MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE

ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ECOLE A LA MAISON

2nde C
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

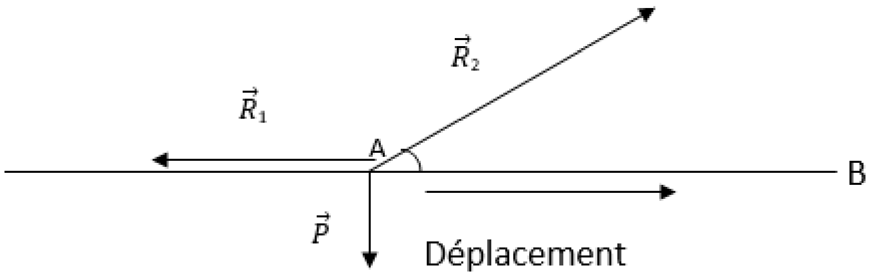
Durée : 10 heures   Code :

COMPETENCE 3	Traiter une situation relative à la géométrie du plan , à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan
THEME 1	Géométrie du plan

Leçon10 : PRODUIT SCALAIRE

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pendant les cours de mécanique dans la classe de seconde, le professeur donne des forces appliquées à un véhicule représenté par le point A dans la figure ci- dessous.



Il demande aux élèves de calculer le travail de chaque force $(\overrightarrow{R2}, \overrightarrow{R1}\ et\ \vec{P})$ pour un déplacement de A à B avec AB = 10 m.
L'un d'eux affirme qu'il suffit de calculer le produit des vecteurs forces et du vecteur déplacement.
Ensemble; les élèves font des recherches sur le produit scalaire de deux vecteurs.

B- CONTENU DE LA LECON

I) Produit scalaire de deux vecteurs

1- **Définition**

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs; on appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ défini par :

- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}\ \vec{v}})$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$
- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

$\vec{u}\,.\,\vec{v}$ se lit «$\vec{u}\ scalaire\ \vec{v}$»

Exemples

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{3}$; $\|\vec{v}\| = 4$ et $\cos(\widehat{\vec{u}\ \vec{v}}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}\ \vec{v}})$

$= 2\sqrt{3} \text{ x } 4 \text{ x } \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$

b) $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{3}$; $\|\vec{v}\| = 4$ et mes $(\widehat{\vec{u}\,;\ \vec{v}}) = \frac{\pi}{2}$

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\frac{\pi}{2}) = 8\sqrt{3}\times 0 = 0$

Remarque

Pour trois points A, B et C distincts

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ = AB x AC x cos $(\widehat{BAC})$

En effet, $\|\overrightarrow{AB}\|$= AB, $\|\overrightarrow{AC}\|$ = AC et cos $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$= cos $(\widehat{BAC})$

2 **Propriétés**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

1- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$

2- $|\vec{u}\,.\,\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

3- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et :

- *de meme sens si et seulement si* $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- de sens contraire si et seulement si $\vec{u}\,.\,\vec{v} = - \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

Exercice de fixation

Calcule le produit scalaire $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ dans chacun des cas ci-dessous.

1) $\|\vec{u}\| = 2$; $\|\vec{v}\| = 6$; et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.
2) $\|\vec{u}\| = 15$; $\|\vec{v}\| = 7$; et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires

SOLUTION

1) $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = 2 \text{ x } 6 = 12$
2) $\vec{u}\,.\,\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = -15 \text{ x } 7 = -105$

3- **Carré scalaire**

a) Définition

Le carré scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ est défini par $\vec{u}.\vec{u}$. on le note $\vec{u}^2$.

b) Propriété

Pour tout vecteur $\vec{u}$ on a : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

Exercice de fixation

On donne $\vec{v}$ avec $\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$

Calcule $\vec{v}^2$

SOLUTION

$$\vec{v}^2 = \|\vec{v}\|^2 = \sqrt{5}^2 = 5$$

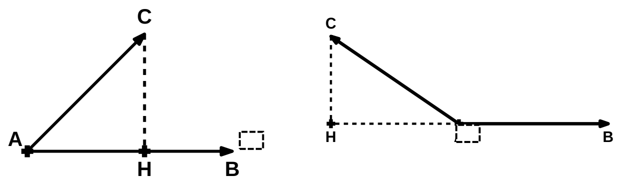
Remarque : pour tous points distincts A et B, on a : $\overrightarrow{AB}^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2$

b) Autre expression du produit scalaire

a) **Propriété 1**

Pour tous points A, B et C tels que A ≠ B

On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$ *où H est le projeté orthogonal de C sur la droite* (AB)



Exercice de fixation

ABCD est un carré de coté 4cm.

Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

SOLUTION

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AB} = AB \times AB = 16.$

Soit I le milieu du segment $[AB]$

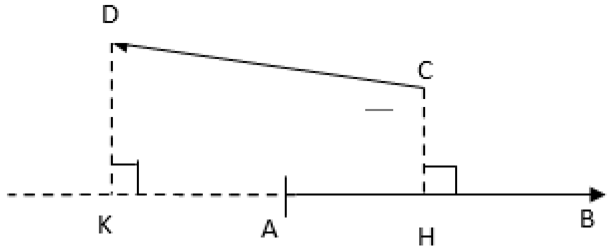
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overline{AB} \times \overline{AA} = -\, AB \times AA = -4 \times 0 = 0$

b **Propriété 2**

Soit A, B, C et D quatre points tels que A ≠ B.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{AB} \times \overline{HK}$ *où H et K sont les projetés*

Orthogonaux respectifs des points C et D sur la droite (AB)

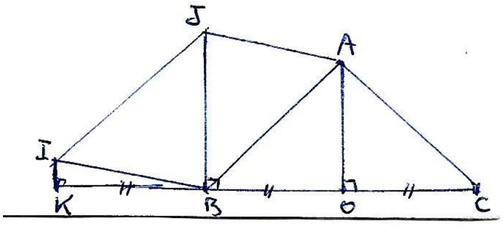


Exercice de fixation

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle. ABIJ est un parallélogramme et BC = 4

Calcule le produit scalaire suivant .

1) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$
2) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{JC}$
3) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AJ}$
4) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BJ}$
5) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CI}$



SOLUTION

1) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}= \overline{BC}.\overline{BO}$= 4 x 2 = 8
2) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{JC} = \overline{BC}.\overline{BC}$= 16
3) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AJ} = \overline{BC}.\overline{OB}$= -8
4) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BJ} = \overline{BC}.\overline{BB}$= 4 x 0 = 0
5) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CI} = \overline{BC}.\overline{CK}$= -4 x 6 = -24

3. Propriétés du produit scalaire

4.1 Vecteurs orthogonaux

a- Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$

b- Conséquence

-
- Soit (D) et (D') deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

(D) $\perp$ (D') $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

- Soit les points A, B, C, et D avec A≠B et C≠D
  On a (AB) $\perp$ (CD) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$
- Soit les points A, B et M avec A≠B
  M appartient au cercle (φ)de diametre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} = 0$

Exercice de fixation

ABCD est un carré. Calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$

- **SOLUTION**
- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$ car (AC) $\perp$ (DB).

4.2 Opération sur les produits scalaires

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{t}$, $\vec{w}$ du plan et pour tout nombre réel k on a :

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

$(k\vec{u})\, \vec{v} = \vec{u}\, (k.\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

$(\vec{u} + \vec{w}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{v}$

$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{w} + \vec{t}) = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{t} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{t}$

$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2$

$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2$

$(\vec{u} - \vec{v})((\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Exercice de fixation

On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 2$; $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$

Démontre que $(2\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = -2$

SOLUTION

$$(2\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{u}^2 - 2\vec{u}\,\vec{v} - \vec{v}^2 + \vec{u}\,\vec{v}$$
$$= 2 \times 2^2 - 2 \times 1 - 3^2 + 1$$
$$= -2$$

4.3 Produit scalaire et norme

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

4. Relation métrique dans un triangle

5.1 Produit scalaire dans un triangle

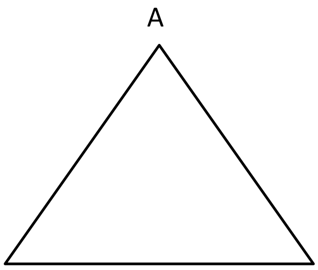
Propriété

Soit A, B et C trois points non alignés. On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AC^2 + AB^2 - BC^2)$

Remarque

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(BC^2 + BA^2 - AC^2)$

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(CA^2 + CB^2 - AB^2)$



Exercice de fixation

Soit ABC un triangle tels que AB = 5 ; AC = 6 et BC = 3

Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

B

SOLUTION

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

$= \frac{1}{2}(25 + 36 - 9)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$

5.2 Théorème d'Al Kashi

Propriété

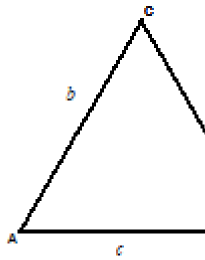
Soit ABC un triangle quelconque.

Posons BC = a, AC = b, AB = c puis $\hat{A} = \widehat{BAC}$; $\hat{B} = \widehat{ABC}$ et $\hat{C} = \widehat{ACB}$ on a :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$;

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$;

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$



Exercice de fixation

ABC est un triangle tels que AB = 8 ; AC = 3 et mes $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$. Calcule BC

SOLUTION

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$

$= 64 + 9 - 2\times 8 \times 3\cos\frac{\pi}{3}$

$BC^2 = 49$ donc BC = 7

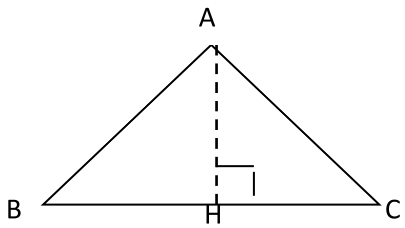
5.3 Caractéristique d'un triangle rectangle

Propriété

Soit ABC triangle, H pied de la hauteur issue de A.

Les affirmations suivantes sont équivalentes

- ABC est un triangle en A
- $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- $BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$
- $HA^2 = \overline{HB} \times \overline{HC}$



Exercice de fixation

ABC est un triangle n'ayant pas d'angle obtus et H le pied de la hauteur issue de A. On donne AB = 6 ; BC=9 ; BH=4

Justifie que le triangle ABC est rectangle.

SOLUTION

On a :$AB^2 = 36$ et $\overline{BH} \times \overline{BC} = 4 \times 9 = 36$.
Donc $AB^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$ d'où le triangle ABC est un triangle rectangle en A.

6. Produit scalaire de vecteurs connaissant leurs coordonnées

6.1 Expression du produit scalaire dans une base orthonormée

Propriété
Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ $une\ base\ orthonormée\ et\ \vec{u}\ et\ \vec{v}\ deux$ vecteurs
Si $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (x;y) et (x';y') dans cette base alors $\vec{u}.\vec{v}$ = xx' + yy'

Exercice de fixation

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Dans chacun des cas ci-dessous, calcule le produit scalaire $\vec{u}\,.\vec{v}$

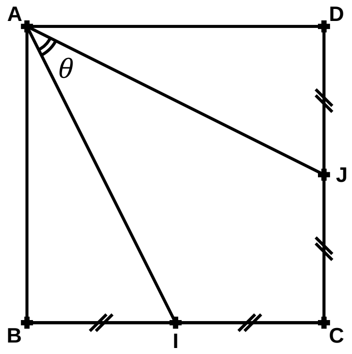
1- $\vec{u}\binom{2}{-3}$ et $\vec{v}\binom{-5}{2}$
2- $\vec{u}$ =(1-$\sqrt{2}$)$\vec{\imath}$+ (2-$\sqrt{3}$)$\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = (1 + \sqrt{2})\vec{\imath}$+ (2+$\sqrt{3}$)$\vec{\jmath}$

SOLUTION

1- $\vec{u}\,.\vec{v} = -5 \times 2 - 3 \times 2 = -16$
2- $\vec{u}\,.\vec{v} = (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) + (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$
= 1-2+4-3
= 0

C-Situation complexe

Le père d'une famille partage un terrain de forme carrée à ses trois enfants. Pour éviter le conflit entre les jumeaux, il décide que la parcelle de l'aîné, élève en classe de 2ndc soit entre celles des jumeaux. La figure ci-contre illustre ce partage.
L'ainé curieux voudrait connaitre la mesure de. l'angle θ à 10^{-2} . pour cela il s'adresse au géomètre qui lui demande de calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\boldsymbol{AI}}.\overrightarrow{\boldsymbol{AJ}}$. ne sachant pas comment procédé il te sollicite
A l'aide d'une démarche argumentée basée de tes connaissances en mathématiques, répond sa préoccupation



SOLUTION

Soit a le coté du carré ABCD (a est un nombre réel strictement positif)

J'exprime les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$

On a : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Je calcule de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}$

$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$

$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = 0 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 + 0$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$ car (AB) et (AD) sont perpendiculaire en A

$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = a^2$ (1)

D'autre part :

$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = AI \times AJ \times \cos\left(\widehat{IAJ}\right)$

En appliquant la propriété de Pythagore au triangle ABI rectangle en I, on a : $AI^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}$

Donc $AI^2 = \frac{5a^2}{4}$ soit $AI = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

De même $AJ = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Donc $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = \frac{5a^2}{4} \times \cos\theta$ (2)

Je détermine une valeur approchée de θ

De (1) et (2) on déduit que $\frac{5a^2}{4} \times \cos\theta = a^2$

On a $\frac{5}{4} \times \cos\theta = 1$

Donc $\cos\theta = \frac{4}{5} = 0{,}8$

$\theta = 36{,}87$ car $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ d'après la figure.

Donc une valeur approchée de θ à 10^{-2} près est $36{,}87°$

D .EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICE 1

Ecris le numéro d'un élément de l'affirmation de l'ensemble A suivi de la lettre qui correspond à un seul élément de l'ensemble B

Théorème d'AL KASHI	**1**
Produit scalaire dans un triangle connaissant les cotés	**2**
Théorème de la médiane	**3**
Carré scalaire	**4**
Définition du scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le vecteur $\overrightarrow{AC}$	**5**

A

A . $AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

B . $\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{AC}$

C . $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB.AC.\cos \widehat{A}$

D . $BC^2 = AB^2 + AC^2$

E . $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$

B

SOLUTION

1 C 2D 3 E 4A 5B

EXERCICE 2

Réponds par VRAI si l'affirmation est vraie ou FAUX si elle est fausse

1°) Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}$ a le même signe que $\cos \widehat{BAC}$ ....

2°) Si les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $\vec{u} . \vec{v} = -\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$......

3°) $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = 0$ signifie que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ ....

4°) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On a : $\vec{u} . \vec{v} = xx' - yy'$........

SOLUTION

1°) VRAI 2°) FAUX 3°) VRAI 4°) FAUX

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 3

$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont deux vecteurs.*

Démontre que :

1) $\vec{u} . \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
2) $\vec{u} . \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
3) $|\|\vec{\boldsymbol{u}}\| - \|\vec{\boldsymbol{v}}\|| \leq \|\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}}\|$

Exercice 4

On donne trois points A(1;2), B(4;-3) et C(-1;3) dans le plans rapporté à un repère orthonormé. Détermine une valeur approchée à 10^{-1} près de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

SOLUTION

Je calcule le couple des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et les distances AB et AC

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-1 \\ -3-2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ donc AB = $\sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-1\\3-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ donc AC = $\sqrt{(-2)^2+(1)^2}=\sqrt{5}$

Je calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ de deux manières
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$= 3$\times (-2)+(-5)\times 1=-6-5=-11$ alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-11$ (1)
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times cos\widehat{BAC}=\sqrt{170}\,cos\widehat{BAC}$ 2)
Je détermine une valeur approchée à 10^{-1}de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.
De (1) et (2) on a : $\sqrt{170}\,cos\widehat{BAC}$ = -11
donc $cos\widehat{BAC}=\frac{-11}{\sqrt{170}}=\frac{-11\sqrt{170}}{170}\approx -084$
d'où mes $\widehat{BAC}.\approx 147{,}5°$

Exercice 5

Soit ABC un triangle, tels que AB=$\sqrt{7}\ AC=2\ et\ BC=3$

1 a- Calcule cos$\widehat{BAC}$
 b - justifie que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=1$

1) On considère le point M tel que
 $6\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
 a) Calcule $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}$
 b) Démontre que les droites (MB) et (AC) sont perpendiculaires.

SOLUTION

Soit ABC un triangle, tels que AB=$\sqrt{7}\ AC=2\ et\ BC=3$

1 a- ***je Calcule cos$\widehat{BAC}$***
 D'après le théorème de AL KASHI, $3^2=2^2+\left(\sqrt{7}\right)^2-2\sqrt{7}\times cos\hat{A}$
 Soit $cos\widehat{BAC}=\frac{2}{2\sqrt{7}}=\frac{1}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$

 b - justifie que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=1$

on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{4+7-9}{2}=1$

Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=1$

2 On considère le point M tel que
 $6\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

 a) Je Calcule $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}$

$6\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}=\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AC}$
$6\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}$
$6\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}=2+4$
$6\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}=6$
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}=1$

b) je Démontre que les droites (MB) et (AC) sont perpendiculaires

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC} = -1 + 1$
$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC} = 0$ alors les droites (MB) et (AC) sont perpendiculaires.

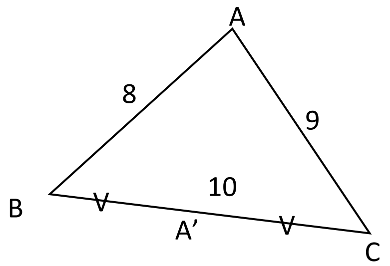
Exercice 6

On admet la Propriété suivante :
ABC un triangle et A' le milieu du coté $[BC]$ on a :

1- $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$
2- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AA'^2 - \frac{BC^2}{4}$

Application

On considère la figure ci-contre



a) Calcule la longueur AA'
b) Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
c) Calcule la longueur des deux autres médianes

SOLUTION

a) $2AA'^2 + \frac{BC^2}{2} = AB^2 + AC^2$

$AA'^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2})$

$AA'^2 = \frac{1}{2}(8^2 + 9^2 - \frac{10^2}{2})$

Donc AA'$=\sqrt{\frac{95}{2}}$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AA'^2 - \frac{BC^2}{4} = \frac{95}{2} - \frac{100}{4} = 22{,}5$

EXERCICES D'approfondissement

Exercice 7

Soit ABC un triangle
On pose a=BC ; b= AC ; c= AB
On appelle P son demi-périmètre et S son aire. On se propose de calculer S en fonction de a, b et c

1 /a- Démontre que $\cos\hat{A} = \frac{b^2+c^2+a^2}{2bc}$

b – En déduire $sin^2\hat{A}$ *en fonction* de a, b et c

2/ Démontre que S=$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

SOLUTION

1) a- Je démontre que $\cos\hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

Je considère le triangle ABC tel que a=BC ; b = AC ; c = AB
D'après le théorème d'AL KASHI, on a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

Donc cos $\hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

b - En déduire $sin^2\hat{A}\ en\ fonction$ de a, b et c

on a: $sin^2\hat{A}$ =1- $cos^2\hat{A}$ = (1+ cos $\hat{A}$) (1- cos $\hat{A}$)

1+ cos $\hat{A} = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

1+ cos $\hat{A} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}$

1+ cos $\hat{A} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$

1+ cos $\hat{A} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$

Calculons 1- 1+ cos $\hat{A}$

1- cos $\hat{A} = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

1- cos $\hat{A} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$

1- cos $\hat{A} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$

1- cos $\hat{A} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$

$sin^2\hat{A} =$ (1+ cos $\hat{A}$) (1- cos $\hat{A}$)

$$sin^2\hat{A} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} \times \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

$$sin^2\hat{A} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}$$

D'après l'enoncé, a +b +c = 2p

Donc : b + c - a = 2p – 2a = 2(p-a)

a + c – b = 2p – 2b = 2(p-b)

a + b – c = 2p – 2 c = 2(p-c)

Ainsi

$$sin^2\hat{A} = \frac{2p \times 2(p-a) \times 2(p-b) \times 2(p-c)}{4b^2c^2} = \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}$$

Donc $\boxed{sin^2\hat{A} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}}$

2/ je Démontre que S=$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

S étant l'aire du triangle ABC

On a $S = \frac{1}{2}bc \times sin\hat{A}$

$sin^2\hat{A} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}$ alors $sin\hat{A} = \sqrt{\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}} = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Donc $S = \frac{1}{2}bc \times \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Donc $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$