MINISTÈRE DE L'EDUCATION
NATIONALE ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE
2^{nde} C
MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 8 heures Code :

Compétence 1
Traiter une situation relative aux calculs algébriques et aux fonctions

Thème2 : Fonctions

LECON : GÉNÉRALITES SUR LES FONCTIONS

A -SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour les fêtes de fin d'année, le père d'un élève en classe de 2^{nde} C a acheté un nouvel appareil électrique. Le technicien chargé de son installation à la maison a indiqué que : « L'appareil a une puissance de 600 watts. Il est alimenté sous une tension variable (en volts) et est parcouru par un courant (en ampères). L'appareil ne peut supporter une intensité supérieure à 6 ampères. Il faut donc une tension minimale pour l'alimenter. »
Curieux, cet élève veut savoir cette tension minimale mais a des difficultés. Il en parle à ses camarades de classe. L'un d'eux suggère d'exprimer la tension en fonction de l'intensité.
Ensemble, ils décident de déterminer une relation entre la puissance, la tension et l'intensité afin de répondre à la préoccupation de leur camarade.

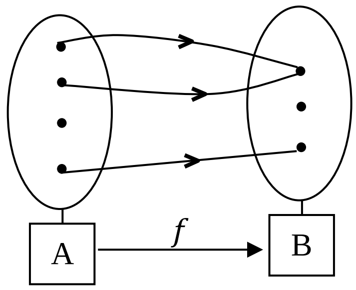
B -CONTENU DE LA LECON

I- FONCTION

1- Définition

A et B sont deux ensembles non vides.

On appelle fonction de A vers B **toute correspondance** qui, à chaque élément de A, associe **un ou zéro** élément de B.



Vocabulaire et notations

Soit f une fonction de A vers B.

Pour tout élément x de A, on désigne par $f(x)$ son correspondant par f dans B.

On dit que f est la fonction de A vers B qui, à x associe $f(x)$;

On note : f : A $\to$ B

$$x \longmapsto f(x)$$

A est l'ensemble de départ de f et B son ensemble d'arrivée.

x est la variable, $f(x)$ l'image de x par f.

- Lorsque $\boldsymbol{y}$ **est l'image de** $\boldsymbol{x}$ **par** $\boldsymbol{f}$**,** on dit que $\boldsymbol{x}$ **est un antécédent de** $\boldsymbol{y}$ **par** $\boldsymbol{f}$. On écrit : $y = f(x)$.
- Lorsque **l'ensemble d'arrivée** d'une fonction f **est un ensemble de nombres réels**, on dit que $\boldsymbol{f}$ **est une fonction numérique.**
- Lorsque l'ensemble de départ d'une fonction numérique f est l'ensemble de nombres réels, on dit que f est une fonction numérique d'une variable réelle.

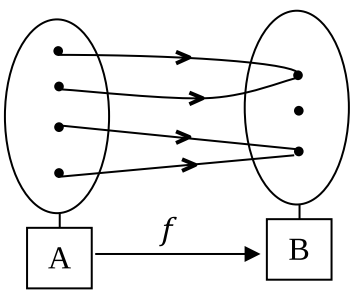
Remarques

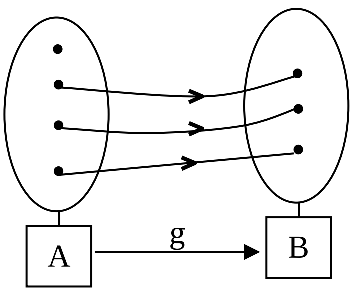
Les applications du plan dans lui-même sont des fonctions.

La symétrie orthogonale, la symétrie centrale et la translation sont des fonctions du **plan vers le plan**.

Les applications affines vues en troisième sont des fonctions de ℝ vers ℝ.

Exemples

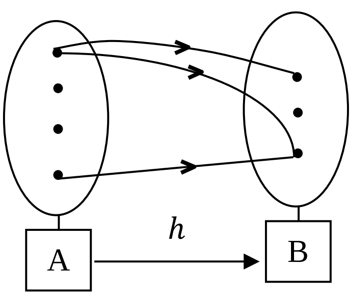




f est une fonction car chaque élément de A a zéro ou une image par f dans B.

g est une fonction car chaque élément de A a zéro ou une image par g dans B.

Contre-exemple



h n'est pas une fonction car il y a un élément de A qui a deux images par h dans B.

2- Diverses déterminations d'une fonction

a) Fonction déterminée par une formule explicite

Une fonction peut être déterminée par une formule explicite.

Exemples

$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto x^2 - x + 3$

$g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \sqrt{x+5}$

$h:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \frac{x+3}{x-1}$

f, g et h sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ déterminées par leurs formules explicites respectives :
$f(x) = x^2 - x + 3$, $g(x) = \sqrt{x+5}$ et $h(x) = \frac{x+3}{x-1}$

Exercices de fixation

Exercice

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dont le calcul de l'image est donné par le programme suivant :

- Prendre un nombre réel ;
- Elever ce nombre au carré ;
- Ajouter -4 ;
- Prendre l'inverse ;
- Multiplier par la racine carrée du nombre pris au départ.

Ecris la formule explicite de cette fonction.

Solution

$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-4}$

b) Fonction déterminée par un tableau de valeurs

Une fonction peut être déterminée par un tableau de valeurs : c'est un tableau à deux lignes où à chaque membre de la première ligne on associe son image sur la seconde ligne si elle existe.

Exemple :

a	-12	-4	1,4	3	25
$f(a)$	-5,5	-3	5	2	-2

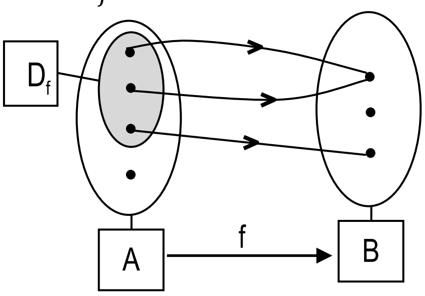
3- Ensemble de définition

a) Définition

f est une fonction d'un ensemble A vers un ensemble B.
On appelle ensemble de définition de f, l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f.

Notation

On note habituellement D_f l'ensemble de définition de f.



Remarque

Toute fonction polynôme a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$.

b) Détermination

Point méthode
Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction définie par une formule explicite, on peut procéder comme suit :
- Écrire, s'il y a lieu, les contraintes sur la variable ;
- Préciser les ensembles que déterminent ces contraintes ;
- Écrire l'intersection des ensembles précédents (On pourra utiliser une droite graduée).

Exercice de fixation
Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x. \longmapsto -2x^3 + 5x^2 + 4x + 1$

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{3x-5}{-x+2}$

$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{-x}}$

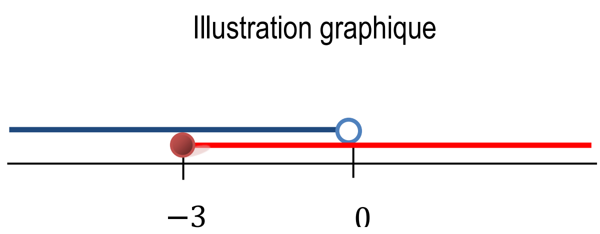
Solution

- Soit D_f l'ensemble de définition de f.
  f étant une fonction polynôme est définie sur $\mathbb{R}$: $D_f = \mathbb{R}$
- Soit D_g l'ensemble de définition de g et x un nombre réel.
  $x \in D_g \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\,; -x + 2 \neq 0$
  $\Leftrightarrow x \neq 2$

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ou $D_g =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.
- Soit D_h l'ensemble de définition de h et x un nombre réel.

$x \in D_h \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\,; -x < 0 \; et \; x + 3 \geq 0$
$\Leftrightarrow \; x \in]-\infty; 0[\; et \; x \geq -3$
$\Leftrightarrow \; x \in [-3; 0[$

Par conséquent : $D_h = [-3; 0[$.



4- **Représentation graphique**

Définition
Le plan est muni d'un repère.
f est une fonction numérique d'une variable réelle, d'ensemble de définition D_f.
On appelle **représentation graphique de** f, ou **courbe représentative de** f, l'ensemble des points $\mathrm{M}(x, f(x))$ où x est un élément de D_f.

Notation et vocabulaire
On note habituellement (C_f) la représentation graphique de f. On a :
$\mathrm{M}(x\,;\,y) \in (\mathrm{C}_f) \Leftrightarrow x \in \mathrm{D}_f$ et $y = f(x)$
Quand f est une fonction déterminée par une formule explicite, on dit que $y = f(x)$ est l'équation de la courbe (C_f).

Exemple
On considère la fonction f définie sur $[1; 10]$ par : $f(x) = \sqrt{x-1}$. On désigne par (C_f) est la représentation graphique de f dans le plan est muni du repère (O, I, J).
On considère les points $A(5; 2), B(7; \sqrt{6})$ et $C(4; 1)$ on a :.
- $f(5) = 2$, d'où : $A \in (\mathrm{C}_f)$
- $f(7) = \sqrt{6}$, d'où : $B \in (\mathrm{C}_f)$
- $f(4) = \sqrt{3}$ et $\sqrt{3} \neq 1$, d'où: $C \notin (\mathrm{C}_f)$.

Remarque
$y = \sqrt{x-1}$ est l'équation de la courbe (C_f).

Point méthode
Pour tout nombre $x \in D_f$, $f(x)$ est unique. Il en résulte qu'une droite parallèle à l'axe des ordonnées coupe la courbe représentative d'une fonction, en au plus, un point.

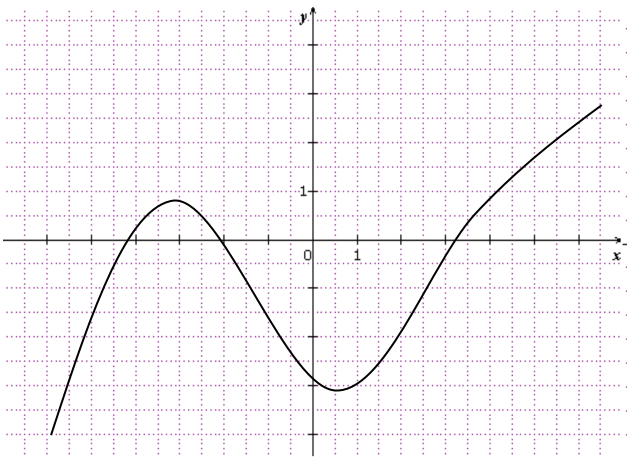
Pour reconnaitre qu'une courbe représentative donnée est celle d'une fonction, on peut procéder comme suit :

- choisir un point sur l'axe des abscisses ;
- tracer la parallèle à l'axe des ordonnées passant par ce point ;
- si toute droite ainsi tracée coupe la courbe en au plus un point, alors cette courbe est celle d'une fonction.

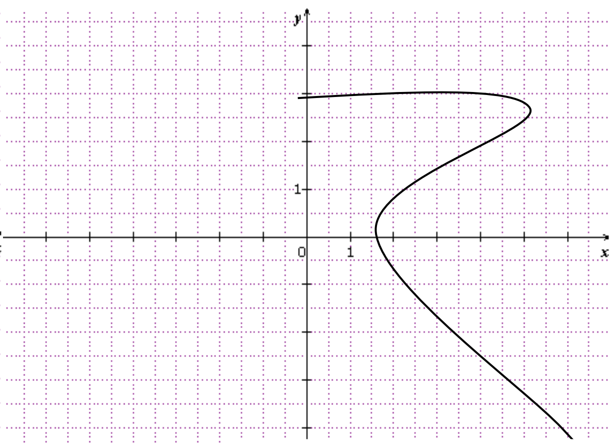
Remarque
Si une droite parallèle à l'axe des ordonnées coupe une courbe en au moins deux points, alors cette courbe n'est pas la courbe représentative d'une fonction.

Exercice de fixation
Répondre par Vrai (V) ou par Faux(F).

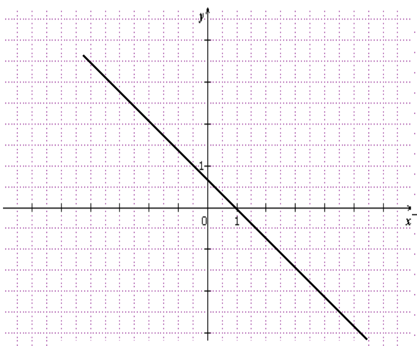
a) La courbe 1 est celle d'une fonction
b) La courbe 2 est celle d'une fonction
c) La courbe 3 n' est pas celle d'une fonction
d) La courbe 4 n' est pas celle d'une fonction



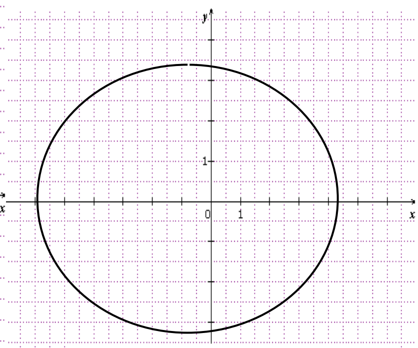
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4

Solution :
. a) V . b) F . c) F d) V
.

5- Détermination d'image et antécédent(s) d'un nombre par une fonction

a) **Détermination algébrique**

- Soit une fonction f et un nombre x appartenant à l'ensemble de définition de f.

L'image de x par la fonction f est le nombre $f(x)$.

- Soit y est le nombre réel. Les antécédents (s'ils existent) du nombre réel y sont les nombres réels x solution de l'équation : $y = f(x)$.

Exemple :
On considère la fonction :

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x^3 + 4x^2 - 6x + 1 \end{aligned}$$

L'Image de -2 par f. est :
$f(-2) = 13$, car : $f(-2) = 2 \times (-2)^3 + 4 \times (-2)^2 - 6 \times (-2) + 1 = -16 + 16 + 12 + 1 = 13$.
13 est l'image de (-2) par f.
Les Antécédents éventuels de 1 par f. sont 0 ;1 et -3 car
Les solutions de l'équation $f(x) = 1$ sont les antécédents de 1 par f. Ce sont : 0 ; 1 ; -3.

Exercices de fixation
Exercice
On considère la fonction :

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{2x-5}{3-x} \end{aligned}$$

dont l'ensemble de définition est $\mathbb{R}\backslash\{3\}$.

1) Calcule les images par f des nombres réels 0 ; 2 ; 4.
2) Calcule l'antécédent par f du nombre réel -1.

Solution

1) Les nombres réels 0 ; 2 ; 4 appartiennent à $\mathbb{R}\backslash\{3\}$. Leurs images peuvent être calculées.
$f(0) = \frac{2\times 0-5}{3-0} = \frac{-5}{3}$; $f(2) = \frac{2\times 2-5}{3-2} = -1$; $f(4) = \frac{2\times 4-5}{3-4} = -3$.
2) **Pour calculer les antécédents de -1**, résolvons l'équation : $x \in \mathbb{R}, f(x) = -1$.
Contraintes sur l'inconnue : $x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$.
Pour tout nombre réel x un élément de $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, on a :

$$\frac{2x-5}{3-x} = -1 \Leftrightarrow 2x - 5 = x - 3$$

$$\Leftrightarrow x = 2.$$

2 appartient à $\mathbb{R}\backslash\{3\}$. L'antécédent de -1 par f est 2.

b) **Détermination graphique**

Point méthode :
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Soit a un élément de l'ensemble de définition de f.
Pour lire graphiquement l'image de $\boldsymbol{a}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{f(a)}$, on procède comme suit :
   - Tracer la droite (D) d'équation $x = \boldsymbol{a}$.
   - L'ordonnée du point d'intersection de (C_f) et (D) est l'image de $\boldsymbol{a}$ par f.

2. Pour lire graphiquement le(s) antécédent(s) éventuels d'un nombre réel $\boldsymbol{b}$ par f, on procède comme suit :

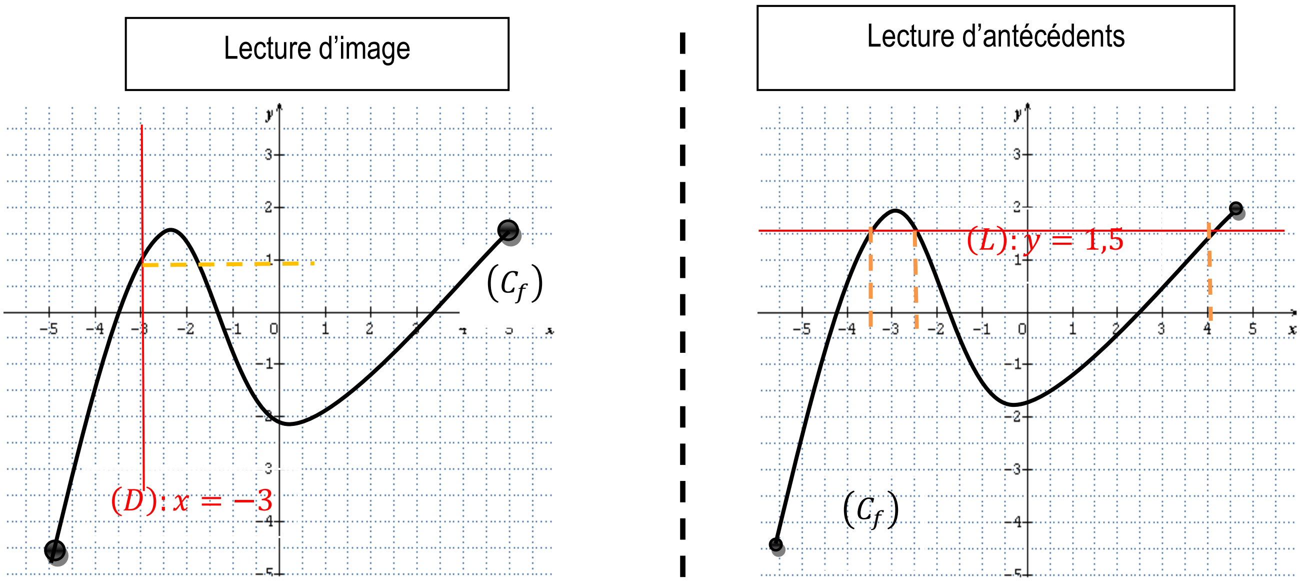
- Tracer la droite (Δ) d'équation $y = \boldsymbol{b}$.
- Les antécédents de $\boldsymbol{b}$ sont les abscisses des points d'intersection éventuels de la droite (Δ) d'équation $y = \boldsymbol{b}$ et de (C_f).

Exercice de fixation

Exercice

Le plan est muni d'un repère. (C_f) est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-5; 3]$.

1. Détermine graphiquement l'image du nombre -3 par f
2. Détermine graphiquement le(s) antécédent(s) du nombre 1,5 par f.



- L'image de -3 par f est 1
- Les antécédents de 1,5 par f $sont$: $-3,5$; $-2,5$ et 4

6- Image directe et image réciproque d'un ensemble par une fonction

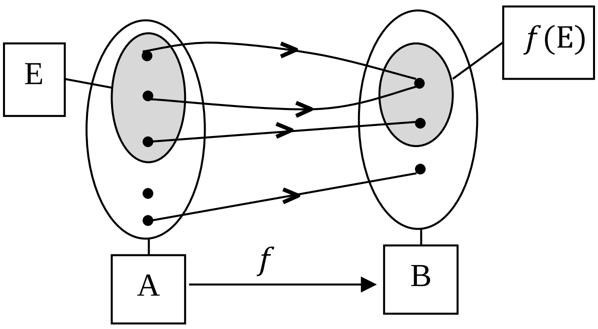
a) Image directe

Définition

Soit f une fonction de A vers B et E une partie de A.

On appelle **image directe** de E par f, l'ensemble des images par f de tous les éléments de E.

On la note f(E).



- **Détermination algébrique**

Exercice de fixation

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 2x^2 - 1$ et A = $\{-1; 0; 1; 5\}$.
Détermine l'image directe de A par f.

Solution

L'image directe de A par f est constituée des images de tous les éléments de A.
On a : $f(-1) = 1$; $f(0) = -1$; $f(1) = 1$ et $f(5) = 49$.
L'image directe de A par f est : f(A) = $\{1; -1; 49\}$.

- **Détermination graphique**

Point méthode

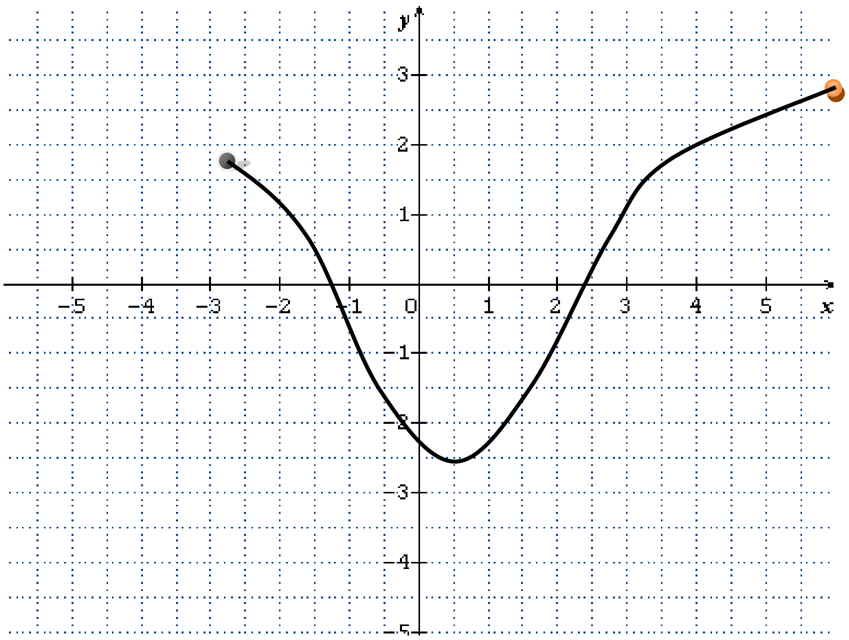
Soit (C) la représentation graphique d'une fonction f dans le plan rapporté à un repère.
Pour déterminer l'image directe d'un intervalle $[a; b]$ par f, on peut procéder comme suit :

- On représente sur l'axe des abscisses l'intervalle $[a; b]$;
- On hachure l'ensemble F des points M du plan dont les couples de coordonnées $(x\ ; y)$ sont tels que : $x \in [a; b]$;
- On détermine l'intersection G de la représentation graphique de (C) avec l'ensemble F ;
- On hachure la bande parallèle à l'axe des abscisses contenant G (ne débordant pas de G) ;
- On détermine l'intersection de cette bande avec l'axe des ordonnées ;
- On repère les points d'ordonnées minimale et maximale de cette intersection ;
- A l'aide de ces ordonnées minimale et du maximale déterminées précédemment, on obtient l'image directe de $[a; b]$ par f.

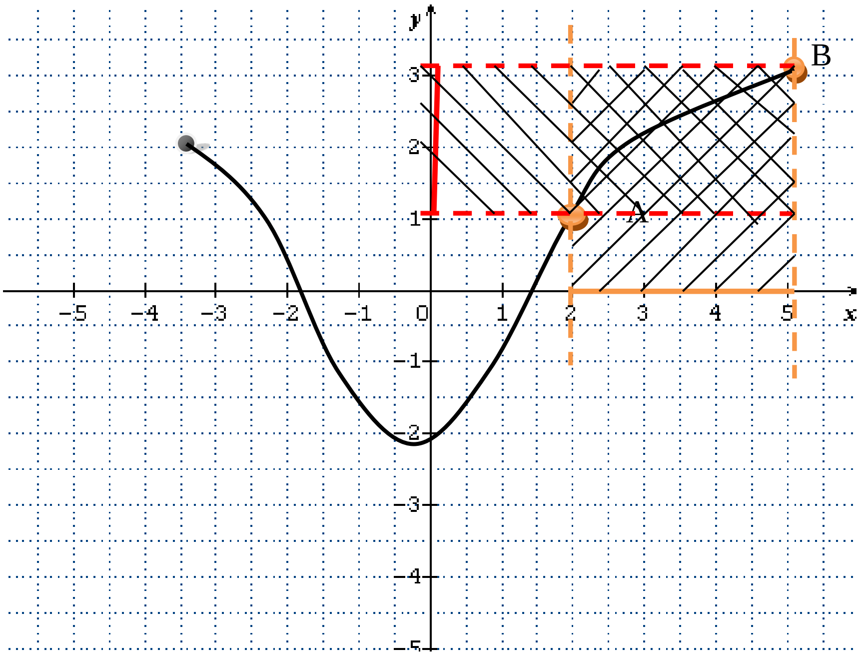
Exercice de fixation

Exercice

Soit f la fonction dont la courbe représentative (C_f) est donnée dans le repère orthogonal ci-après.
Détermine l'image directe par f de l'intervalle $[2; 5]$.



Solution :



On représente sur l'axe des abscisses l'intervalle $[2\ ;\ 5]$.

L'ensemble des points M de (C_f) de coordonnées $(x; y)$ tels que : $x \in [2\ ;\ 5]$ est la portion G de la courbe (C_f) entre A et B. La bande parallèle à l'axe des abscisses contenant G rencontre l'axe des ordonnées en deux points d'ordonnées respectives 1 et 3.

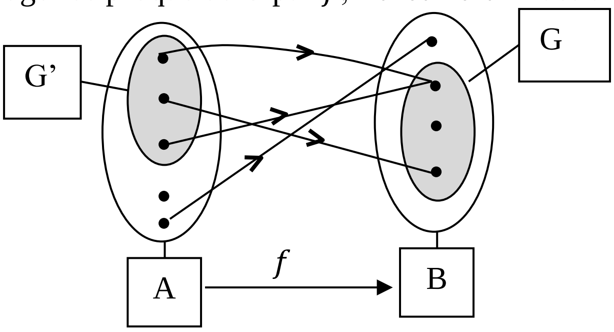
L'image directe de l'intervalle $[2; 5]$ par f est l'intervalle $[1; 3]$.

b) Image réciproque

Définition

f est une fonction de A vers B et G une partie de B.

On appelle image réciproque de G par f, l'ensemble G' des antécédents par f de tous les éléments de G.



- **Détermination algébrique**

  Exercice de fixation

Soit *f* une fonction de ℝ vers ℝ définie par : $f(x) = 2x - 1$ et B = $\{0; -1; 3\}$.

Détermine l'image réciproque de B par *f*.

Solution

Il s'agit de déterminer l'ensemble des antécédents des éléments de B par *f*.

On a :

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$;

$f(x) = -1 \Leftrightarrow x = 0$;

$f(x) = 3 \quad \Leftrightarrow x = 2$;

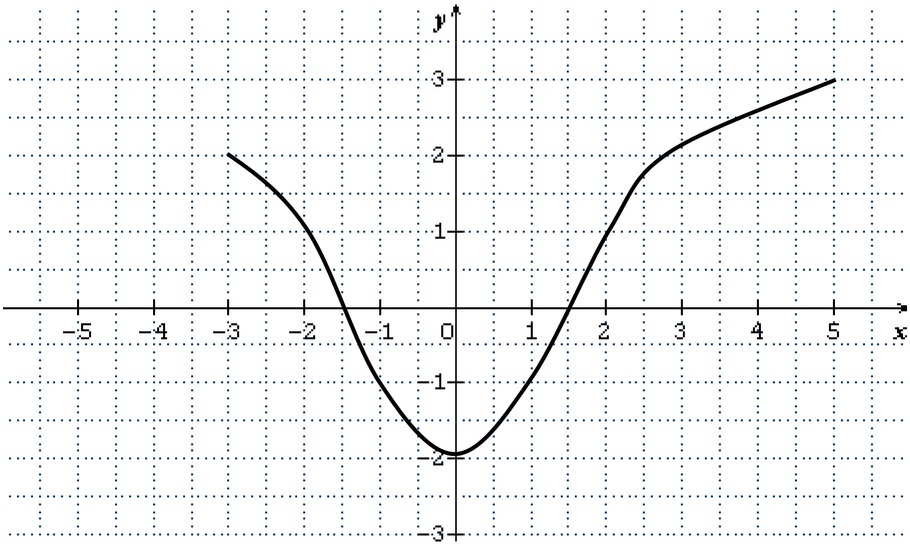
L'image réciproque de B par *f* est : A = $\left\{0; \frac{1}{2}; 2\right\}$.

- **Détermination graphique**

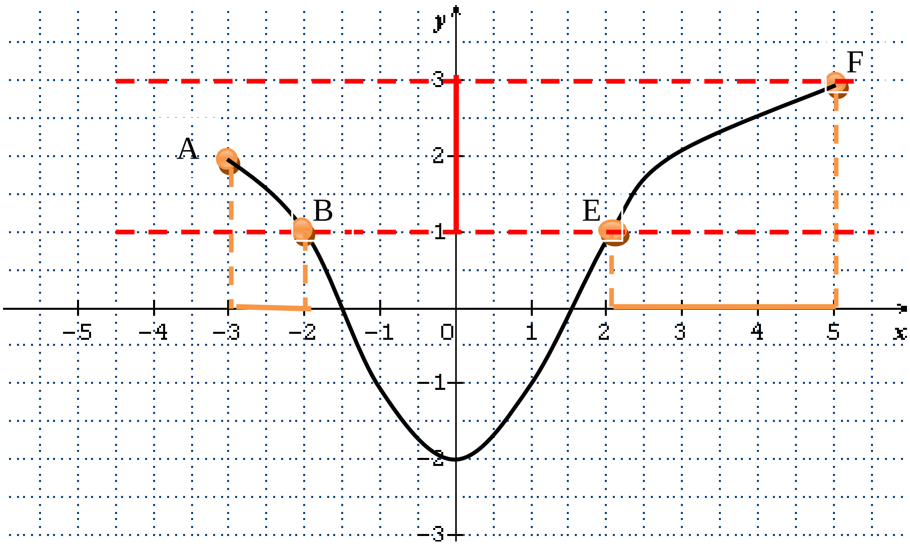
Point méthode
Soit (C) la représentation graphique d'une fonction f dans le plan rapporté à un repère.
Pour déterminer l'image réciproque d'un intervalle $[a; b]$ par f, on peut procéder comme suit :

- On représente sur l'axe des ordonnées l'intervalle $[a; b]$;
- On hachure l'ensemble T des points M du plan dont les couples de coordonnées $(x; y)$ sont tels que : $y \in [a; b]$;
- On détermine l'intersection H de la représentation graphique (C) avec l'ensemble T ;
- On hachure la bande parallèle à l'axe des ordonnées contenant H (ne débordant pas de H) ;
- L'intersection de l'ensemble hachuré précédemment avec l'axe des abscisses permet d'identifier l'image réciproque de $[a; b]$ par f.

Exercice de fixation
Soit f la fonction dont la courbe (C_f) est donnée dans le repère orthogonal ci-après.
Détermine l'image réciproque par f de l'intervalle $[1; 3]$.



Solution :



On représente sur l'axe des ordonnées l'intervalle $[1; 3]$.
L'ensemble des points de (C_f) dont les couples de coordonnées $(x; y)$ sont tels que : $y \in [1; 3]$ est constitué de la réunion des portions de courbes entre A et B et entre E et F.
L'ensemble des abscisses des points de la portion de la courbe comprise entre A et B est l'intervalle $[-3; -2]$ (obtenu en déterminant l'intersection de la bande parallèle à l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses).

L'ensemble des abscisses des points de la portion de la courbe comprise entre E et F est l'intervalle $[2;5]$ (obtenu en déterminant l'intersection de la bande parallèle à l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses).
On en déduit que l'image réciproque par f de l'intervalle $[1;3]$ est la réunion d'intervalles $[-3;-2] \cup [2;5]$.

7- Fonctions égales sur un ensemble

Définition
f et g sont des fonctions définies sur un ensemble E.
On dit que les fonctions f et g sont égales sur E (ou qu'elles coïncident sur E) lorsque, pour tout élément x de E, on a : $f(x) = g(x)$.

Remarque
Les représentations graphiques de fonctions égales sur un ensemble coïncident sur cet ensemble.

Exemple :
Soit les fonctions $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x - 1$ $\qquad$ $x \longmapsto \frac{x^2-1}{x+1}$
f *et* g sont égales sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.
En effet :
Les fonctions f *et* g sont définies sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$
De plus pour tout $x \in]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$, $g(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x - 1 = f(x)$.

Exercice de fixation
Soit les fonctions $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$ $\qquad$ $x \longmapsto x|x|$

Démontre que *f* et *g* sont égales sur $[0;\ +\infty[$.

Solution

Pour tout élément x de $[0;\ +\infty[$, $|x| = x$,
d'où pour élément x de $[0;\ +\infty[$, $g(x) = x^2 = f(x)$.
Les fonctions *f* et *g* sont égales sur $[0;\ +\infty[$.

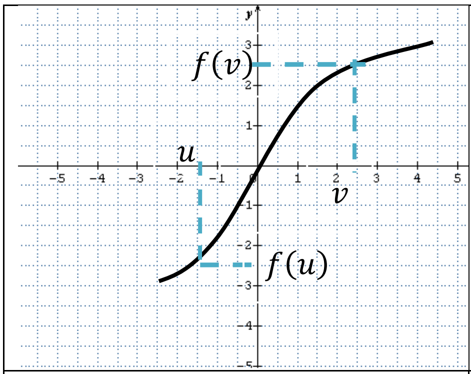
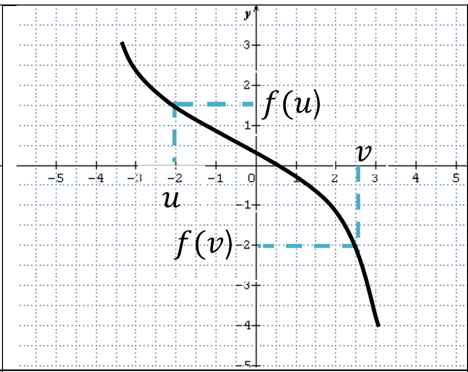
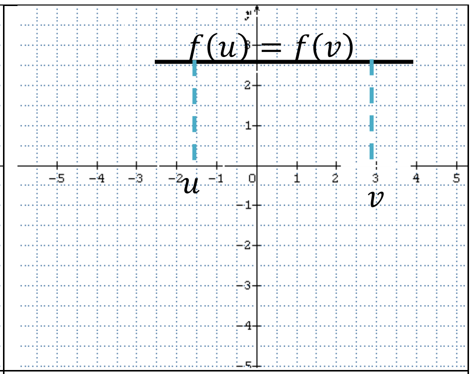
II- VARIATIONS D'UNE FONCTION

1. Sens de variation d'une fonction

Définitions
f est une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle K.

- f est une fonction **croissante** sur K (respectivement **strictement croissante** sur K)
- lorsque pour tous les éléments u et v de K : $u < v \Rightarrow f(u) \leq f(v)$(respectivement $u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$)
- f est une fonction **décroissante** sur K (respectivement **strictement décroissante** sur K)
- lorsque pour tous les éléments u et v de K : $u < v \Rightarrow f(u) \geq f(v)$(respectivement $u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$).
- f est **constante** sur K lorsque pour tous éléments u et v de K, $f(u) = f(v)$.
- f est une fonction **monotone** sur K lorsqu'elle est soit croissante sur K, soit décroissante sur K.
  f est une fonction **strictement monotone** sur K lorsqu'elle est soit strictement croissante sur K, soit strictement décroissante sur K.

Illustrations graphiques

		
$u < v \Rightarrow f(u) \leq f(v)$ *f* est croissante	$u < v \Rightarrow f(u) \geq f(v)$($f$ est décroissante	Pour $u \in$ Ket $v \in$ K, $f(u) = f(v)$. *f* est constante

Remarques

- Une fonction est croissante lorsque les nombres sont rangés dans le même ordre que leurs images
  Une fonction est décroissante lorsque les nombres sont rangés dans l'ordre inverse de leurs images
- Étudier le sens de variation d'une fonction, c'est déterminer les plus grands intervalles sur lesquels la fonction est strictement monotone ou constante.

Exercices de fixation

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (x-3)^2 + 1$
Étudie les variations de *f* sur $]-\infty; 3]$ et sur $[3; +\infty[$.

Solution

• *f* est strictement décroissante sur $]-\infty; 3]$.
En effet :
Soit *u* et *v* appartenant à $]-\infty; 3]$ tels que : $u < v$.

$$u < v \leq 3 \Longrightarrow u - 3 < v - 3 \leq 0$$
$$\Longrightarrow (u-3)^2 > (v-3)^2 \geq 0$$
$$\Longrightarrow (u-3)^2 + 1 > (v-3)^2 + 1$$
$$\Longrightarrow f(u) > f(v)$$

• *f* est strictement croissante sur $[3; +\infty[$.
En effet :
Soit *u* et *v* appartenant à $[3; +\infty[$ tels que : $u < v$.

$$3 \leq u < v \Longrightarrow 0 \leq u - 3 < v - 3$$
$$\Longrightarrow 0 \leq (u-3)^2 < (v-3)^2$$
$$\Longrightarrow (u-3)^2 + 1 < (v-3)^2 + 1$$
$$\Longrightarrow f(u) < f(v)$$

2. Tableau de variation

Un tableau de variation est un tableau qui résume les variations d'une fonction en faisant apparaître les intervalles où elle est strictement monotone ou constante.

Exemple

La figure ci-après est la représentation graphique (Cg) d'une fonction g définie sur l'intervalle [-5 ; 5].

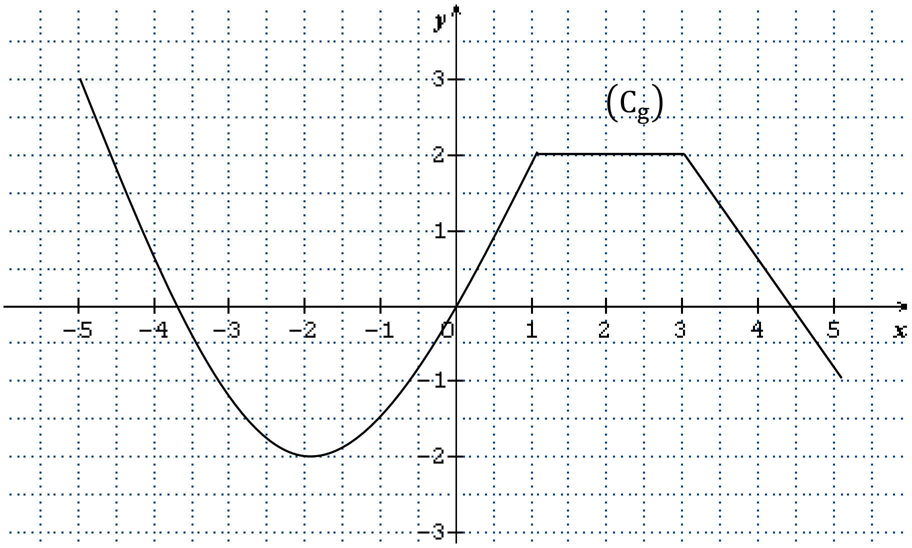


Tableau de variation de g sur $[-5; -2]$

x	-5		-2		1		3		5
$g(x)$	3	↘	-2	↗	2	→	2	↘	-1

En effet :

g est strictement croissante sur $[-2; 1]$;

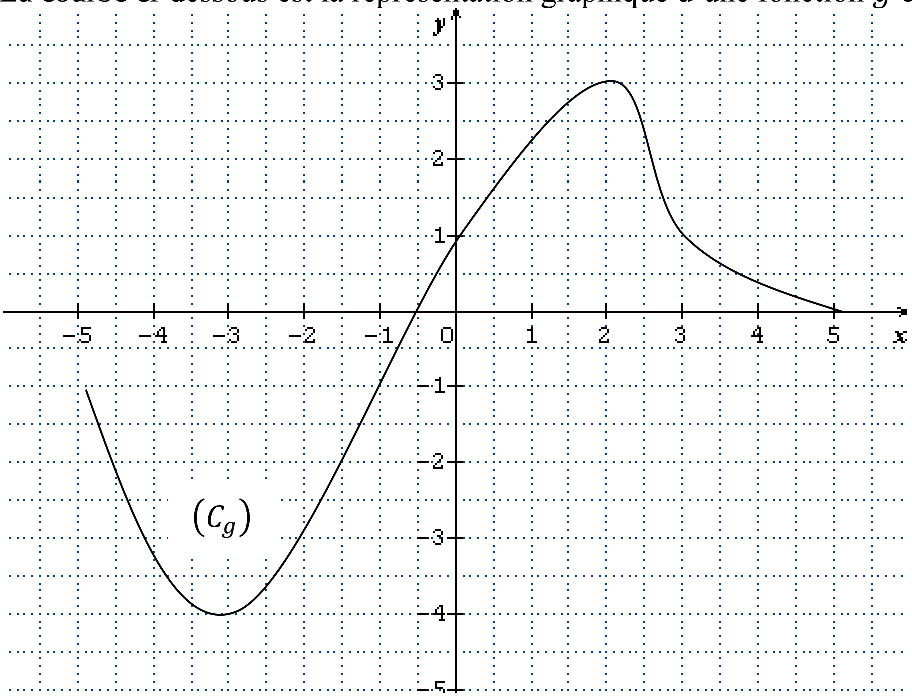
g est strictement décroissante sur $[-5; -2]$ et sur $[3; 5]$;

g est constante sur $[1; 3]$.

Exercices de fixation

Exercice

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction g définie sur $[-5; 5]$



Détermine les variations de g *sur l'intervalle* $[-5;\ 5]$.

Solution

g est strictement croissante sur l'intervalle $[-3; 2]$ et strictement décroissante sur les intervalles $[-5; -3]$ et $[2\ ; 5]$.

3. Maximum-Minimum d'une fonction

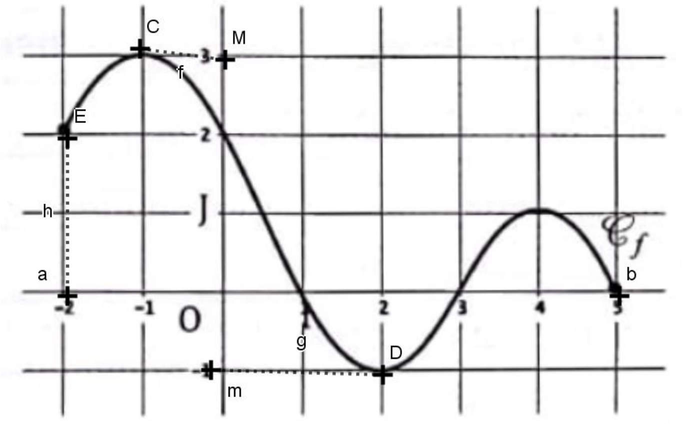
Définition

Soit f est une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle E ; a et b deux éléments de E.
Lorsque pour tout élément x de E, $f(a) \geq f(x)$, on dit que $f(a)$ est le maximum de f sur E.
Lorsque pour tout élément x de E, $f(b) \leq f(x)$, on dit que $f(b)$ est le minimum de f sur E.

Exercices de fixation

Exercice 1

Sur figure ci-dessous, (C_f) est la représentation graphique d'une fonction f sur l'intervalle $[-2\ ; 5]$.
Détermine le maximum et le minimum de f sur $[-2\ ; 5]$.

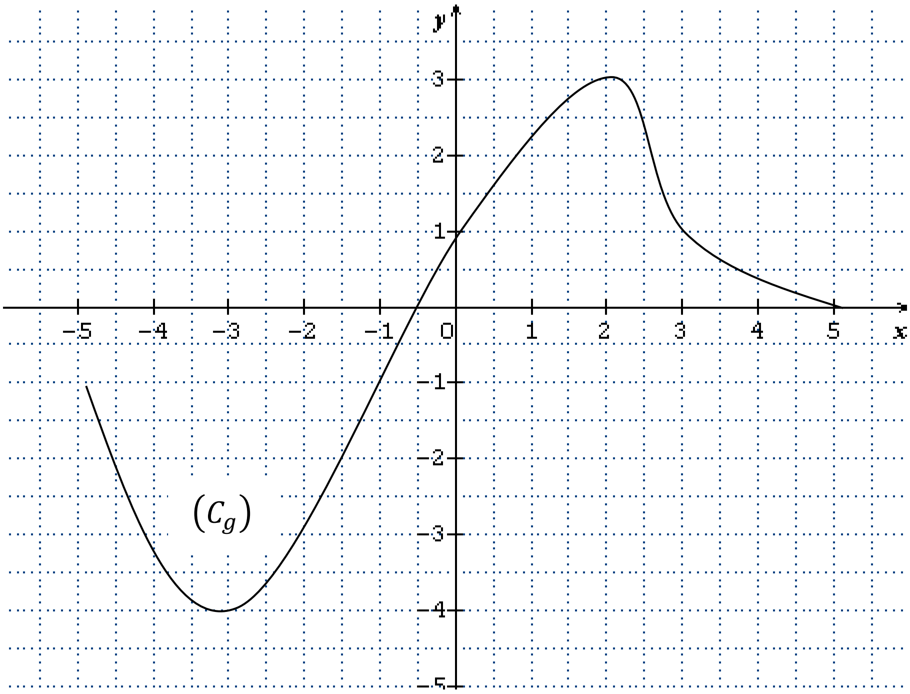


Solution

Le maximum de f sur $[-2\ ; 5]$ est 3.
Le minimum de f sur $[-2\ ; 5]$ est -1.
On dit que, sur l'intervalle $[-\ 2\ ; 5]$, f admet en -1 un maximum égal à 3 et en 2 un minimum égal à $-\ 1$.

Exercice 2

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction g définie sur l'intervalle $[-5; 5]$



Détermine graphiquement le maximum et le minimum de la fonction g sur son ensemble de définition.

Solution

Le minimum de f sur l'intervalle $[-5\,;5]$ est -4 ;
Le maximum de f sur l'intervalle $[-5\,;5]$ est 3.

C-SITUATION COMPLEXE

Un camion-citerne veut vider 5000 litres d'eau dans une piscine. Après avoir versé 250 litres d'eau, l'employé chargé de l'opération laisse le robinet ouvert. Le fils du propriétaire, élève en classe de seconde C, impatient, veut connaitre le temps que mettra le camion pour mettre un volume d'eau maximum dans la piscine. Pour cela, il met le chronomètre de sa montre à zéro. Le débit du robinet est 2 litres par seconde.

Détermine le temps au bout duquel le volume d'eau dans la piscine atteint son maximum.

Solution

Ce problème se rapporte à la leçon fonction en particulier maximum d'une fonction.
Pour déterminer ce temps,
Nous allons déterminer l'expression de la fonction $f(t)$ qui permet de vider le camion-citerne
En fonction du temps.
Nous calculerons le volume v_o restant dans citerne,
Puis résoudre l'équation $f(t) = v_o$; avant de conclure

Déterminons l'expression de la fonction $f(t)$ (t le temps en secondes)

- Le débit étant de 2litres par seconde ; alors on a
- $f(t) = 2t$, (la quantité d'eau qui s'écoule en t secondes)

La quantité d'eau restant après avoir versé 250 litres est : 5000-250=4750 litres

Résoudre l'équation $f(t) = 4750$

$f(t) = 4750 \Leftrightarrow 2t = 4750$

$\Leftrightarrow t = \frac{4750}{2}$

$\Leftrightarrow t = 2375\ secondes$=39 minutes 35secondes

La piscine atteint son maximum lorsque la citerne est entièrement vidée et le temps nécessaire est De 39 minutes 35secondes

D-EXERCICES

Exercice 1

Soit les fonctions $f, g, h\ et\ k\ de\ \mathbb{R}\ vers\ \mathbb{R}$ définies par leurs expressions explicites. Détermine l'ensemble de définition de chacune d'elles.

1) $f(x) = (2x^2 + 3)(x - 4)$; 2) $g(x) = \dfrac{2x + 3}{(x - 1)(-x + 5)}$; 3) $h(x) = \sqrt{-3x + 3}$

Solution

1) $x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Donc $D_f = \mathbb{R}$.

2) $x \in D_g \Leftrightarrow (\, x \in \mathbb{R}$ et $(x - 1)(-x + 5) \neq 0\,)$.

$\Leftrightarrow (\, x \in \mathbb{R} ;\ x - 1 \neq 0$ et $-x + 5 \neq 0\,)$

$\Leftrightarrow (\, x \in \mathbb{R} ;\ x \neq 1$ et $x \neq 5)$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 5\}$. Donc $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1; 5\}$.

3) $x \in D_h \Leftrightarrow (\, x \in \mathbb{R}$ et $-3x + 3 \geq 0)$

$\Leftrightarrow (\, x \in \mathbb{R}$ et $x \leq 1\,)$.

$\Leftrightarrow x \in]-\infty; 1]$. Donc $D_h =]-\infty; 1]$.

Exercice 2

Le plan est muni du repère (O, I, J). (C_g) est la représentation graphique de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 + 1$.

1) Les points $E\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, F\begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix}$ $et\ G(3; 20)$ appartiennent-ils à (C_g) ?
2) Justifie que la fonction g est strictement croissante sur$[0; +\infty[$.
3) Justifie que la fonction g est strictement décroissante sur$]-\infty; 0]$.

Solution

1) $(0) = 1$. Donc $E\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in (C_g)$.

$g(2) = 2 \times 4 + 1 = 9$. Donc $F\begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix} \notin (C_g)$.

$g(3) = 2 \times 9 + 1 = 19$. Donc $G(3; 20) \notin (C_g)$.

2) Soit u et v deux éléments de $[0; +\infty[$ tels que $u < v$. Justifions que $g(u) < g(v)$.

On a : $0 \leq u < v$ donc $u^2 < v^2$

$2\,u^2 < 2\,v^2$

$2\,u^2 + 1 < 2\,v^2 + 1$

C'est à dire $g(u) < g(v)$.

Pour deux éléments u et v de $[0; +\infty[$,

3) Soit u et v deux éléments de $]-\infty; 0]$ tels que $u < v$. Justifions que $g(u) > g(v)$.

On a : $u < v \leq 0$ donc $u^2 > v^2$

$2\,u^2 > 2\,v^2$

$2\,u^2 + 1 > 2\,v^2 + 1$

C'est à dire $g(u) > g(v)$.

Pour deux éléments u et v de $]-\infty; 0]$,

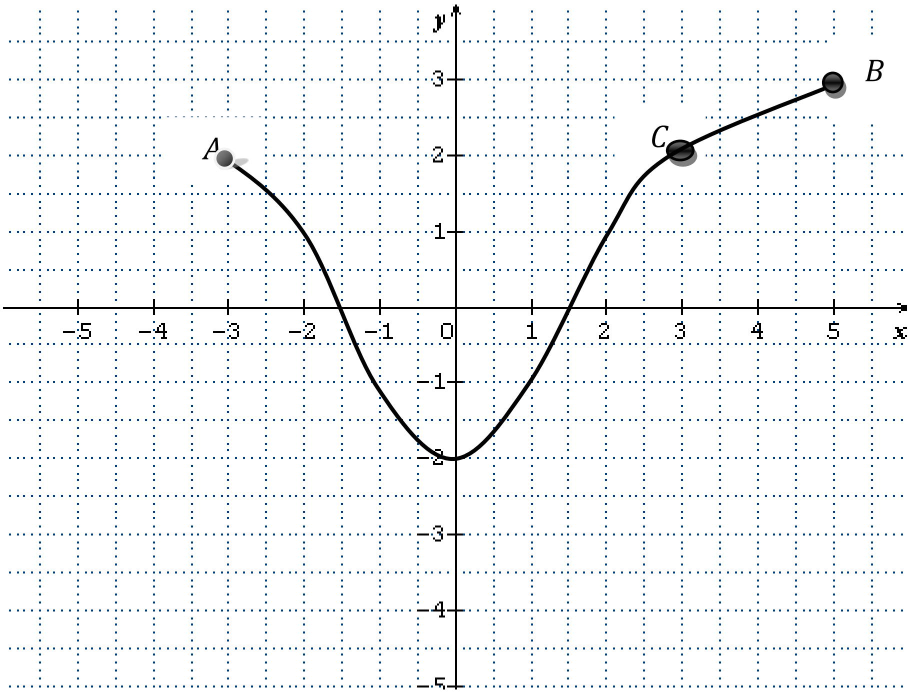
$u < v \Longrightarrow g(u) < g(v)$ donc la fonction g est strictement croissante sur$[0; +\infty[$.

$u < v \Longrightarrow g(u) > g(v)$ donc la fonction g est strictement décroissante sur$]-\infty; 0]$.

Exercice 3

Soit f la fonction dont la courbe (C_f) est donnée ci-après

1) Détermine graphiquement l'ensemble de définition de f.
2) Lis graphiquement les images par $f$de 2 et 0.
3) Lis graphiquement le(s) antécédents par f de 2 et -2.



Solution

1) $D_f = [-3; 5]$

2) $f(2) = 1$ et $f(0) = -2$.

3) Les antécédents par f de 2 : -3 et 3.
L'antécédent par f de -2 : 0 .

Exercice 4

Soit f et g, les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{x^3+x}{x^2+1}$

Démontre que les fonctions f et g sont égales sur $\mathbb{R}$.

Solution

$D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$ donc $D_f = D_g$.

Pour $x \in D_g$, $g(x) = \frac{(x^2+1)x}{x^2+1} = x = f(x)$. Donc f et g sont égales sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes :

N^O	Affirmations	Réponses
1	On appelle fonction de A vers B toute correspondance de A vers B, qui à tout élément de A associe 0 ou 1 élément de B.	
2	On appelle fonction de A vers B toute correspondance de A vers B, qui à tout élément de A associe au moins deux éléments de B	
3	Si f est une fonction, de A vers B, B est l'ensemble de départ et A l'ensemble d'arrivée de f	

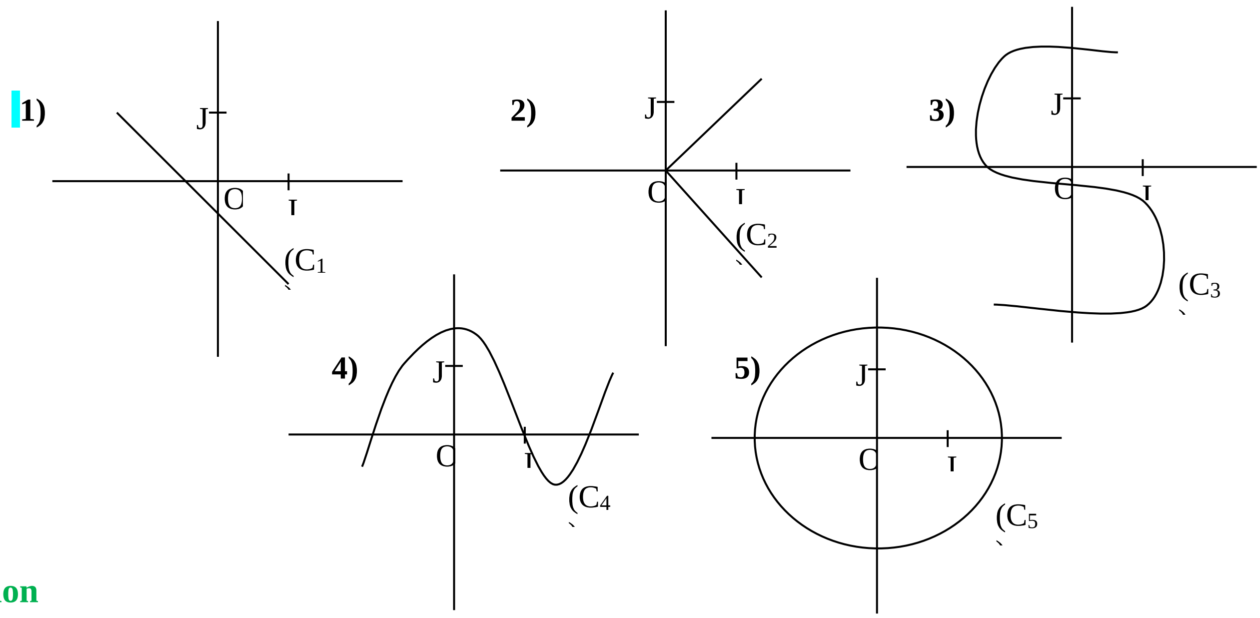
4	Par une fonction, un élément de l’ensemble d’arrivée peut avoir plusieurs antécédents dans l’ensemble de départ	

Solution

1	Vrai
2	Faux
3	Faux
4	Vrai

Exercice 6

Observe les schémas ci-dessous puis écris les numéros des courbes qui sont des représentations graphiques d’une fonction.



Solution

Les courbes des graphiques 1) et 4) sont celles de fonctions car toute droite parallèle à l’axe des ordonnées les coupent en zéro ou un point.

Exercice 7

Traduis les phrases suivantes à l’aide d’égalités :

a) -5 est l’image de 4 par la fonction h ;
b) L’image de 2 par la fonction f est 0 ;
c) 5 est l’antécédent de -3 par la fonction g.

Solution

a) h(4)= -5.
b) f(2) = 0.
c) $g^{-1}(-3) = 5$.

Exercice 8

Parmi les tableaux ci-dessous, indique ceux qui déterminent une fonction :

1	**3**	**5**	**7**
2	**3**	**6**	**2**

Tableau 1

-5	**0**	**-5**	**7**
-3	**5**	**3**	**2**

Tableau 2

4	**0**	**-5**	**7**
1	**1**	**1**	**2**

Tableau 3

Solution

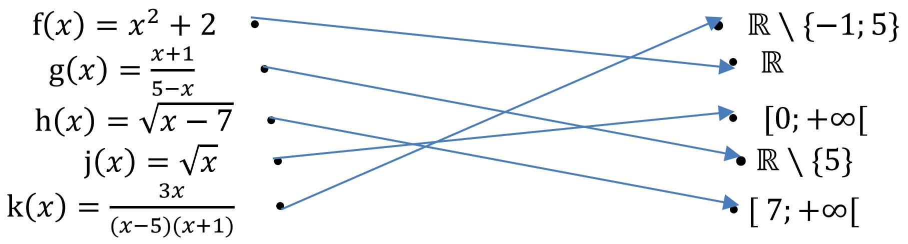
Les tableaux 1 et 3 déterminent deux fonctions. Dans le tableau 2, l'élément -5 de l'ensemble de départ a deux correspondants -3 et 3.

Exercice 9

Relie chaque expression explicite de fonction à son ensemble de définition.

$f(x) = x^2 + 2$ •	• $\mathbb{R} \setminus \{-1; 5\}$
$g(x) = \frac{x+1}{5-x}$ •	• $\mathbb{R}$
$h(x) = \sqrt{x-7}$ •	• $[0; +\infty[$
$j(x) = \sqrt{x}$ •	• $\mathbb{R} \setminus \{5\}$
$k(x) = \frac{3x}{(x-5)(x+1)}$ •	• $[7; +\infty[$

Solution



Exercice 10

Soit $f(x) = -x^2 + 5.\ et\ g(x) = \frac{2x-3}{x-1}$

1) Calcule l'image par $f et g$ de $0; -2\ et\ \sqrt{2}$.
2) Détermine le ou les antécédents de 1 par chaque fonction.

Solution :

1) $(0) = 5$, $f(-2) = 1$, $f(\sqrt{2}) = 3$, $g(0) = 3$, $g(-2) = \frac{7}{3}$ et $g(\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2}$.

2)

$f(x) = 1 \Leftrightarrow -x^2 + 5 = 1$ $\Leftrightarrow \quad x^2 = 4$ $\Leftrightarrow (x = -2$ ou $x = -2)$ Les antécédents de 1 par f sont -2 et 2	$g(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-1} = 1$ $\Leftrightarrow 2x - 3 = x - 1$ $\Leftrightarrow x = 2$ L' antécédent de 1 par g est 2 .

Exercice 11

$f\ etg$ sont des fonctions définies par :

. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x$ et $et\ g(x) = \frac{2}{x^4} - \frac{3}{x^3} + \frac{4}{x^2} - \frac{5}{x}$

1) Détermine D_f et D_g les ensembles de définitions respectifs des fonctions f et g.
2) Calcule l'image par f et g de chacun des nombres suivants :10^{-1} ; $10; -10; -10^{-1}$

Solution :

1) $D_f = \mathbb{R}$ f est une fonction polynôme.

$x \in D_g \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0)$.

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2) Calculons l'image par f et g de chacun des nombres suivants :10^{-1} ; $10; -10; -10^{-1}$

$f(10^{-1}) = g(10) = 2 \times 10^{-4} - 3 \times 10^{-3} + 4 \times 10^{-2} - 5 \times 10^{-1} = -0{,}4628.$

$f(-10^{-1}) = g(-10) = 2 \times 10^{-4} + 3 \times 10^{-3} + 4 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-1} = 0{,}5432.$
$f(10) = g(10^{-1}) = 2 \times 10^{4} - 3 \times 10^{3} + 4 \times 10^{2} - 5 \times 10 = 17350.$
$f(-10) = g(-10^{-1}) = 2 \times 10^{4} + 3 \times 10^{3} + 4 \times 10^{2} + 5 \times 10 = 23450.$

Exercice 12

h est la fonction définie par :$h(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$. (c_h) est la courbe représentative de h.

Détermine l'ordonnée du point de (Ch) dont l'abscisse est $\frac{-2}{3}$.

Solution :

$$h\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{\frac{-2}{3}+1}{(\frac{-2}{3})^2-4} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{-32}{9}} = \frac{1}{3} \times \frac{9}{-32} = \frac{-3}{32}.$$

L'ordonnée du point de (Ch) dont l'abscisse est $\frac{-2}{3}$ est $\frac{-3}{32}$.

Exercice 13

Dans chacun des cas suivants, dire si les fonctions f et g sont égales sur $\mathbb{R}$ ou non. Sinon préciser le plus grand ensemble sur lequel f et g coïncident.

1) $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{x^3-x}{x^2-1}$
2) $f(x) = \sqrt{x^2}$ et $g(x) = |x|$

Solution :

1) $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

Pour $x \in D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ $g(x) = \frac{x^3-x}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1)}{x^2-1} = x = f(x)$.

$D_f \neq D_g$ donc les fonctions f et g ne sont pas égales sur $\mathbb{R}$.

Le plus grand ensemble sur lequel f et g coïncident est $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

2) $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g(x) = \sqrt{x^2} = |x| = f(x)$ donc f et g sont égales sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14

Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{3x}{x^2-2x+1}$
2) $g(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x+4}$
3) $h(x) = \sqrt{-3x+9}$
4) $j(x) = \frac{5x}{x^2+3}$
5) $p(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x+1}$
6) r(x)=$\frac{\sqrt{x+1}}{x^2-4}$

Solution :

1) $x \in D_f \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R}$ et $x^2 - 2x + 1 \neq 0)$.
$\Leftrightarrow (x \in \mathbb{R}$ et $(x-1)^2 \neq 0)$
$\Leftrightarrow (x \in \mathbb{R}$ et $x \neq 1)$.
Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

2) $x \in D_g \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R}, x + 4 \neq 0$ et $2 - x \geq 0)$
$\Leftrightarrow (x \in \mathbb{R}, x + 4 \neq 0$ et $2 - x \geq 0)$
$\Leftrightarrow (x \in \mathbb{R}, x \neq -4$ et $x \leq 2)$
Donc $D_g =]-\infty; 2] \setminus \{-4\}$

$x \in D_h \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R};\ -3x + 9 \geq 0)$
$x \in D_h \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R}$ et $x \leq \frac{9}{3}$
Donc $D_h =]-\infty; 3]$

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $x^2 + 3 \neq 0$ donc D_J =$\mathbb{R}$.

5) $x \in D_p \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ et $1 + x \geq 0)$
$\Leftrightarrow (x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ et $x \geq -1)$

6)
$x \in D_r \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 \neq 0$ et $x + 1 \geq 0)$

Donc D_g =$[-1;+\infty[\setminus\{0\ \}$ = $[-1;0[\cup]0:+\infty[$

$\Leftrightarrow (x \in \mathbb{R}, (x+2)(x-2) \neq 0$ et $x \geq -1)$

$\Leftrightarrow (x \in \mathbb{R}, x \neq -2, x \neq 2$ et $x \geq -1)$

Donc D_g =$[-1;+\infty[\setminus\{2\ \}$ = $[-1;2[\cup]2:+\infty[$

Exercice 15

On donne la fonction h de ℝ vers ℝdéfinie par : $\mathrm{h(x)} = \frac{3}{\mathrm{x}^2+2}$

1) Détermine l'ensemble de définition D_h de la fonction h.

2) Démontre que $\frac{3}{2}$ est le maximum de h.

Solution

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $x^2+2 \neq 0$ donc D_h =ℝ.

2) Pour $x \in \mathbb{R}; x^2+2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{x^2+2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{x^2+2} \leq \frac{3}{2}$ donc $h(x) \leq \frac{3}{2}$. De plus $h(0) = \frac{3}{2}$.
Par suite $\frac{3}{2}$ est le maximum de h.

Exercice 16

I- On considéré la fonction f de ℝ vers ℝ définie par : $\mathrm{f(x)} = (\mathrm{x}-2)^2+1$

1) Démontre que f est croissante sur $[2\,;+\infty[$

2) Démontre que f est décroissante sur $]-\infty\,;2]$

3) Dresse le tableau de variation de f.

4) En déduis que f n'est ni croissante ni décroissante sur $[1;5]$

Solution

1) Démontrons que f est croissante sur $[2\,;+\infty[$

Soit u et v des élements $[2;+\infty[$; tel que $2 \leq u \leq v$;

Alors $0 \leq u-2 \leq v-2$;

$0 \leq (u-2)^2 \leq (v-2)^2$;

$0 \leq \leq (u-2)^2+1 \leq \leq (v-2)^2+1$;
$f(u) \leq f(v)$

Ainsi pour tout nombre réel u et v des éléments de $[2\,;+\infty[$; tels que $2 \leq u \leq v$, $f(u) \leq f(v)$
donc f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$.

2) Démontrons que f est décroissante sur $]-\infty\,;2]$

Soit u et v des éléments de $]-\infty\,;2]$; tels que. $u \leq v \leq 2$;

$$u-2 \leq v-2 \leq 0\,;$$

Alors $0 \leq (v-2)^2 \leq (u-2)^2$;

$$0 \leq (v-2)^2+1 \leq (u-2)^2+1\,;$$
$$f(v) \leq f(u)$$

Ainsi pour tout nombre réel u et v des éléments $]-\infty\,;2]$; tels que $u \leq v \leq 2$,

$f(v) \leq f(u)$ donc g est strictement décroissante sur $]-\infty;2]$.

3) tableau de variation

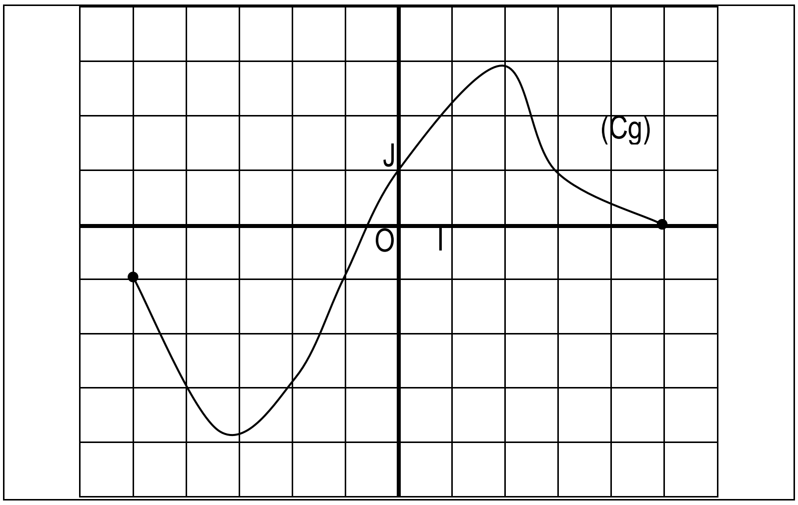
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	1	↗

4) Sur $[1;5]$, $1 \leq 2 \leq 3$; $f(1)=2$, $f(2)=1$ et $f(4)=10$.
$f(1) > f(2)$ donc f n'est pas croissante.
$f(1) < f(4)$ donc f n'est pas décroissante.

Exercice 17

I-La figure ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction numérique g.

1) Détermine l'ensemble de définition Dg de la fonction g.
2) Détermine s'ils existent le maximum et le minimum de g sur Dg.
3) Précise les variations de la fonction g sur Dg.
4) Dresse le tableau de variation de g sur Dg.



II- Démontre que la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = 3 - |x-4|$ admet un maximum égal à 3 sur son ensemble de définition.

Solution

1) $Dg = [-5; 5]$
2) Le maximum de g est 3 et le minimum de g est $-3{,}8$.
3) La fonction g est décroissante sur les intervalles $[-5; -3]$ et $[3; 5]$.
   La fonction g est croissante sur l'intervalle $[-3; 3]$.

4) Le tableau de variation de g sur Dg

x	-5		-3		3		5
$g(x)$	-1	$\searrow$	$-3{,}8$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

Exercice 18

L'unité est le centimètre.

Un rectangle a pour périmètre constant égal à 40. On note x sa longueur et h sa largeur. On se propose de trouver ses dimensions lorsqu'il a une aire maximale.

1) Exprime sa largeur h en fonction de x.
2) Justifie que l'aire est égale à : $-(x-10)^2+100$
3) Démontre que pour x égal à 10, l'aire est maximale et détermine ce maximum.

Solution

1) La longueur est x et le périmètre est 40.
   Sa largeur est h= $\frac{40-2x}{2}$ =20- x

2) L'aire $a(x) = x(20-x) = -x^2 + 20x = -(x-10)^2 + 100$

3) pour x=10, l'aire est $a(10) = 100$.

Pour tout $x \in [0\,; +\infty[$; $-(x-10)^2 + 100 \leq 100$

$$a(x) \leq 100$$