), c'est rechercher l'ensemble des solutions de (E).

On note : $S_{\mathbb{R}}$ (E) ou $S_{\mathbb{R}}$ s'il n'y a pas de confusion.
Lorsqu'une équation n'a pas de solution, on dit que l'ensemble de solutions est l'ensemble vide.
On le note : $S_{\mathbb{R}}=\emptyset$

- ✓ Deux équations sont équivalentes lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions.

<u>Exemple</u> :

Soit l'équation (E) : $\frac{1}{x} = 2\,x$

- ✓ L'ensemble de validité noté Ev= $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ car $x \ddagger 0$
- ✓ Une équation équivalente à (E) est : $2x^2 = 1$.

<u>Exercice de fixation</u>

On donne l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = x + 1$

Justifie que 2 est une solution de (E) et qu'une équation équivalente à (E) est : $x^2 - x - 2 = 0$.

<u>Proposition de solution</u>

Soit les fonctions $f(x) = x^2 - 1 \; et \; g(x) = x + 1$

$f(2) = 2^2 - 1 = 3 \; et \; g(2) = 2 + 1 = 3$ donc 2 est une solution de l'équation $x^2 - 1 = x + 1$

x^2-1 = x+1 est équivalent à $x^2 - 1 - x - 1 = 0$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

1-3 : Exemple de résolution d'équations

a- Equations dont les membres sont des polynômes

Méthode :

Pour résoudre une équation du type : $P(x) = Q(x)$ où P et Q sont deux polynômes, on peut procéder comme suit :

- On se ramène à une équation du type : $H(x) = 0$ où $H(x) = P(x) - Q(x)$;
- On factorise si possible *H ;*
- On détermine les racines de *H.*

<u>Exercice de fixation</u>

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - x = 5x + 9$

<u>Propositions de solution</u>

$x^2 - x = 5x - 9$ équivaut à : $x^2 - x - 5x + 9 = 0$

$$x^2 - 6\,x + 9 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 0$$

$$x = 3$$

D'où : S_{IR} = {3}

b- Equations dont les membres sont des fractions rationnelles

<u>Méthode</u> :

Pour résoudre une équation de la forme $f(x) = g(x)$, où f et g sont des fractions rationnelles :

- On détermine l'ensemble de validité de l'équation ;
- On se ramène à une équation liant deux polynômes ;
- On résout la nouvelle équation obtenue ;

- On conclut en tenant compte de l'ensemble de validité de l'équation initiale.

Exercice de fixation :

Résous dans IR l'équation : $\frac{3}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$

Proposition de solution

Les contraintes sur l'inconnue sont : $(x^2 - 4) \neq 0$ et $x + 2 \neq 0$

$$x \neq -2 \text{ et } x \neq 2$$

$$x \in \mathbb{R}\setminus \{-2; 2\}$$

$\frac{3}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$ équivaut à $3\,(x+2) = x^2 - 4$

$$3\,(x+2) = (x-2)(x+2)$$

$$3\,(x+2) - (x-2)(x+2) = 0$$

$$(x+2)(3-x+2) = 0$$

$$(x+2)(5-x) = 0$$

$$x = -2 \; ou \; x = 5$$

D'où : $S_{IR} = \{ 5 \}$

c- Equations dont les membres comportent des valeurs absolues

Méthode

Pour résoudre une équation du type :$|f(x)| = |g(x)|$, on peut procéder comme suit :

- On utilise l'équivalence suivante : (E) $f(x) = g(x) \; ou \; f(x) = -g(x)$
- On résous successivement les équations (E_1) : $f(x) = g(x) \; et$ (E_2) : $f(x) = -g(x)$

L'ensemble des solutions de (E) est la réunion des ensembles de solutions de (E_1) et (E_2)

Exercice de fixation

Résolvons dans IR l'équation (E) : $|x-1| = |3x+2|$

Proposition de solution

Posons $f(x) = x - 1 \; et \; g(x) = 3x + 2$

(E) équivaut à : $f(x) = g(x)$ ou $f(x) = -g(x)$

Donc on obtient : $x - 1 = 3x + 2$ ou $x - 1 = -3x - 2$

$$x - 3x = 2 + 1 \text{ ou } x + 3x = -2 + 1$$

$$-2x = 3 \text{ ou } 4x = -1$$

$$x = -\frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{4}$$

D'où : $S_{IR} = \left\{-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right\}$

Remarque :

Soit l'équation (E) : $|x - a| = b,$ où $b \in \mathbb{R}$

- Si $b < 0$ alors $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$
- Si $b = 0$, alors (E) équivaut à : $x - a = b$
- Si b > 0, alors (E) équivaut à : x – a = b ou x – a = - b

2- Inéquations dans $\mathbb{R}$

2.1 : Définition

- Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers$\mathbb{R}$. L'inégalité (I) : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x)$ est appelée une inéquation dans $\mathbb{R}$, d'inconnue x.
- Tout élément x de $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) \leq g(x)$ est appelée solution de l'inéquation (I)
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I), c'est rechercher l'ensemble des solutions de (I)
- Deux inéquations sont équivalentes lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions.

Exemple :

$2n^2 - 2n + 1 \leq 0$; $\frac{x-6}{3} > 0$; $(k+1)(k-2) < 0$; $|n-5| < 3$ sont des inéquations à une inconnue dans $\mathbb{R}$.

Remarque :

- Le nom utilisé pour l'inconnue est sans importance, les inéquations $f(x) \leq g(x)$ *et* $f(n) \leq g(n)$ ont le même ensemble de solutions.
- Avant de résoudre une inéquation, il convient si nécessaire de préciser les contraintes sur l'inconnue.

2.2 : Exemple de résolution d'inéquations dans $\mathbb{R}$

a- Inéquations liant deux polynômes

Méthode

Pour résoudre une inéquation du type $f(x) < g(x)$ *o*ù f *et* g sont des polynômes :

- On se ramène au cas d'une inéquation de la forme $P(x) < 0$ *o*ù P est un polynôme obtenu par différence de f et g : $P(x) = f(x) - g(x)$
- On factorise si possible $P(x)$
- On étudie le signe de $P(x)$ dans un tableau de signes ;
- On détermine les solutions (si elles existent) de l'inéquation $P(x)$<0

Exercice de fixation

Résous dans IR l'inéquation : $n^2 > 5n - 6$

Proposition de solutions

Résolvons dans IR l'inéquation : $n^2 > 5n - 6$

$n^2 > 5n - 6$ équivaut à : $n^2 - 5n + 6 > 0$

Factorisons $n^2 - 5n + 6$.

$n^2 - 5n + 6 = \left(n - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6$

$= \left(n - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25+24}{4}$

$= \left(n - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

$= \left(n - \frac{5}{2}\right)^2 - (\frac{1}{2})^2$

$n^2 - 5n + 6 = (n$-2)(n -3)

- Etudions le signe du polynôme$(n-2)(n-3)$.
  Le tableau de signes

n	$-\infty$	2	3 $+\infty$
$n-2$	-	+	+
$n-3$	-	-	+
$(n-2)(n-3)$	+	-	+

De ce qui précède, $(x-2)(x-3) > 0$ si $n \in]-\infty\,; 2\,[\,U\,]3;+\infty[$
D'où $S_{IR} =\ ]-\infty\,; 2\,[\,U\,]3;+\infty[$

b) Inéquation liant deux fractions rationnelles.

Méthode

Pour résoudre une inéquation de la forme $f(n) < g(n)$ où f et g sont des fractions rationnelles :

- On détermine l'ensemble de validité de l'inéquation ;
- On se ramène à une inéquation de la forme $P(n) < 0$ où P est une fraction rationnelle obtenue en faisant la différence de f et g.
- On étudie le signe du numérateur et du dénominateur de P dans le tableau de signes.
- On conclut en tenant compte de l'ensemble de validité de l'inéquation initiale.

<u>Exercice de fixation</u>

Résous dans IR l'inéquation $\frac{3x}{2+x} > 0$.

<u>Proposition de solution</u> :

Résolvons dans IR l'inéquation : $\frac{3\,x}{2+\,x} > 0$.

- Les contraintes sur l'inconnue pour (I) : $x \in IR\backslash\,\{-2\}$.
- Etudions le signe de $3x$ et $2+x$.

Tableau de signe

x	$-\infty$ -2	0	$+\infty$
$3\,x$	-	-	+
$2+x$	-	+	+
$\frac{3\,x}{2+x}$	+	-	+

De ce qui précède, $\frac{3x}{2+x} > 0$ si $x \in]-\infty; -2\,[\cup]\,0\,;+\infty\,[$

D'où $S_{IR} =]-\infty\,; -2\,[\cup]\,0\,;+\infty\,[$.

III- SITUATION COMPLEXE

Dans le souci d'éviter des tractions après sa mort, un père de famille, croulant sous le poids de l'âge, propose de partager son épargne à ses quatre enfants et à sa femme de la manière suivante :

- L'ainé a le tiers de l'épargne diminué de 270.000 FCFA
- Le deuxième fils a le tiers du reste diminué de 270.000 FCFA
- Le troisième enfant a le tiers du reste diminué de 270.000 FCFA
- Le cadet a le tiers du reste diminué de 270.000FCFA
- Le reste revient à sa femme.

Le cadet des enfants, en classe de 2nde C, décide de déterminer le montant minimum de l'épargne du père afin qu'il puisse avoir au moins 2.000.000 FCFA et connaître ensuite la part de chacun des enfants et celle de la femme.

IV- EXERCICES

1- Exercices d'application

EXERCICE 1

Mets une croix dans chaque case correspondant à une équation à une inconnue.

$x3 - 5x^2 = x + 1$	
$3x - 5\,y = 2\,n^2 - \,y^2$	
$x + 3y - z = 0$	
$4\,y - 5\; = \;y^2 + 1$	

EXERCICE 2

Mets une croix dans chaque case correspondant à une inéquation à une inconnue.

$4t^2 - t\; \geq 2\,t$	
$4n - y\; < 0$	
$t3 - < t^2 - 1$	
$3y\; \geq \dfrac{y+1}{3}$	

EXERCICE 3

Résous dans IR les équations ci-dessous :

a) $/x^2 - x/ = 6$
b) $y^2 - 3\; = \;(y + 1)^2$

EXERCICE 4

Résous dans IR les inéquations suivantes :

a) $2x^2 - x + 1\; \leq 5 + 2x^2$

b) $\frac{2x+7}{3} \leq \frac{x-9}{x}$

2- Exercices de renforcement et d'approfondissement

<u>EXERCICE</u> 5

On considère le polynôme P de degré 3 tel que :
$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

1- Ecris sous forme canonique puis factorise le polynôme de degré 2,
   $h(x) = x^2 - 3x + 2$
2- Soit le polynôme $t(x) = (x-1)(x^2 - 3x + 2)$.
   a- Justifie que $t(x) = P(x)$
   b- En déduis la forme factorisée de P
3- Résous dans IR l'équation $P(x) = 0$.

<u>EXERCICE</u> 6

On donne l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}, 2x^3 - x^2 - x - 3 = 0$

1- Vérifie que $\frac{3}{2}$ est un nombre réel solution de l'équation (E).
2- Résous l'équation (E).

<u>EXERCICE</u> 7

Résous dans IR les inéquations suivantes :

a) $\frac{3}{x+2} \leq \frac{1}{3x}$
b) $\frac{2x+1}{2-x} > \frac{3}{4-2x}$

<u>EXERCICE</u> 8

Une société veut imprimer des manuels scolaires. La location de la machine d'impression revient à 100.000F par jour. Les frais de papier pour la fabrication d'un manuel s'élèvent à 300F.
Détermine le nombre minimum de manuels à imprimer par jour pour que le prix de revient d'un manuel soit inférieur à 750F.