MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE L'ALPHABETISATION

INISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT TECHN ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ECOLE A LA MAISON

SECONDAIRE

2 C

MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 06 heures **Code :**

COMPETENCE 3 : **Traiter une situation relative à la géométrie du plan, à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan.**

THEME 1 : **Géométrie du Plan.**

LECON 3 : UTILISATION DES SYMETRIES ET TRANSLATIONS

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Akissi est une élève de seconde C. Lors de ses recherches sur internet, elle découvre les gravures ci-dessous. Emerveillée par l'harmonie de ces figures, elle les présente à ses camarades de classe.
L'un d'entre eux affirme qu'on peut obtenir chacune de ces figures à partir d'un seul élément les composant, en utilisant des symétries ou des translations. N'étant pas convaincus de cette affirmation, Akissi et ses camardes décident d'approfondir leurs connaissances sur l'utilisation des symétries et des translations.

Figure 1 :

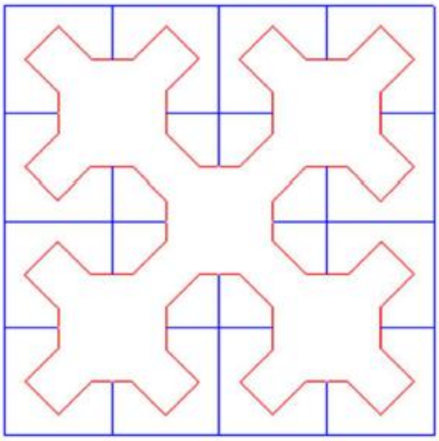
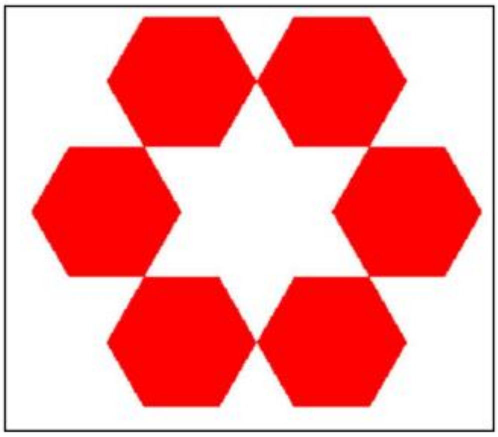


Figure 2



B. CONTENU DE LA LECON

1. Applications du plan

1.1 Définition

On appelle application du plan, toute correspondance f du plan dans lui-même qui à chaque point M associe un unique point M'.

M'est appelé image de M par f et M est un antécédent de M' par f.

Si $M' = M$, on dit que M est invariant par f.

1.2 Exemple

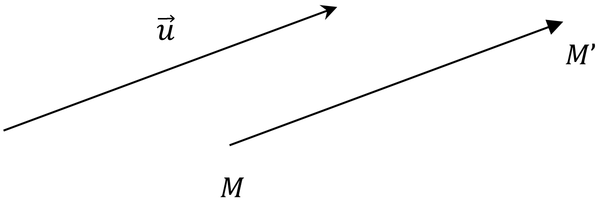
La symétrie par rapport à un point et la symétrie par rapport à une droite sont des applications du plan.

2. Translation

2.1 Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur.

On appelle translation de vecteur $\vec{u}$, l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{\mathbf{MM'}} = \vec{\mathbf{u}}$.



La translation de vecteur $\vec{u}$ est notée : $t_{\vec{u}}$. Ainsi, on note : $\mathbf{M' = t_{\vec{u}}(M)}$.

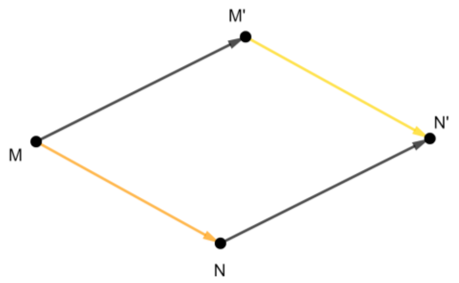
Point invariant : - Lorsque le vecteur $\vec{u}$ est non nul, $t_{\vec{u}}$ n'admet pas de point invariant.
- Lorsque le vecteur $\vec{u}$ est nul, tous les points du plan sont invariants par $t_{\vec{u}}$. On dit que $t_{\vec{u}}$ est l'application identité du plan.

2.2 Propriété caractéristique de la translation

Propriété

Soit f une application du plan dans le plan.

f est une translation si et seulement si pour tous points M et N distincts, d'images respectives M' et N', on a : $\overrightarrow{\mathbf{M'N'}} = \overrightarrow{\mathbf{MN}}$**.**



$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

Exercice de fixation :

Soit ABC un triangle quelconque.

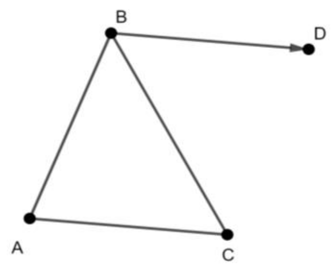
D est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

Justifie que : $\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$

Solution :

C est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

$\mathrm{t}_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}(\mathrm{A}) = \mathrm{C}$ et $\mathrm{t}_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}(\mathrm{B}) = \mathrm{D}$ donc d'après la propriété caractéristique des translations, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$



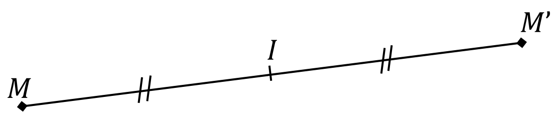
3. Symétrie centrale

3.1 Définition

Soit I un point du plan

On appelle symétrie centrale de centre I, l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tel que : I est le milieu du segment [MM'] si $M \neq I$ et si $M = I$ alors $M' = I$.

On note : $\mathbf{M'} = \mathbf{S_I(M)}$**.**



Point invariant : Le seul point invariant de la symétrie centrale de centre I est le point I.

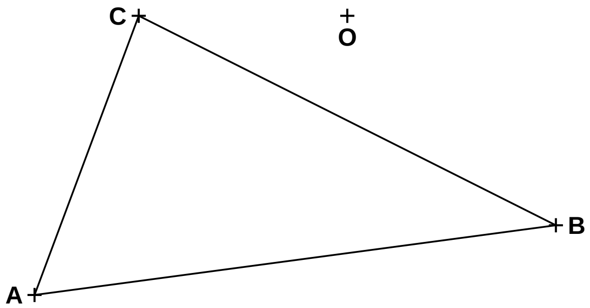
3.2 Propriété

I est un point du plan.

$\mathbf{M' = S_I(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}}$**.**

Exercice de fixation

Reproduis la figure ci-dessous, puis construis l'image du triangle ABC par la symétrie de centre O.

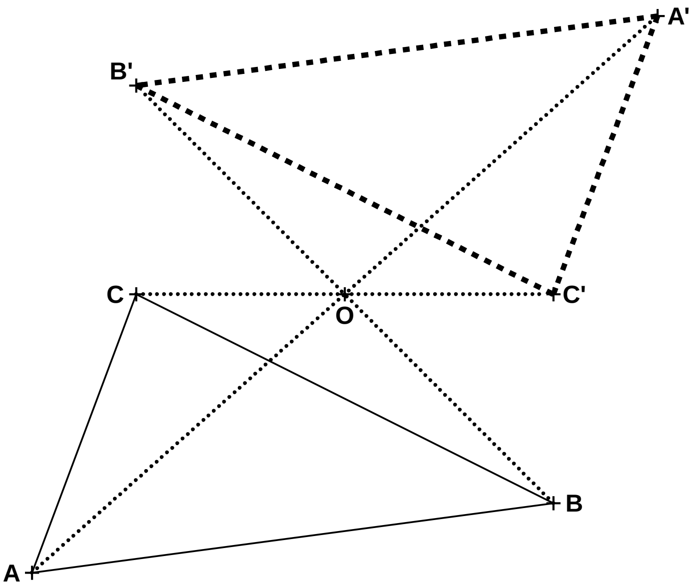


Solution :

$\mathrm{S_I(A)} = A'$, $\mathrm{S_I(B)} = B'$ et $\mathrm{S_I(C)} = C'$.

On a donc : $\overrightarrow{\mathrm{IA'}} = -\overrightarrow{\mathrm{IA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{IB'}} = -\overrightarrow{\mathrm{IB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IC'}} = -\overrightarrow{\mathrm{IC}}$.

On obtient la figure ci-dessous.



3.3 Propriété caractéristique de la symétrie centrale

Propriété

Soit f une application du plan dans le plan.

f est une symétrie centrale si et seulement si pour tous points M et N distincts, d'images respectives M' et N', on a : $\overrightarrow{\mathbf{M'N'}} = -\overrightarrow{\mathbf{MN}}$.

Exercice de fixation

Soit ABC un triangle quelconque.

$\mathrm{S_A(B)} = E$ et $\mathrm{S_A(C)} = F$

Démontre que : $\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \overrightarrow{CB}$

Solution :

$\mathrm{S_A(B)} = E$ et $\mathrm{S_A(C)} = F$ donc d'après la propriété caractéristique de la symétrie centrale,

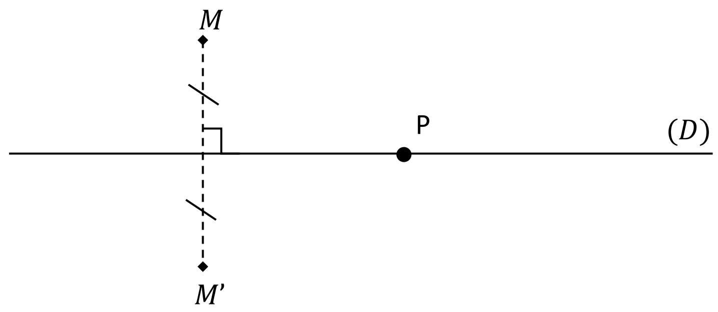
4. Symétrie orthogonale

Définition

(D) est une droite du plan.

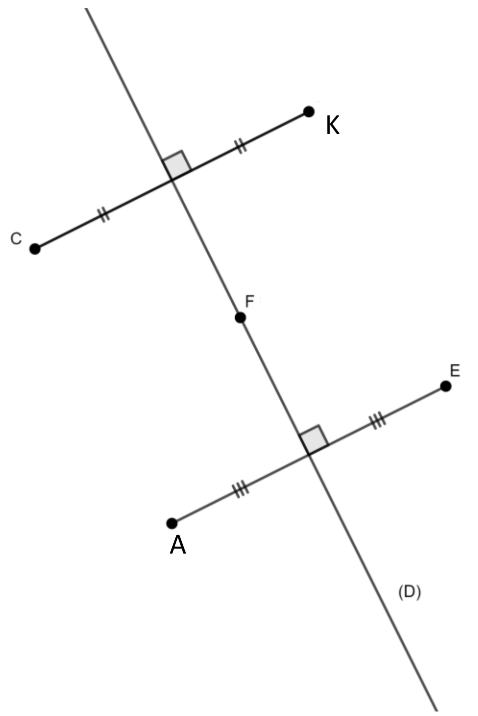
On appelle symétrie orthogonale d'axe (D), l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tel Que la droite (D) est la médiatrice du segment [MM'] si M ∉ (D) et M'=M si M ∈ (D).

On la note : $S_{(D)}(M) = M'$



<u>Points invariants</u> : les points invariants de $S_{(D)}$ sont les points de la droite (D). On dit que la droite (D) est invariante point par point par la symétrie orthogonale d'axe (D).

Exemple
On donne la figure codée ci-dessous.



On a :

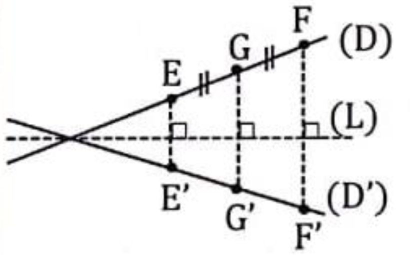
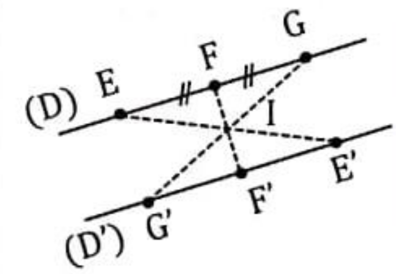
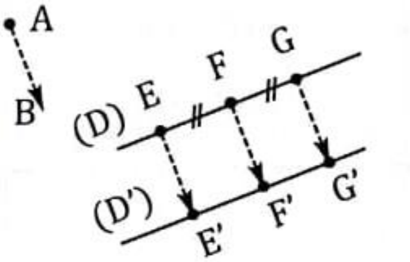
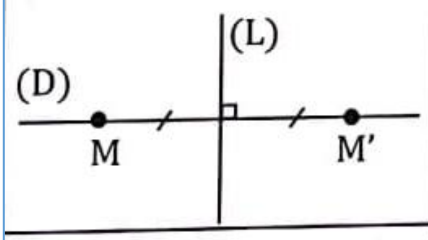
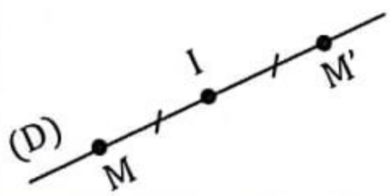
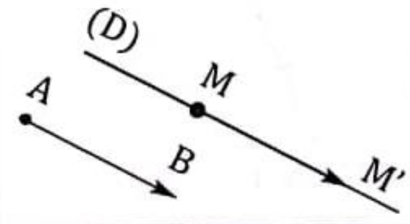
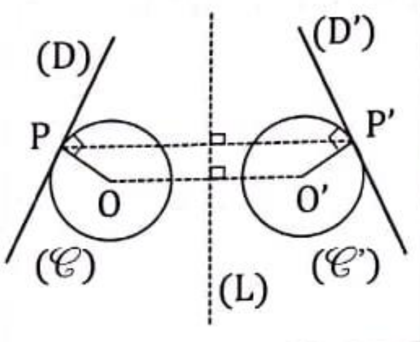
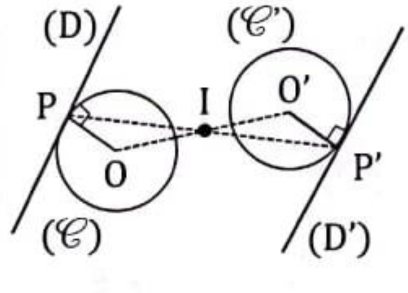
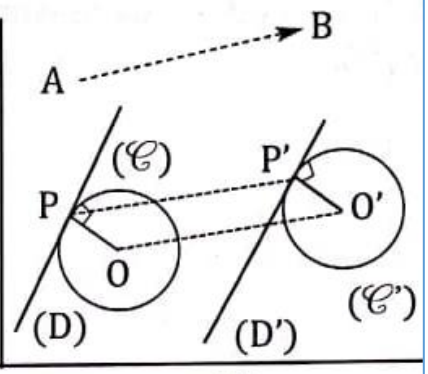
$S_{(D)}$	
C	K
F	F
E	A
K	C

5. Utilisation des symétries et des translations

5.1 Images de figures simples

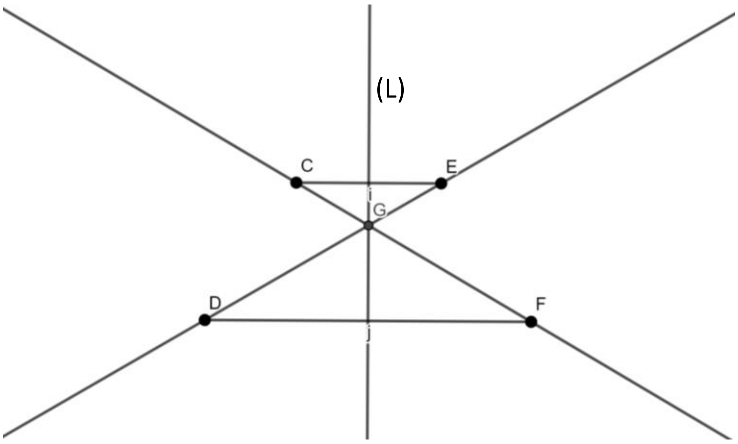
Propriétés

Le tableau suivant résume et complète les propriétés déjà énoncées dans les classes antérieures.

<table>
<tr><th>Par une symétrie orthogonale</th><th>Par une symétrie centrale</th><th>Par une translation</th></tr>
<tr><td colspan="3">• Des points alignés ont pour images des points alignés.
• Un segment a pour image un segment de même longueur.
• Le milieu d'un segment a pour image le milieu de l'image de ce segment.
• Une droite a pour image une droite.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">(D) et (D') sont parallèles.</td></tr>
<tr><td>Une droite (D) perpendiculaire à une droite (L) est sa propre image par $S_{(L)}$.</td><td>Une droite passant par un point I est sa propre image par S_I.</td><td>Une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ est sa propre image par $t_{\overrightarrow{AB}}$.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">• Deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles.
• Un cercle a pour image un cercle de même rayon.
• Un angle a pour image un angle de même mesure.
• Deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires.
• Si un point appartient à deux droites, alors son image appartient aux images de ces deux droites.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Une figure a pour image une figure qui lui est superposable.</td></tr>
</table>

Exercice de fixation

Sur le graphique ci-dessous, E et F sont les images respectives des points C et D par la symétrie orthogonale d'axe (L).
G est le point d'intersection des droites (CF) et (DE).
Justifie que le point G appartient à la droite (L).



Solution

$S_{(L)}$	
C	E
D	F
F	D
E	C
(CF)	(ED)
(ED)	(CF)
(CF)∩ (ED)	(CF)∩ (ED)
G	G

car (CF)∩ (ED)= $\{G\}$

5.2 Utilisation d'une symétrie centrale, d'une symétrie orthogonale ou une translation pour construire :

Méthode :

- Lecture de l'énoncée :
  - Relever les données ;
  - Relever les instruments imposés ;
- Recherche d'une démarche :
  - Etablir un programme de construction ;

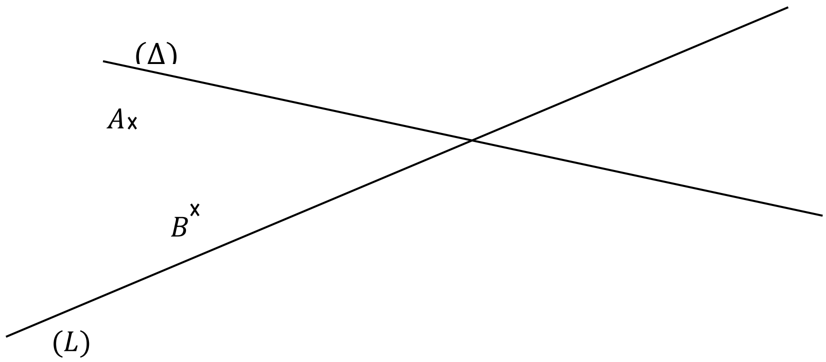
- Faire une esquisse ;
- Analyser cette esquisse ;
- Rechercher une méthode de construction ;

- Réalisation de la construction :
  - Construire la figure et la coder ;
  - Examiner éventuellement le nombre de solutions ;
  - Justifier que la construction respecte les contraintes de l'énoncé ;

Exercice de fixation

Sur la figure ci-dessous, les droites (L) et (Δ) sont sécantes.
A et B sont deux points distincts n'appartenant pas aux droites (L) et (Δ).

Construis un parallélogramme ABCD tel que C appartienne à (L) et D appartienne à (Δ).



Solution :

- **Recherche d'une démarche** (Esquisse de la figure recherchée-Analyse de l'esquisse)
  ABCD est un parallélogramme, donc en considérant la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$, le point D est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

- **Rédaction d'une solution** (Programme de construction-Justifications)
  <u>Programme de construction</u>

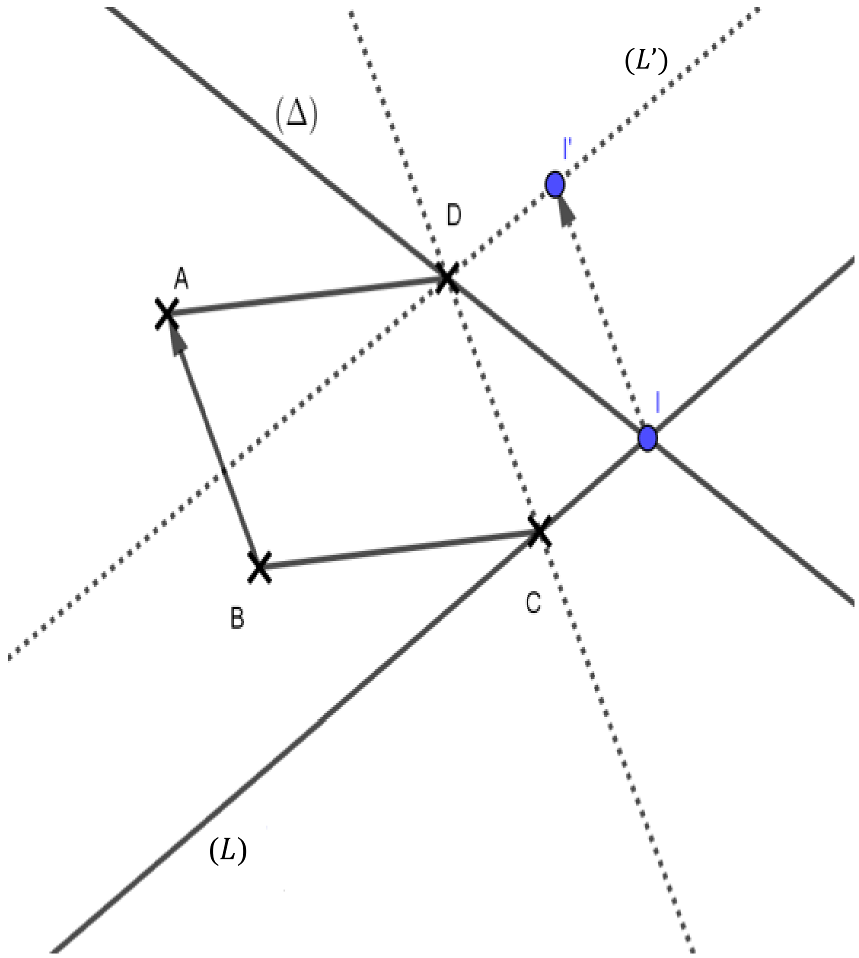
- Noter I le point d'intersection des droites (L) et (Δ).
- Construire le symétrique I' du point I par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$;
- Tracer la parallèle (L') à (L) passant par I' ; le point D est l'intersection de (L') et (Δ) ;
- Tracer la parallèle à (AB) passant par le point D ; cette droite coupe (L) au point C.
  ABCD est bien un parallélogramme avec $C \in (L)$ et $D \in (\Delta)$.

<u>Justification</u>

(L') est la parallèle à (L) passant par I' donc (L') est l'image de (L) par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.
On sait que $C \in (L)$ donc son image D par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ appartient à (L').
De plus $D \in (\Delta)$, donc D est l'intersection de (L') et (Δ).

On obtient aisément le point C car les supports des côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles ; donc la parallèle à (AB) passant par D coupe (L) en C.

$t_{\overrightarrow{BA}}$	
C	D
I	I'
(L)	(L')



5.3 Utilisation d’une symétrie centrale, d’une symétrie orthogonale ou une translation pour démontrer :

Méthode :

- Lecture de l’énoncée :
  - Faire ou reproduire une figure codée (éventuellement après une esquisse) ;
  - Relever les données et la conclusion ;
- Recherche une démarche :
  - Analyser la figure codée ;
  - Rechercher une démarche de démonstration ;
  - Rechercher les outils nécessaires aux justifications ;
- Rédaction de la démonstration :
  - Rédiger les différentes étapes de la démonstration et les justifier ;

Exercice de fixation

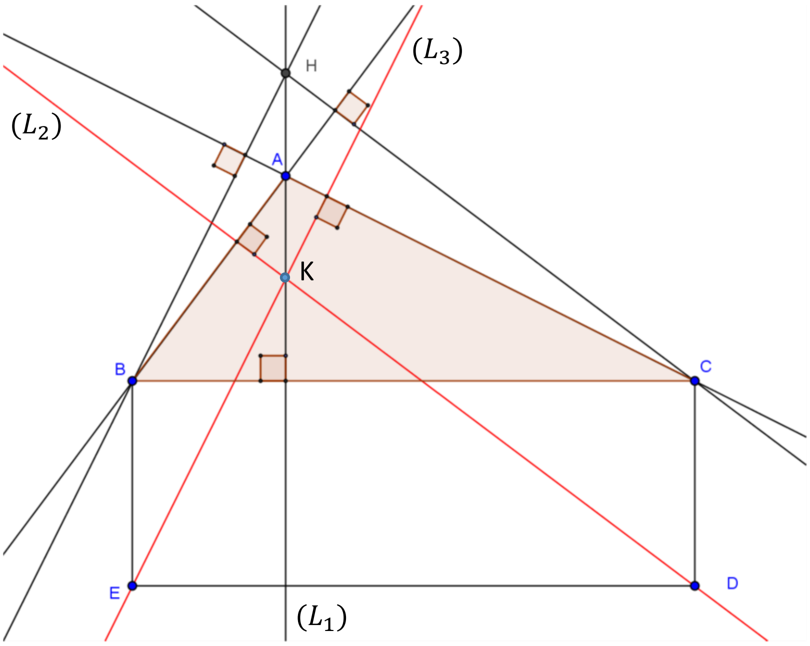
ABC est un triangle quelconque, d’orthocentre H. BCDE est un rectangle.
(L_1) est la droite perpendiculaire à (BC) passant par A, (L_2) est la droite perpendiculaire à (AB) passant par D et (L_3) est la perpendiculaire à (AC) passant par E.

En utilisant une translation, démontre que les droites $(L_1), (L_2)$ et (L_3) sont concourantes.

Solution

- **Recherche d'une démarche** (Esquisse de la figure recherchée-Analyse de l'esquisse)
  - BCDE est un rectangle, donc en considérant la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$, le point D est l'image du point C et le point E est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.
  - Les trois hauteurs d'un triangle étant concourante, montrer que les droites (L_1), (L_2) et (L_3) sont les image respectives des droites (AH), (CH) et (BH) par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$ revient à démontrer que les droites (L_1), (L_2) et (L_3) sont concourantes.

- **Rédaction de la démonstration**
  - BCDE est un rectangle. Donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BE}$. Par conséquent, E est l'image de B par $t_{\overrightarrow{CD}}$.
  - $(L_1) \perp (BC)$ et $(CD) \perp (BC)$. Donc : $(L_1) \parallel (CD)$. $\overrightarrow{CD}$ est donc un vecteur directeur de la droite (L_1). Par conséquent, (L_1) est sa propre image par $t_{\overrightarrow{CD}}$. Comme $(L_1) = (AH)$, alors (L_1) est l'image de (AH) par $t_{\overrightarrow{CD}}$.
  - $(L_2) \perp (AB)$ et $(CH) \perp (AB)$. Donc : $(L_2) \parallel (CH)$. L'image de (CH) par $t_{\overrightarrow{CD}}$ est parallèle à (CH) et passe par D, image de C. Par conséquent, (L_2) est l'image de (CH) par $t_{\overrightarrow{CD}}$.
  - On démontre de même que (L_3) est l'image de (BH) par $t_{\overrightarrow{CD}}$.
  - Les trois droites (AH), BH) et (CH) sont les hauteurs du triangle ABC. Elles ont un point commun, l'orthocentre H du triangle. Leurs images (L_1), (L_2) et (L_3) sont donc concourantes en K, image de H par $t_{\overrightarrow{CD}}$.



$t_{\overrightarrow{CD}}$	
C	D
B	E
(BH)	(L_3)
(CH)	(L_2)
(AH)	(L_1)
H	K

5-4 Des symétries et translations pour déterminer un ensemble de points

Méthode :

- Lecture de l'énoncée :
  - Relever les données ;
  - Relever les instruments imposés ;
- Recherche une démarche :
  - Faire une esquisse ;

- Analyser cette esquisse ;
- Rechercher une méthode de construction ;

- Réalisation de la solution :
  - Rédiger le programme de construction ;
  - Construire la figure et la coder ;
  - Examiner éventuellement le nombre de solutions ;
  - Justifier que la construction respecte les contraintes de l'énoncé ;

Exercice de fixation

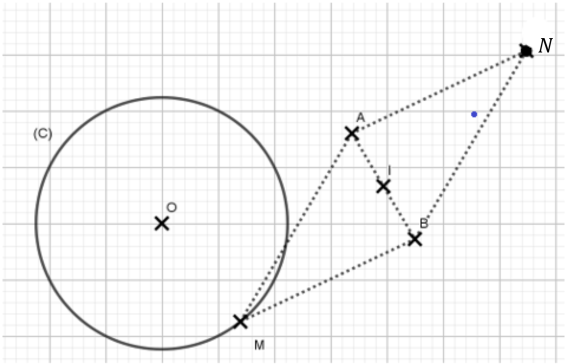
On considère un cercle (Γ) de centre O et un point M de ce cercle. Soit A et B deux points distincts tels que la droite (AB) n'ait aucun point commun avec (Γ).

1. Construis le point N tel que NBMA soit un parallélogramme.
2. Détermine le lieu du point N lorsque le point M décrit le cercle (Γ) .

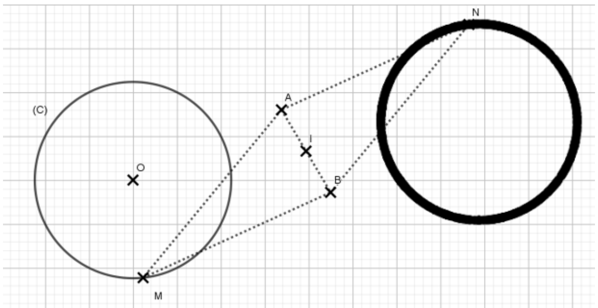
Solution :

1) NAMB est un parallélogramme, les segments [AB] et [NM] sont les diagonales de ce parallélogramme.

Considérons le point I, centre du parallélogramme NAMB. I est le milieu de [AB].
On a : $N = S_I(M)$.



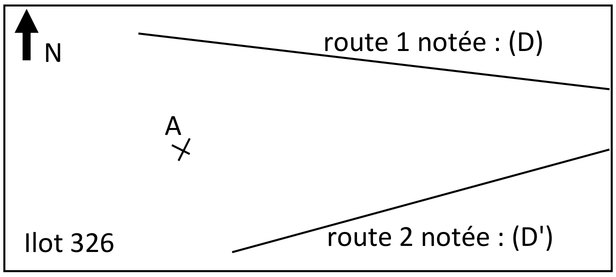
2) Lorsque le point M parcourt (C), son image N par symétrie de centre I va parcourir l'image du cercle (C) par S_I.



C. SITUATION COMPLEXE

Sur le plan d'une ville, deux routes rectilignes sont tracées. Ces deux routes se croisent en un rond-point noté O, en dehors du plan de l'ilot 326 (voir figure ci-dessous). L'aménagement de la ville a prévu une troisième route rectiligne passant par le point A du plan et qui croisent les deux premières routes en O.

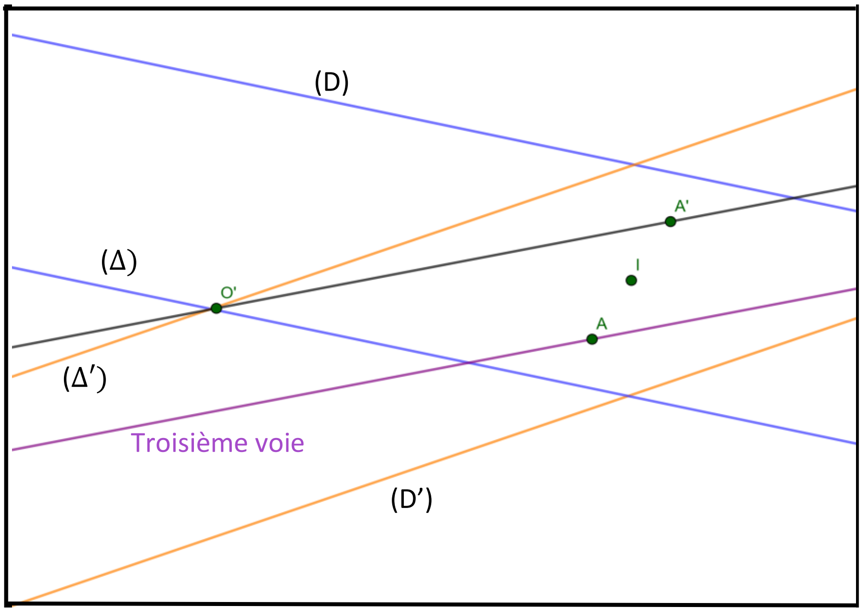
Etant dans l'impossibilité de prolonger le plan, le géomètre en chef te sollicite pour tracer la troisième voie sur le plan ci-dessous sans chercher à placer le point O.
En utilisant tes connaissances sur l'utilisation des symétries et des translations, trace sur le plan la droite qui représente la nouvelle route à construire.



Solution :
Pour résoudre ce problème, je vais utiliser des notions qui portent sur l'utilisation des symétries et translations.
Pour cela je vais :

- Placer un point I
- Construire les droites (Δ) et (Δ′) images respectives de (D) et (D') par S_I
- Placer le point O' intersection de (Δ) et (Δ′)
- Tracer la droite (A'O')
- Tracer la droite parallèle à (A'O') passant par A
- Déduire le tracé de la troisième voie

- Construction



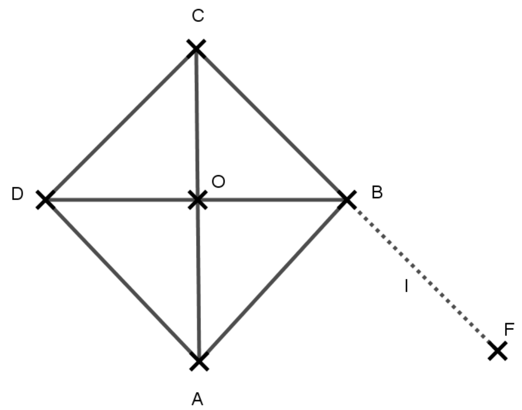
- Le point O' est l'image du point O par S_I, donc la droite (A'O') est l'image de la droite (AO) par S_I.
  Par conséquent, (AO) est la droite parallèle à (A'O') passant par A.
  La troisième voie est donc représentée par la parallèle à (A'O') passant par A.

D. EXERCICES

1. Exercices d’application

Exercice 1

Sur la figure ci-contre, on considère le losange ABCD de centre O. F est le symétrique de C par rapport à B.



A chacune des affirmations suivantes, réponds par Vrai si l’affirmation est juste ou par Faux si non, en cochant la case qui correspond.

N°	Affirmations	Vrai	Faux
1	$S_O([DB]) = [DB]$		
2	$S_O(AD) = (AD)$		
3	L’image de ABCD par S_O est ABCD		
4	$t_{\overrightarrow{AC}}(C) = A$		
5	$t_{\overrightarrow{OB}}(A) = F$		
6	$t_{\overrightarrow{CD}}(AB) = (AB)$		
7	$S_{(AC)}(B) = D$		
8	$S_{(AC)}(DC) = (BF)$		
9	$S_{(BD)}\left(\widehat{BAD}\right) = \widehat{BAD}$		
10	ABCD est globalement invariant par $S_{(BC)}$		

Solution

N°	Affirmations	Vrai	Faux
1	$S_O([DB]) = [DB]$	×	
2	$S_O(AD) = (AD)$		×
3	L’image de ABCD par S_O est ABCD	×	
4	$t_{\overrightarrow{AC}}(C) = A$		×

5	$t_{\overrightarrow{OB}}(A) = F$		×
6	$t_{\overrightarrow{CD}}(AB) = (AB)$	×	
7	$S_{(AC)}(B) = D$	×	
8	$S_{(AC)}(DC) = (BF)$	×	
9	$S_{(BD)}(\widehat{BAD}) = \widehat{BAD}$		×
10	ABCD et son image par $S_{(BC)}$ sont confonfus		×

Exercice 2

Trois élèves ont construit l'image du point A par la symétrie orthogonale d'axe (D). Les dessins ci-dessous représentent leurs solutions. Indique la construction juste :

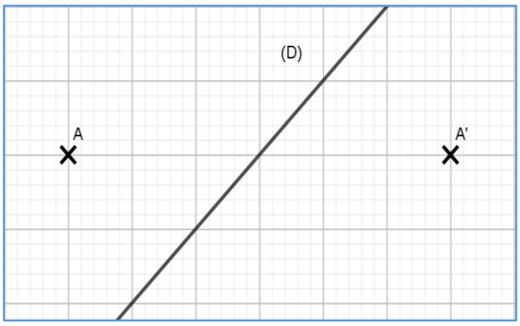


Figure 1

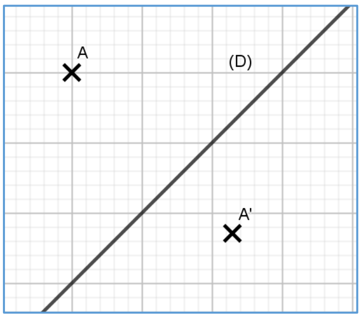


Figure 2

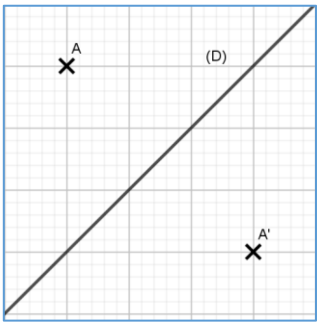


Figure 3

Solution :

Figure 3

2. Exercices de renforcement

Exercice 3

On donne un triangle quelconque ABC. Soit I le milieu du segment [BC], E et F les points de la droite (AI) tels que (BE) et (CF) soient perpendiculaires à la droite (AI).
Démontre que BE = CF.

Solution

(CF) et (BE) sont perpendiculaires à (AI), donc elles sont parallèles.
$S_I(C) = B$. Donc l'image de la droite (CF) passe nécessairement par B et est parallèle à (CF), elle ne peut-être que la droite (BE).
$(CF) \cap (AI) = \{F\}$, $(BE) \cap (AI) = \{E\}$. De plus $S_I(CF) = (BE)$ et $S_I(AI) = (AI)$ donc $S_I(F) = E$.
On a : $S_I(C) = B$ et $S_I(F) = E$ donc CF = BE.

Exercice 4

On considère une droite (Δ) et un point M de cette droite. Soit A et B deux points distincts n'appartenant pas à (Δ).

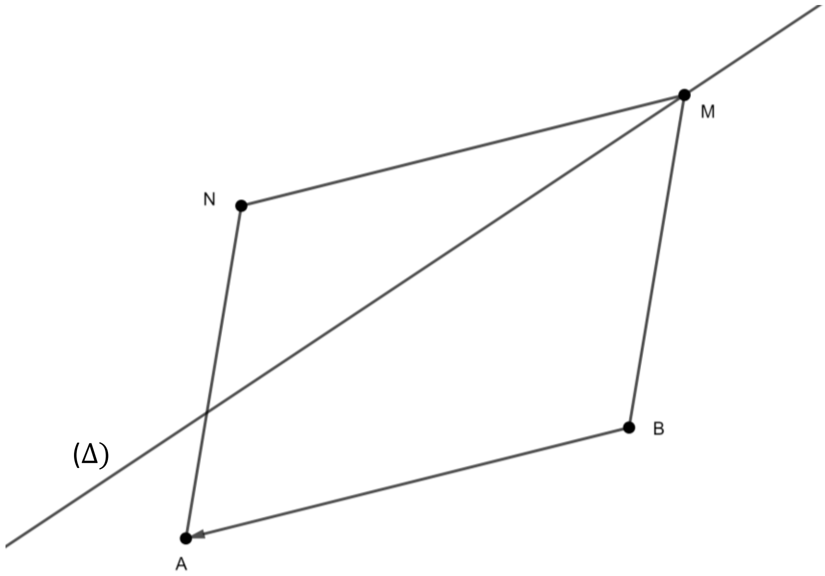
1-Construis le point N tel que NABM soit un parallélogramme.

2-Détermine le lieu géométrique du point N lorsque le point M décrit la droite (Δ) ?

Solution :

1- NABM est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MN}$.

Comme $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MN}$, alors N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.



2- Le lieu géométrique de N lorsque M décrit la droite (Δ) est l'image de (Δ) par $t_{\overrightarrow{BA}}$.

Exercice d'approfondissement

Exercice 5

ABC est un triangle rectangle en B. On désigne par I le milieu de [BC], par J le milieu de [AB] et par H le projeté orthogonal de B sur (AC).

1 -Démontre que (IJ) est la médiatrice de [BH].

2 -En utilisant une symétrie orthogonale, démontre que (HI) est perpendiculaire à (HJ).

Solution :

1- On considére le triangle ABC. I est le milieu de [BC] et J milieu de [BA] donc (IJ) est parallèle à (AC).
Or (AC) est perpendiculaire à (BH), donc (IJ) perpendiculaire à (BH).
On considére le triangle BCH, I est le milieu [BC] et (IJ) est parallèle à (CH), donc (IJ) passe par le milieu de [BH].
Par conséquent, (IJ) est la médiatrice de [BH].

2- On considère la symétrie orthogonale d'axe (IJ) :
$S_{(IJ)}(B) = H$; $S_{(IJ)}(I) = I$ et $S_{(IJ)}(J) = J$ donc (BI) a pour image (IH)et (BJ) a pour image (JH) ; or (BI) est perpendiculaire à (BJ), donc (IH) est perpendiculaire à (JH).

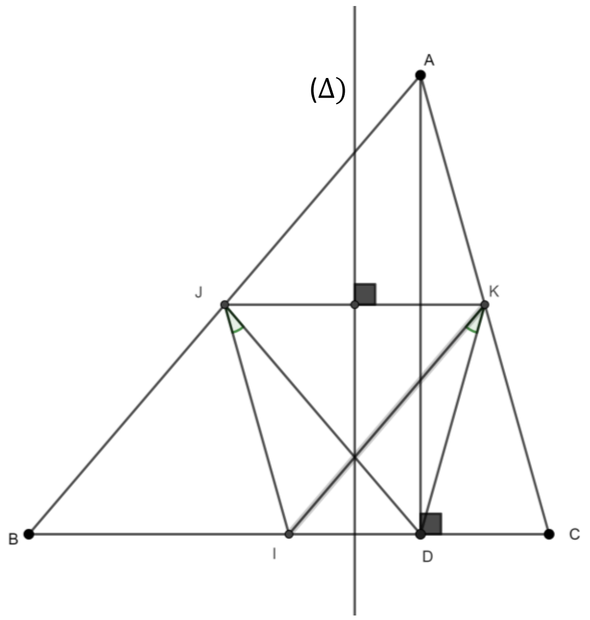
Exercice 6

ABC est un triangle quelconque. I, J et K sont les milieux respectifs des cotés [BC], [AB] et [AC]. D est le projété orthogonal de A sur la droite (BC). On note (Δ) la médiatrice de [JK].

1)
   a) Fais la figure.
   b) Démontre que (Δ) est la médiatrice de [DI].
2) Démontre que mes $\widehat{\mathrm{DJI}} =$ mes $\widehat{\mathrm{DKI}}$.

Solution :

1) a)



b) Considérons le triangle ABC. J et K sont les milieux respectifs des cotés $[AB]$ et $[AC]$, donc $(JK)//(ID)$. De plus $IJ = \frac{1}{2}\ AC =\ KC$.
Le triangle ACD est rectangle en D et K est le milieu de l'hypoténuse, donc $KC = KD$.
On a donc $IJ = KD$.
On a : $(JK)//(ID)$ et $IJ = KD$ donc le quadrilatère $IJKD$ est un trapèze isocèle.
Ainsi (Δ) la médiatrice de $[JK]$ est aussi la médiatrice de $[ID]$.

2) Soit la symétrie orthogonale d'axe (Δ)

$S_{(\Delta)}(D) = I$; $S_{(\Delta)}(J) = K$ et $S_{(\Delta)}(I) = D$, donc $S_{(\Delta)}(\widehat{DJI}) = \widehat{IKD}$alors mes $\widehat{\mathrm{DJI}} =$ mes $\widehat{\mathrm{DKI}}$.