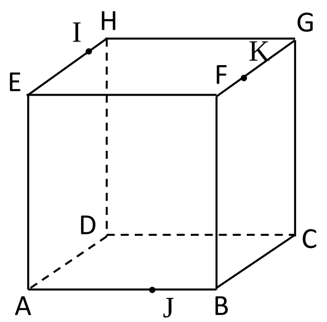
Leçon 5 : GEOMETRIE DE L'ESPACE niveau : 2e C

A. - SITUATION D'APPRENTISSAGE

Au cours d'un exercice au lycée Moderne HKB de Sinfra, la figure ci-contre a été réalisée au tableau. ABCDEFGH est un cube. I est un point de [EH], J un point de [AB] et K un point de [FG].
En observant la figure, un élève affirme que la droite (IK) est commune aux plans (IJK) et (EFG).
Les autres élèves veulent connaitre l'intersection du plan (IJK) avec les différentes faces du cube. Ils décident alors de construire la section du plan (IJK) avec le cube.



B. - RESUME DE COURS

I. Positions relatives de droites et de plans de l'espace

1. Positions relatives de deux droites,

L'espace (E) est un ensemble infini de points admettant des sous-ensembles infinis appelés droites et plans qui satisfont certaines règles suivantes :

a. Règles de base

Règle 1 : Par deux points distincts A et B, il passe une unique droite notée (AB).

Règle 2 : Par trois points non alignés A, B et C de (E), il passe un unique plan. Ce plan est noté (ABC).

Règle 3 : Si A et B sont deux points d'un plan P, tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan P.

Règle 4 : Si deux plans sont sécants, leur intersection est une droite.

Règle 5 : les théorèmes de géométrie plane sont vrais dans tout plan de l'espace.

b. Vocabulaire

- Lorsque des **points** appartiennent à un même plan on dit qu'ils sont **coplanaires**.
- Lorsque des **droites** sont contenues dans un même plan on dit qu'elles sont **coplanaires.**
- Quatre points ne sont pas coplanaires lorsque l'un n'appartient pas au plan défini par les trois autres.
- Un **tétraèdre** est un solide qui a quatre sommets non coplanaires.

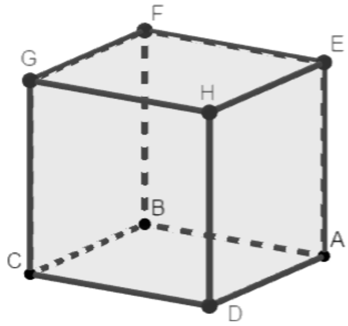
Propriété

Deux droites non coplanaires sont disjointes.

Exercice de fixation

ABCDEFGH est un cube.

Montre que les droites (GF) et (CD) sont disjointes.



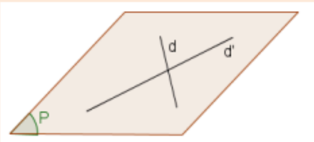
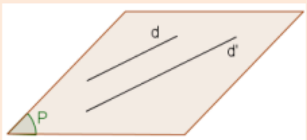
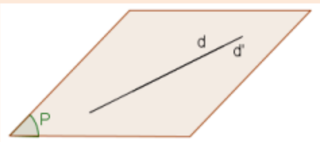
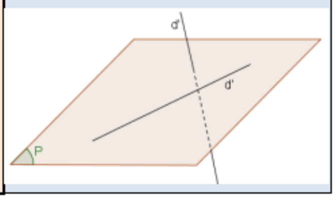
Solution

G,F et C sont trois points non alignés donc (GFC) est un plan. Or D ∉ (GFC) alors les quatre points G,F ,C et D sont non coplanaires.

Si les droites (GF) et (CD) étaient coplanaires alors les points G , F,C et D seraient coplanaires. Ce qui est absurde.

Donc (GF) et (CD) sont non coplanaires d'où elles sont disjointes.

Résultats à retenir

<table>
<tr><th colspan="3">Droites coplanaires</th><th rowspan="3">Droites non coplanaires</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Droites sécantes</th><th colspan="2">Droites parallèles</th></tr>
<tr><th>Droites strictement parallèles</th><th>Droites confondues</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Définitions

1) Deux droites sont dites parallèles lorsqu'elles sont confondues ou bien lorsqu'elles sont coplanaires et disjointes.
2) Deux droites sont dites sécantes lorsque leur intersection est réduite à un point

Exemple

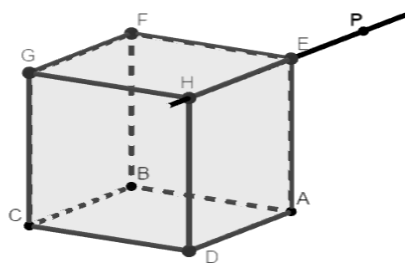
ABCDEFGH est un cube .

P ∉ (HE).

-Les droites (HE) et (HP) sont confondues donc elles sont parallèles.

-Les droites (EP) et (GF) sont coplanaires et disjointes donc elles sont parallèles.

-B est le point d'intersection des droites (CB) et (FB) alors elles sont sécantes.



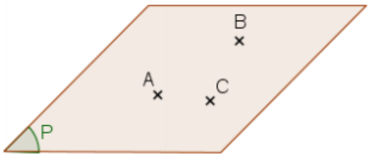
Remarque

Deux droites dites disjointes ne sont pas nécessairement parallèles, elles peuvent être non coplanaires.

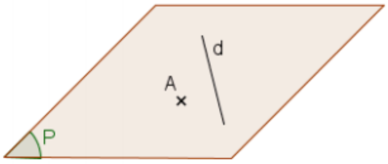
c. Détermination d'un plan

Un plan est défini :

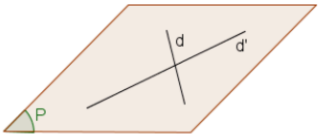
- Soit par trois points non alignés



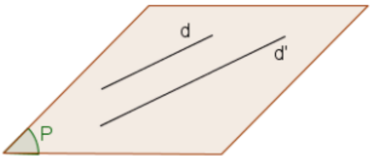
- Soit par une droite et un point n'appartenant pas à cette droite



- Soit par deux droites sécantes



- Soit par deux droites strictement parallèles



Exercice de fixation

ABCDEFGH est un cube , I est un point de la demi-droite $[BF)$.

Justifie que les droites (BC) et (BI) sont contenues dans le plan (FGC).

Réponse attendue

- B et C sont des points du plan (FGC) alors $(BC) \subset (FGC)$.

On a $B \in (FGC)$ et $F \in (FGC)$ alors $(BF) \subset (FGC)$ or $I \in (BF)$ d'où $I \in (FGC)$. Par conséquent

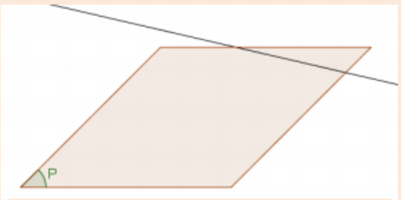
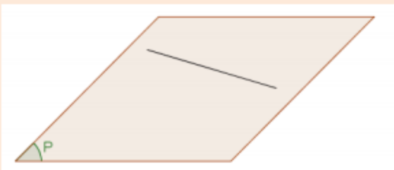
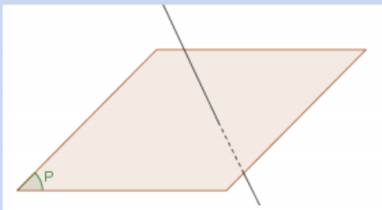
(BI) ⊂ (FGC)

2. Positions relatives d’une droite et d’un plan

Propriété

Étant donné une droite (D) et un plan (P), les différentes positions relatives sont :

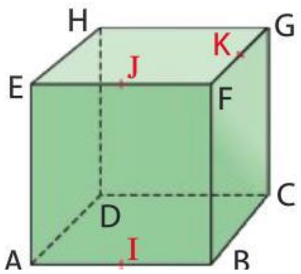
1) (D) et (P) sont disjoints.
2) (D) est incluse dans (P).
3) L’intersection de (D) et de (P) est réduite à un point.

Droite et plan parallèles		Droite et plan sécants
Droite et plan strictement parallèles	Droite incluse dans le plan	
		

Exercice de fixation

ABCDEFGH est un cube.
I, J, K sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [EF] et [FG].
Étudie la position relative :

1) de la droite (IK) et du plan (BCF).
2) de la droite (AI) et du plan (FGC)
3) de la droite (JK) et au plan (EFG)



Réponse attendue

1. K est un point commun à (IK) et (BCF).
   I $\in (IK)$ et I $\notin$ (BCF)

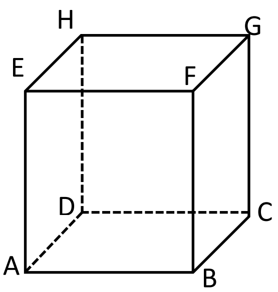
Alors La droite (IK) est sécante au plan (BCF).

2. B est un point commun à (AI) et (FGC).
   A $\in$(AI) et A $\notin$ (FGC).
   Alors la droite (AI) est sécante au plan (FGC.

3. J $\in (EFG)$ et K $\in (EFG)$ donc la droite (JK) est incluse dans le plan (EFG).

Définitions

1) On dit qu’une droite (D) est parallèle à un plan (P) lorsque (D) est incluse dans (P) ou lorsque (D) et (P) sont disjoints.
2) On dit que le plan (P) est sécant à la droite (D) au point I lorsque l’intersection de (D) et de (P) est réduite au point I



Exemple : **On considère le cube ci-contre**

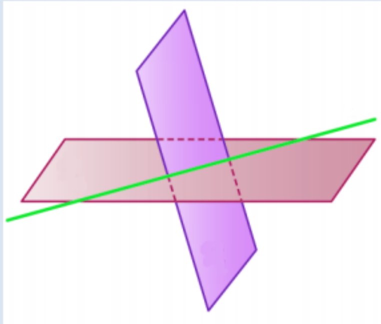
- La droite (AE) est parallèle au plan (GDC) car (AE) et (GDC) sont disjoints .
- La droite (BH) est sécante au plan (ADE) en H car l’intersection de (BH) et de (ADE) est réduite au point H

3. Positions relatives de deux plans

<u>Propriété</u>

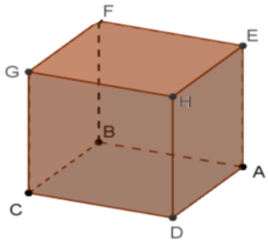
Étant donné deux plans (P) et (L), les différentes positions relatives sont :

1) (P) et (L) sont disjoints.
2) (P) et (L) sont confondus.
3) L'intersection de (P) et (L) est une droite.

Plans parallèles		Plans sécants
Plans strictement parallèles	Plans confondus	Les plans sont sécants suivant une droite
		

<u>Exercice de fixation</u>

ABCDEFGH est un cube.
Etudie la position relative des plans (EFG) et (EAD



<u>Réponse attendue</u>

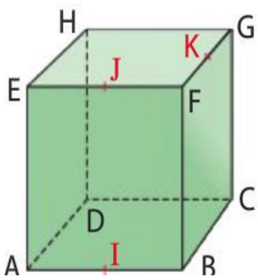
E est un point commun aux plans (EFG) et (EAD).
H est un point commun aux plans (EFG) et (EAD).
De plus F$\in$ (EFG) et F$\notin$ (EAD).
Par conséquent les plans (EFG) et (EAD) sont sécants suivant la droite (EH).

<u>Définitions</u>

1) Deux plans confondus ou disjoints sont dits parallèles.
2) Deux plans non parallèles sont dits sécants, leur intersection est alors une droite.

Exemple : On considère le cube ABCDEFGH ci-contre.

1) Les plans (AED) et (GFC) sont disjoints donc ils sont parallèles.
2) Les plans (IJK) et (EFG) sont sécants en (JK).



4. **Section plane**

Définition :
La section d'un solide par un plan correspond à la « trace » laissée par ce plan sur le solide, qui est formée par l'ensemble des points communs au solide et au plan.

Méthode :
La construction de la section d'un solide par un plan se fait en construisant l'intersection de ce plan avec les différentes faces du solide.

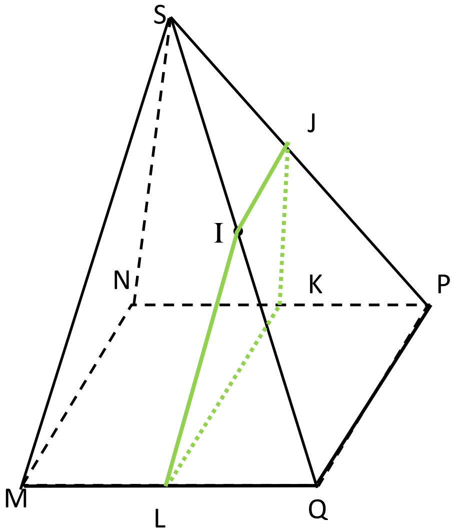
Exemple :

SMNPQ est une pyramide des sommet S.

I∈ [SQ]; J ∈ [SP] ; K ∈ [NP]; L ∈ [MQ].

La section plane du plan (IJK)

avec la pyramide SMNPQ est IJKL.



II. Etude du parallélisme

1. Parallélisme de deux droites

Propriété 1 : par un point donné de l'espace, il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée

Propriété 2 : Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une coupe l'autre

Propriété 3 : Deux droites parallèles à une même troisième droite sont parallèles entre elles.

Conséquence

Deux droites coplanaires respectivement parallèles à deux droites non parallèles sont sécantes.

Exercice de fixation

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un tétraèdre. I, J, K et L

sont les milieux respectifs des segments$[AB]$,$[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.

1. Montre que les droites (IL) et (JK) sont parallèles.
2. Soit (P) un plan sécant à (IL).
   Justifie que (P) est sécant à (JK).

Réponse attendue

1) BDC est un triangle, le point J est milieu de $[BC]$ et le point K est milieu de $[DC]$, d'après la propriété de la droite des milieux $(JK)//(BD)$.

ABD est un triangle, le point I est milieu de $[AB]$ et le point L est milieu de $[AD]$, d'après la propriété des droites des milieux $(IL)//(BD)$.

On a donc $(JK)//(BD)$ et $(IL)//(BD)$ d'où $(IL)//(JK)$.

2) (P) est un plan sécant à (IL) et $(IL)//(JK)$ Donc (P) est sécant à (JK).

2. **Parallélisme d'une droite et d'un plan**

Propriété 1

Une droite (D) est parallèle à un plan (P) si et seulement s'il existe dans (P) une droite parallèle à (D).

Propriété 2

Si une droite (D) est parallèle à un plan (P), alors toute droite parallèle à (D) est parallèle à (P).

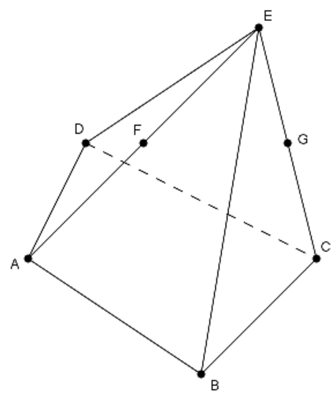
Propriété 3

Une droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à leur droite d'intersection.

Exercice de fixation

ABCDE est une pyramide. F est le milieu de [EA] et G est le milieu de [EC]. Démontre que la droite (FG) et le plan (ABC) sont parallèles.

1) Justifie que $(FG)//(AC)$.
2) Déduis-en que $(FG)//(ABC)$.



Réponse attendue

1) AEC est un triangle, le point F est milieu de $[AE]$ et le point G est milieu de $[EC]$.
D 'après la propriété de la droite des milieux $(FG)//(AC)$.
2) On a $(FG)//(AC)\ et\ (AC) \subset (ABC)$ d'où $(FG)//(ABC)$.

3. **Parallélisme de deux plans**

Propriété 1

Deux plans sont parallèles si et seulement si l'un contient deux droites parallèles à l'autre et sécantes entre elles.

Propriété 2

Deux plans parallèles à un même troisième plan sont parallèles entre eux.

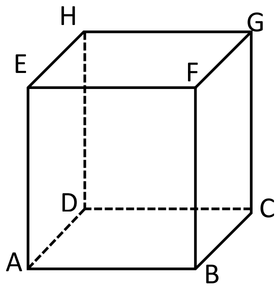
Propriété 3

Par un point donné de l'espace, il passe un et un seul plan parallèle à un plan donné.

Propriété 4

Si deux plans sont parallèles :

1. Tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles ;
2. Toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre ;
3. Toute droite sécante à l'un est sécante à l'autre.



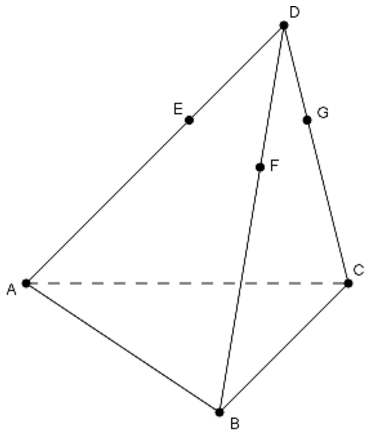
Exemple :

On considère le cube ABCDEFGH ci-contre.

1) Les droites (DB) et (AC) sont sécantes. (DB)// (EFG) et (AC) // (EFG) donc les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles.
2) Les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles. Le plan (AGH) est sécant à (EFG) en (HG), donc il est sécante à (ABC) en (AB). De plus (AB) // (HG)

Exercice de fixation

On considère le tétraèdre ABCD et les points E, F et G appartenant respectivement aux arêtes [DA], [DC] et [DB] tels que les droites (EF) et (AB) d'une part et les droites (FG) et (BC) d'autre part soient parallèles.
Justifie que les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles.



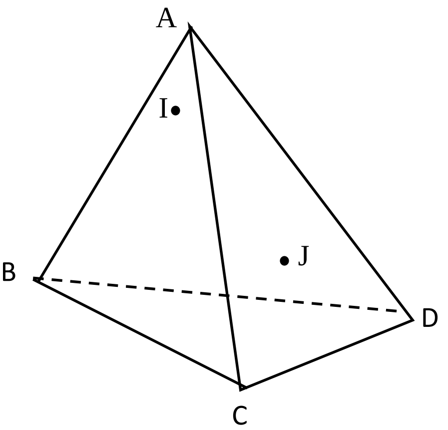
Réponse attendue

$(EF)//(AB)$ or (AB)Ì (ABC) d'où $(EF)//(ABC)$ et $(FG)//(BC)$ or (BC)Ì (ABC) d'où $(FG)//(ABC)$. Les droites (EF) et FG), sécantes en F, sont parallèles au plan (ABC) alors le plan (EFG) est parallèle au plan (ABC).

QUELQUELS METHODES pour Démontrer

HABILETES	**METHODES PRATIQUES**
Démontre qu'un point appartient à un plan	Il suffit de démontrer qu'il appartient à une droite incluse dans ce plan
Démontre qu'une droite est incluse dans un plan	Il suffit de démontrer que : • Elle passe par deux points du plan • Elle passe par un point du plan et qu'elle est parallèle à une droite du plan
Démontre que deux droites(D) et (D') sont parallèles	Il suffit de : • Démontrer qu'elles sont coplanaires et appliquer un théorème de géométrie plane (droite des milieux, théorème de Thalès…) • Démontrer qu'elles sont coplanaires et parallèles. • Trouver une droite parallèle à ses droites
Démontrer qu'une droite est sécante à un plan	On peut trouver un point de la droite qui appartient au plan et un point de la droite qui n'appartient pas au plan.
Démontrer qu'une droite est parallèle à un plan	On peut démontrer qu'elle est parallèle à une droite de ce plan
Démontrer que trois points sont alignés	Il suffit de démontrer qu'ils appartiennent à une même droite. Cette droite peut souvent être vue comme l'intersection de deux plans.
Démontrer que deux plans sont sécants	• On peut démontrer qu'ils ne sont pas confondus et trouver leur intersection • On peut utiliser un raisonnement par l'absurde.
Démontrer que deux plans sont parallèles	• Trouve deux droites sécantes de l'un des plans qui soient parallèles chacune à l'autre plan. • On peut démontrer qu'ils sont parallèles à un même plan.

III- SITUATION COMPLEXE

Au cours d’une séance d’exercices dirigée par le chef de la classe en l’absence du professeur au lycée Moderne HKB de Sinfra, la figure ci-contre a été réalisée au tableau. ABCD est un tétraèdre. I est un point de la médiane du triangle ABC issue de A et J un point de la médiane du triangle ACD issue de A. Il s’agit de trouver la position relative de la droite (BD) et du plan (AIJ). Certains élèves de la classe affirment que la droite (BD) est parallèle au plan (AIJ), tandis que d’autres contestent en affirmant que la droite (BD) est sécante au plan (AIJ). Une discussion éclate entre les deux groupes. A l’aide d’une production argumentée, départage ces deux élèves.	

Solution :

Pour résoudre ce problème nous allons utiliser la leçon Droites et Plans dans l’espace, notamment la position relative d’une droite et d’un plan.

La droite (AI) coupe le segment [BC] en K. K est donc le milieu de [BC]

La droite (AJ) coupe le segment [DC] en R. R est donc le milieu de [DC]

Dans le triangle DBC, La Droite (KR) est parallèle (DB). Comme (KR) $\subset$ (AIJ), on a donc la droite (BD) est parallèle au plan (AIJ).

Par conséquent les élèves qui affirment que la droite (BD) est parallèle au plan (AIJ) ont raison.

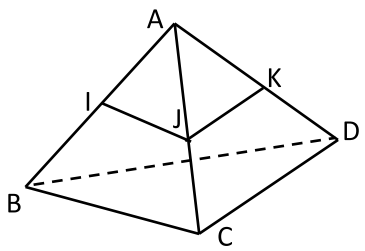
IV-EXERCICES

Exercices d’application

Exercice 1

ABCD est un tétraèdre, I, J, K sont les milieux des arêtes [AB], [AC], [AD].

Écris le numéro suivi de la lettre de la bonne réponse.



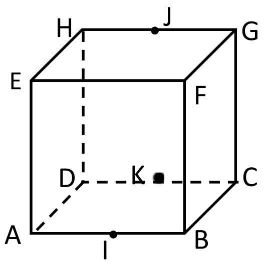
1. Les points A, B, D, J sont :
   a. Coplanaires ; b. alignés ; c. non coplanaires
2. La droite (BC) est parallèle à la droite :
   a. (IK) ; b. (AD) ; c. (IJ)
3. Les droites (BK) et (DI) sont :
   a. non coplanaires ; b. Parallèles ; c. sécantes
4. Sont coplanaires, les droites :
   a. (AB) et (CD) ; b. (IK) et (AC) ; c.(IK) et (BD)
5. La droite (IK) est parallèle au plan :
   a. (ABC); b. (BCD); c. (ACD)
6. Les plans (ACD) et (IJK) sont sécants suivant
   a. (AC) b. (JK) c. (IK)

Solution

1.c ; 2.c ; 3.c ; 4.c ; 5.b ; 6.b

Exercice 2

ABCDEFGH est un cube, I , J et K sont les milieux de [AB] ,[GH] et [DC]



1. (Δ) est une droite parallèle à la droite (BG), (Δ) est donc parallèle au plan :
   a. (ADH) ; b. (ABC) ; c. (CDH)
2. Le plan (AEJ) coupe le plan (CDH) suivant une droite parallèle à :
   a. (BA) ; b. (IK) ; c. (AE)
3. (Δ) est une droite parallèle au plan (ABD) et au plan (HCG) alors :
   a. (ABC) est parallèle à (HCG) ; b. (Δ) est parallèle à (DC) ; c. (Δ) est parallèle à (AD)

Solution :

1.a : 2.a 3. b

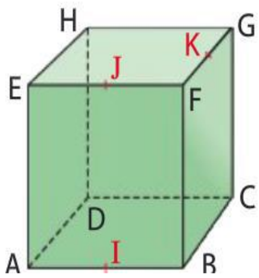
Exercice 3

Sur le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-contre.

Détermine les positions relative de :

1° La droite (HI) et le plan (ABC).

2° La droite (BG) et le plan (EAD).



3° La droite (CG) et le plan (DGH).

Solution :

1. La droite (HI) et le plan (ABC) sont sécants.
2. La droite (BG) et le plan (EAD) sont parallèles.
3. La droite (CG) est incluse dans le plan (DGH).

<u>Exercice4</u>

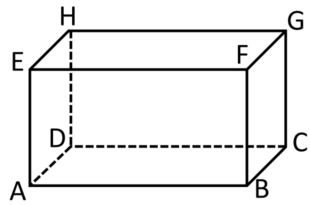
Sur le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-contre :

1° Complète les phrases en donnant les positions relatives des plans :

Les plans (ABC) et (FGD) sont ....

Les plans (ABC) et (EFG) sont ....

Les plans (HFB) et (EGC) sont...



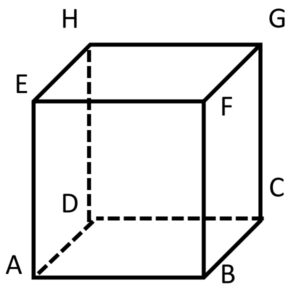
Solution :

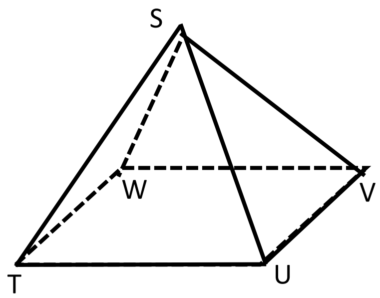
Les plans (ABC) et (FGD) sont ....sécants......

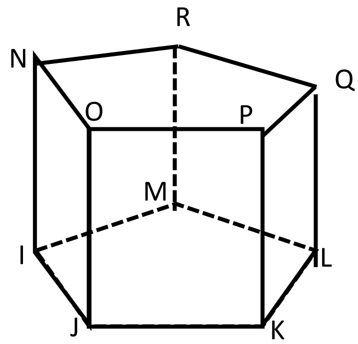
Les plans (ABC) et (EFG) sont ....parallèles...........................

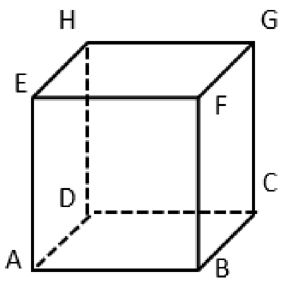
Les plans (HFB) et (EGC) sont...........sécants...................................

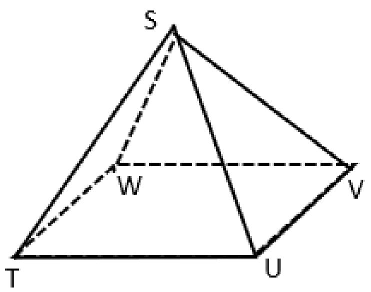
<u>Exercice</u> 5: Déterminer la position relative des droites pour les solides dessinés en perspective.

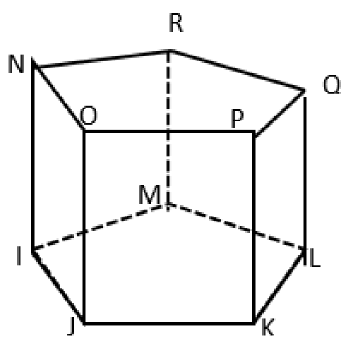












<u>Sur le cube ABCDEFGH :</u> <u>Sur la pyramide STUVW :</u> <u>Sur le prisme IJKLMNOPQR :</u>

Les droites (DH) et (GC) sont………………	Les droites (SU) et (VW) sont…… ………………	Les droites (NP) et (IK) sont………………
Les droites (AD) et (BG) sont…………..	Les droites (TV) et (UW) sont……………………	Les droites (NP) et (JM) sont…………………….

Solution :

Sur le cube ABCDEFGH :	Sur la pyramide STUVW :	Sur le prisme IJKLMNOPQR :
Les droites (DH) et (GC) sont……parallèles…………	Les droites (SU) et (VW) sont… disjointes ……	Les droites (NP) et (IK) sont… parallèles …
Les droites (AD) et (BG) sont…disjointes……….	Les droites (TV) et (UW) sont…sécantes………	Les droites (NP) et (JM) sont…disjointes…………………

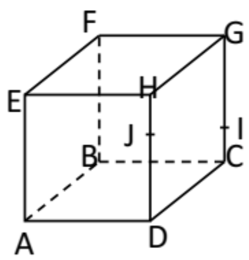
Exercices de renforcement

❖ ***Comment démontrer que deux droites sont coplanaires ou non ?***

Exercice 6

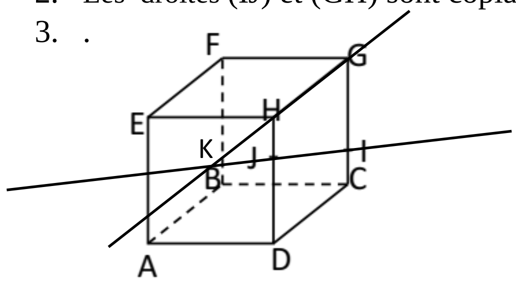
ABCDEFGH est un cube tel que I∈ [GC] ; J ∈ [HD] .

1. Les droites (AB) et (EF) sont-elles coplanaires ? Justifie ta réponse.
2. Justifie que (IJ) et (GH) sont coplanaires.
3. Construis le point d'intersection K de (IJ) et (GH).
4. Justifie que les droites (IJ) et (AE) ne sont pas coplanaires.



Solution :

1. Les droites (AB) et (EF) sont coplanaires car elles sont parallèles.
2. Les droites (IJ) et (GH) sont coplanaires car elles sont incluses dans le plan (GCD).
3. .



Le point K est l'intersection de (IJ) et (GH)

4. Supposons que (IJ) et (AE) sont coplanaires. Alors les points I , J , A et E seraient coplanaires. Ce qui est contradictoire car I∉ (JAE) .
   Donc (IJ) et (AE) sont non coplanaires.

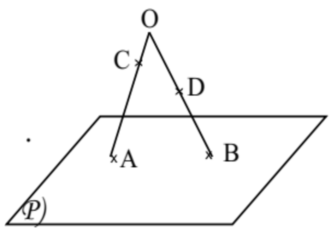
❖ *Comment démontrer qu'une droite est sécante à un plan ?*

Exercice 7

Sur la figure ci-contre :

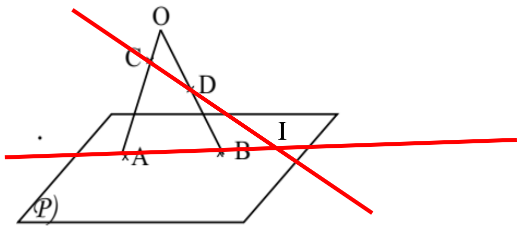
- A∈(*P*) ; B∈(*P*) ; O∉(*P*) ; C∈[AO] ; D∈[OB]
- Dans le plan (OAB), les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

1. Démontre que la droite (CD) est sécante au plan (*P*) en un point I
2. Construis le point d'intersection I de (CD) avec le plan (*P*)



Solution :

1. (AB) et (CD) sont coplanaires et ne sont pas parallèles ; donc elles sont sécantes. Or (AB) est contenue dans le plan (P), donc la droite (CD) est sécante au plan (*P*) en un point I qui est l'intersection des droites (AB) et (CD).
2. Construction du point d'intersection I de (CD) avec le plan (*P*)



Exercices d'approfondissement.

❖ *Comment démontrer qu'une droite est parallèle à un plan ?*

Exercice 13

SABCD est une pyramide régulière. I le milieu du segment [SA] et J le milieu du segment [SB].

Démontre que la droite (IJ) est parallèle au plan (SCD).

Solution :

Dans le triangle SAB ,

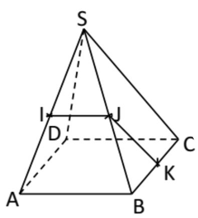
$\left.\begin{array}{l} I \text{ milieu de } [SA] \\ J \text{ milieu de } [SB] \end{array}\right\} (IJ)//(AB)$ et (AB) // (DC) donc (IJ) // (DC) or (DC) ⊂ (SCD) d'où (IJ)//(SCD)

❖ *Comment démontrer que deux plans sont parallèles ?*

Exercice 14

SABCD est une pyramide régulière. I le milieu du segment [SA] et J le milieu du segment [SB], K le milieu de [BC].

Démontre que le plan (IJK) est parallèle au plan (SCD).



Solution :

On démontre que (IJ) // (DC) et (JK) // (SC) , or (DC) et (SC) sont sécantes donc le plan (IJK) est parallèle au plan (SCD).

RESSOURCES :

- https://lecluseo.scenari-community.org/TS/PDF/Ch08_Espace_papier.pdf
- http://www.panamaths.net/Documents/TS/DroitesPlans3D%20(Exercices)%20V30042015.pdf
- https://lewebpedagogique.com/valiblog2/files/2017/08/E1-Droites-et-plans-de-lespace_VL.pdf
- http://lycee.lagrave.free.fr/IMG/pdf/ts_droites_plans_espace_exos.pdf