CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

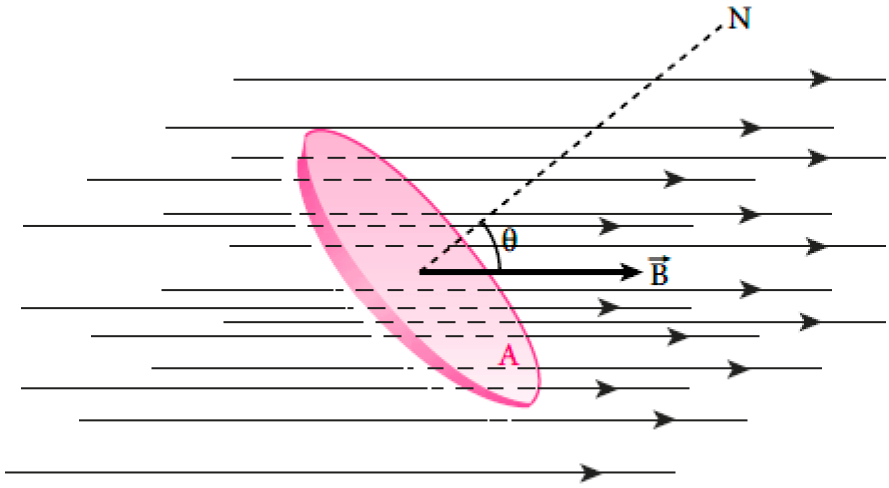
THEME : FONCTION NUMERIQUE

Durée : 12 heures **Code :**

LEÇON 10 : CALCUL INTEGRAL

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Dans ses recherches sur internet, un élève de Terminale scientifique découvre le document suivant :
Densité de flux magnétique



La densité du flux magnétique dépend du flux magnétique traversant la zone A :
$\Phi = \int B \times dA$.
Si le champ magnétique est homogène et la surface A uniforme, le flux magnétique Φ est calculé avec le produit suivant : $\Phi = B \times A$.
Il montre le document à ses camarades de classe qui sont intrigués par la formule
$\Phi = \int B \times dA$.
Ils décident de s'informer pour comprendre cette formule.

B. CONTENU DU COURS

I. Intégrale d'une fonction continue

1. Notion d'intégrale

a) Propriété et définition

Soit f une fonction **continue sur un intervalle K**, a et b deux éléments de K et F une primitive de f sur K.
Le nombre réel $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de F.
Il est appelé **intégrale de a** à **b de *f***

Notation :

On note :

• $\int_a^b f(x)dx$ **et on lit « intégrale (ou somme) de a à b de $f(x)dx$ »**

ou

• $[F(x)]_a^b$ et on lit : " $F(x)$ pris entre a et b".

Donc, on a : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

b) REMARQUES

• a et b sont appelés bornes de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$

• La lettre x n'intervient pas dans le résultat de $\int_a^b f(x)dx$.

On peut donc la remplacer par toute autre lettre différente de a et b. On l'appelle **variable muette**.

On a : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = \cdots = F(b) - F(a)$.

c) Conséquences de la définition

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Exercice de fixation :

Calcule les intégrales suivantes:

$$I = \int_0^1 x^2dx \ ; \qquad P = \int_0^1 z^2dz \quad ; \quad J = \int_3^1 (1 - \frac{1}{t})dt \ \text{ et } \ H = \int_{-12}^{-12} x\sqrt{3-x}dx$$

Solution :

• Considérons la fonction continue sur $[0; 1]$ et définie par : $f(x) = x^2$.

Une primitive de f sur $[0; 1]$ est la fonction F définie par : $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.

Donc $I = \int_0^1 x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\times 1^3 - 0 = \frac{1}{3}$.

• $P = I = \frac{1}{3}$ car la variable z est muette

• Considérons la fonction continue sur $[1; 3]$ et définie par $f(t) = \left(1 - \frac{1}{t}\right)$

Une primitive de f est la fonction F définie par $F(t) = t - \ln t$.

Donc : $J = \int_3^1 \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt$

$= [t - \ln t]_3^1$

$= (1 - \ln 1) - (3 - \ln 3)$

$= 1 - 3 + \ln 3$

$J = -2 + \ln 3$

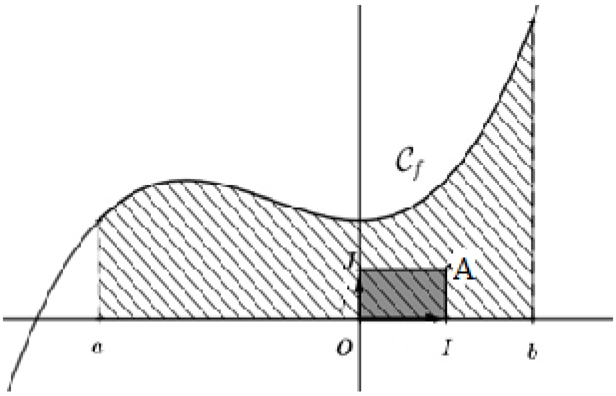
• $H = \int_{-12}^{-12} x\sqrt{3-x}dx = 0$ car les bornes de l'intégrale H sont identiques.

d) Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue et positive

Propriété

Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a; b]$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

$\int_a^b f(x)dx$ est l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



L'unité d'aire est l'aire du rectangle OIAJ
1u. a = OI×OJ
On a : $\mathcal{A} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)\mathrm{d}x$ u. a

Remarques

• La partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe (OI), les droites d'équations $x = \mathrm{a}$ et $x = \mathrm{b}$ est aussi l'ensemble des points $\mathrm{M}(\mathrm{x};\mathrm{y})$du plan tels que : $\begin{cases} \mathrm{a} \leq x \leq \mathrm{b} \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

Exercice de fixation :
Le plan est muni d'un repère orthogonal (O ; I ; J). Unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées.
On considère la fonction *f* définie par : *f*(*x*) = 2*x* + 1.
1) Justifie que *f* est continue et positive sur [0 ; +∞[
2)Interprète graphiquement $\int_0^5 f(x)dx$.

Solution
1)
• f étant une fonction polynôme, f est continue sur ℝ donc sur [0 ;+∞[.
• 2*x* + 1 ≥ 0 ⇔ $x \geq -\frac{1}{2}$. Donc *f* est positive sur $[-\frac{1}{2}$; +∞[, en particulier sur [0 ; +∞[.

2)$\int_0^5 f(x)dx$ représente l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de *f*, la droite (OI), les droites d'équations $x = 0$ *et* $x = 5$. L'unité d'aire u.a est 6cm²

2) Propriétés de l'intégrale

a) Propriétés algébriques

Propriété 1 : Égalité de Chasles
Soit f une fonction continue sur un intervalle K ; a, b et c trois éléments de K.
On a : $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{c}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{c}}^{\mathrm{b}} f(x)\mathrm{d}x$

Exercice de fixation :

Soit la fonction f continue sur ℝ et définie par : $\begin{cases} f(x) = 2x - 1, \ \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calcule $\mathrm{A} = \int_0^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x$

Solution
$\mathrm{A} = \int_0^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x$

$=\int_0^1 (2x-1)\mathrm{d}x + \int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$
$= [x^2 - x]_0^1 + [\ln x]_1^{\mathrm{e}}$
$= 1 - 1 - 0 + (1 - 0)$
$= 1$

Propriété 2 : Linéarité

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle K ; a et b deux éléments de K et $\propto$ un nombre réel.
On a :

- $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} [f(x) + \mathrm{g}(x)]\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{g}(x)\mathrm{d}x$
- $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \propto f(x)\mathrm{d}x = \propto \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice de fixation :
Calcule $\int_0^{2\pi} (-3\cos x + 2\sin x)\mathrm{d}x$.

Solution

$\int_0^{2\pi} (-3\cos x + 2\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} (-3\cos x)\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} (2\sin x)\mathrm{d}x$
$= -3\int_0^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x + 2\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$
$= -3[\sin x]_0^{2\pi} + 2[-\cos x]_0^{2\pi}$
$= -3(0 - 0) + 2(-1 + 1)$
$= 0$

b) Propriétés de comparaison

Propriété 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.
Si $f \geq 0$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Exercice de fixation :
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\mathrm{f}(x) = x^2$.
Justifie sans calcul que : $\int_{-2}^{7} f(x)dx \geq 0$.

Solution

Pour tout x élément de [-2 ; 7], $x^2 \geq 0$, donc $\int_{-2}^{7} f(x)dx \geq 0$.

Propriété 2

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$.
Si $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Exercice de fixation:
Démontre que : $\int_0^1 (x^2+1)dx \geq \int_0^1 2xdx$

Solution

Pour tout x , élément de [0 ; 1], $(x-1)^2 \geq 0$, on a : $x^2 + 1 \geq 2x$
Donc $\int_0^1 (x^2+1)dx \geq \int_0^1 2xdx$

Propriété 3 : Inégalité de la moyenne

f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, m et M sont deux nombres réels.

- Si $m \leq f \leq M$ sur $[a; b]$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.
- Si $|f| \leq M, (M \geq 0)$ sur $[a; b]$, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a)$.

Exercice de fixation :

En supposant que : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, $1 \leq \frac{1}{sinx} \leq \sqrt{2}$, justifie que : $\frac{\pi}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sinx} dx \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Solution

On sait que : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right], 1 \leq \frac{1}{sinx} \leq \sqrt{2}$. D'après l'inégalité de la moyenne, on a :

$1 \times (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sinx} dx \leq \sqrt{2} \times (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$

Donc $\frac{\pi}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sinx} dx \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

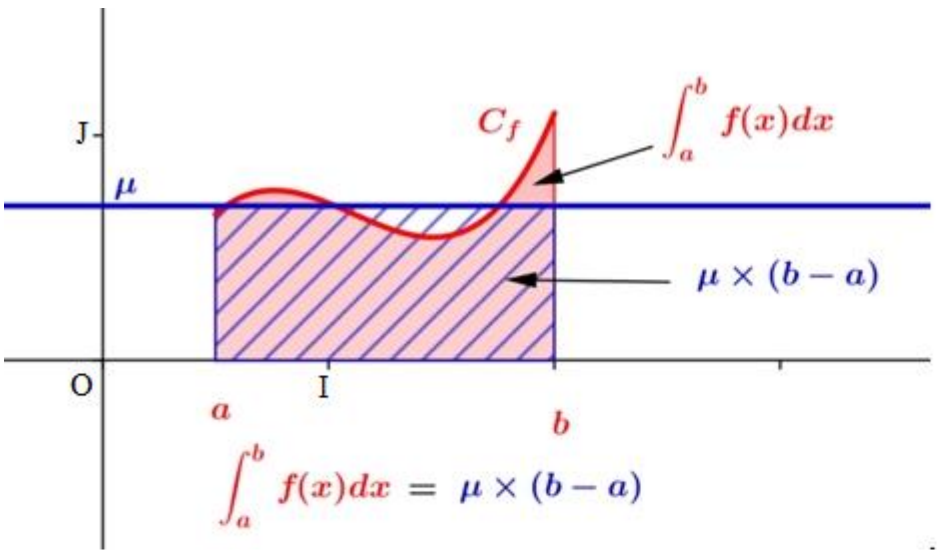
3) Valeur moyenne d'une intégrale

Définition

f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.
On appelle valeur moyenne de f sur $[a; b]$, le nombre réel $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

Interprétation graphique :

Posons : $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$



Dans le cas d'une fonction positive,
La valeur moyenne μ de f sur $[a; b]$ est la hauteur du rectangle de base (b-a) ayant la même aire (en unités d'aire) que la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe (OI), les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Exercice de fixation :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - sinx$.
Calcule la valeur moyenne de f sur $[0; \pi]$.

Solution

$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

$\mu = \frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi}(x - sinx)dx$

$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2 + cosx\right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{\pi}(\frac{1}{2}\pi^2 - 2)$

$= \frac{\pi^2-4}{2\pi}$

II. Techniques de calcul d'une intégrale

1) Utilisation de primitives

Exemple 1:

Calculons l'intégrale I telle que $I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$

Considérons la fonction f continue sur $[0; 1]$ et définie par : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

Posons $u(x) = 1 + e^x$, $u'(x) = e^x$;f est de la forme $\frac{u'}{u}$

Une primitive de f sur $[0; 1]$ est la fonction F définie par : $F(x) = ln(1 + e^x)$. Donc $I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$

$= [ln(1 + e^x)]_0^1$

$= ln(1 + e^1) - ln(1 + 1)$

$= ln(1 + e) - ln(2).$

$= ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

Exemple 2

Calculons l'intégrale J telle que $J = \int_0^1 xe^{x^2}dx$

Indication

Posons : $u(x) = x^2$; $xe^{x^2} = \frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$

Exercice 3

Calcule l'intégrale K telle que $K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} cos^3t dt$

Indication

$cos^3t = (cost)(1 - sin^2t)$

$= cost - costsin^2t$

2) Intégration par parties

Propriété

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b]$.

Si les dérivées u' et v' sont continues sur $[a; b]$, alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Exercice de fixation :

Calcule $I = \int_1^e x^2 lnx\, dx$

Solution

Posons $u(x) = lnx$ $donc$ $u'(x)=\frac{1}{x}$

$v'(x) = x^2$ et prenons $v(x)=\frac{1}{3}x^3$

Ainsi $\int_1^e u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x)dx$

$\int_1^e x^2 lnx\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 lnx\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}(\frac{1}{3}x^3)dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 lnx\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{3}x^2 dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 lnx\right]_1^e - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^e$

$= \frac{2e^3+1}{9}$

3) Changement de variable affine

Pour calculer $\int_a^b f(\propto x+\beta)dx$, $\propto et\ \beta$ sont des nombres réels tel que $\propto \neq 0$, on peut procéder comme suit :

- Faire le changement de variable : $t = \propto x + \beta$
  On a : $dt = \propto dx$. D'où $dx = \frac{1}{\propto}dt$
  $x = a \Leftrightarrow t = \propto a + \beta$
  $x = b \Leftrightarrow t = \propto b + \beta.$
- Utiliser l'égalité: $\int_a^b f(\propto x+\beta)dx = \int_{\propto a+\beta}^{\propto b+\beta} \frac{f(t)}{\propto}dt.$

Exercice de fixation :

Calcule $P = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx$

Solution :

Posons $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ donc $f(2x+3) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$

Posons $t = 2x+3$ on déduit :

- $dt = 2dx$ donc $dx = \frac{1}{2}dt$
- $x = -1 \Leftrightarrow t = 1$ et
  $x = 0 \Leftrightarrow t = 3$

Par conséquent,

$$P = \int_{-1}^{0} f(2x+3)dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx = \int_{1}^{3} \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \times \frac{1}{2}dt$$

$$= \int_{1}^{3} \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$$

$$= \left[\sqrt{t}\right]_1^3$$

$P = \sqrt{3} - 1$

4) Intégration des fonctions paires, impaires, périodiques

Propriété1

Soit f une fonction continue sur un intervalle K symétrique par rapport à 0.

Pour tout élément a de K, on a :

- Si f est paire, alors : $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
- Si f est impaire, alors : $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Exercice de fixation :

Calcule $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} cos2xdx$ et $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} sin2xdx$

Solution :

- La fonction $x \mapsto cos2x$ est paire et continue sur $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ donc

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} cos2xdx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} cos2xdx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2cos2xdx = [sin2x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$$

- La fonction $x \mapsto sin2x$ est impaire et continue sur $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ donc

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} sin2xdx = 0$$

Propriété 2

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période T.
Pour tous nombres réels a et b, on a :

- $\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$
- $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

Exercice de fixation :

Calcule $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} cos2xdx$

Solution :

La fonction $x \mapsto cos2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période π, donc

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} cos2xdx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\pi} cos2xdx = \int_{0}^{\pi} cos2xdx = 0$$

III. Calcul d'aires

Propriétés

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

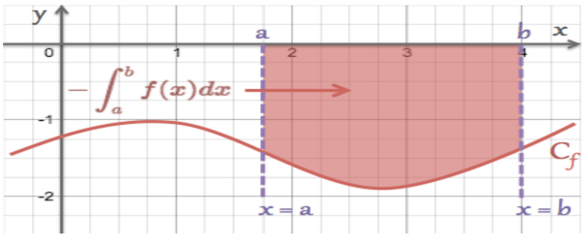
1) Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, (C_f) sa courbe représentative.

$\mathcal{A}$ est l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), l'axe des abscisses (OI), les droites d'équations $x = a\ \ et\ \ x = b$.

a) Si f est positive sur $[a; b]$, alors : $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx\,.\,ua$

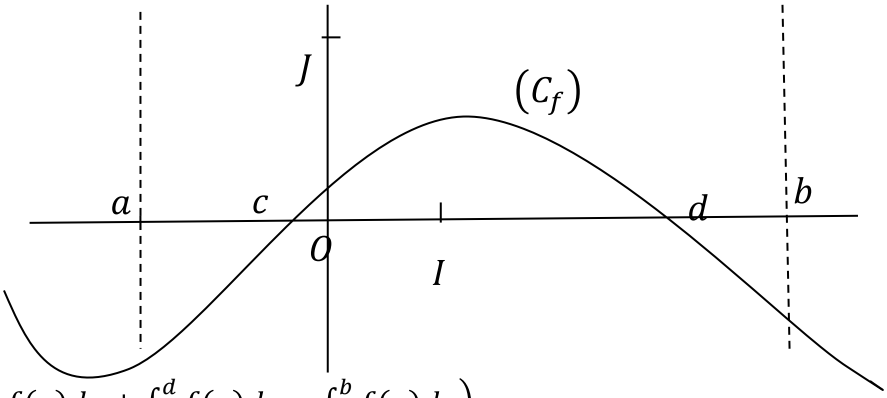
b) Si f est négative sur $[a; b]$, alors : $\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)dx\,.\,ua$

Par exemple, sur la figure ci-dessous, f est une fonction **continue et négative** sur l'intervalle $[a; b]$, on a : $\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)dx\ ua$



c) Si f ne garde pas un signe constant sur $[a; b]$, alors on subdivise $[a; b]$ en des intervalles sur lesquels f garde un signe constant.

Par exemple, sur la figure ci-dessous, on subdivise $[a; b]$ en $[a; c]$, $[c; d]$ et $[d; b]$.
f est positive sur $[c; d]$ et f est négative sur $[a; c]$ et sur $[d; b]$



On a : $\mathcal{A} = \left(-\int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx - \int_d^b f(x)dx\right) ua$

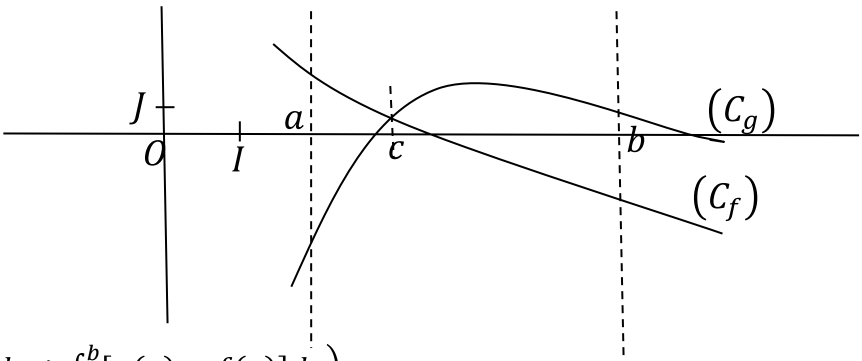
2) Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$, (C_f) et (C_g) leurs courbes représentatives respectives.

$\mathcal{A}$ est l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), (C_g), les droites d'équations : $x = a \ et \ x = b$.

a) Si $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors : $\mathcal{A} = \left(\int_a^b [g(x) - f(x)]dx\right) ua$.

b) Si $f - g$ ne garde pas un signe constant sur $[a; b]$, alors on procède comme au 1)c.

Par exemple, sur la figure ci-contre :



On a : $\mathcal{A} = \left(\int_a^c [f(x) - g(x)]dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]dx\right) ua$

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I , J). Unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.

On considère la fonction f définie par : f (x) =$-x^2$.

Calcule en cm², l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = 1 et x = 3.

Solution

f est continue et négative sur ℝ , $\mathcal{A}$ = $-\int_1^3 (-x^2)dx \ en \ (u.a)$

L'unité d'aire en cm² est 2×4 cm², donc $\mathcal{A}$ = ($\int_1^3 -(-x^2)dx$)×8 cm²

$\mathcal{A}$ = ($\int_1^3 x^2 dx$)×8 cm²

= $8 \times [\frac{1}{3}x^3]_1^3$ cm²

= $8\ (9-\frac{1}{3})$ cm²

$\mathcal{A}$ = $\frac{208}{3}$ cm²

Exercice 2

Soit la fonction f définie par f$(x) = x^3$. On désigne par (C_f), la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique $2cm$.

Calcule en unités d'aires, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par(C_f), l'axe des abscisses (OI), les droites d'équations $x = -1 \ et \ x = 1$.

Solution :

f étant continue, négative sur $[-1; 0]$ et positive sur $[0; 1]$

$\mathcal{A} = (-\int_{-1}^0 x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx)\ ua$

$=\left(-\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1}\right)\times 2\times 2cm^2$

$= (-(0-\frac{1}{4}) + (\frac{1}{4}-0)) \times 4\ cm^2$

$\mathcal{A} = 2\ cm^2$

IV. Fonction du type $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$

Propriété :

Soit f une fonction continue sur un intervalle K et a un élément de K.

La fonction de K vers ℝ, $\boldsymbol{x \mapsto \int_a^x f(t)dt}$, est la primitive de f qui s'annule en a.

Conséquence :

Si F est une fonction définie sur un intervalle K par : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors: $\forall\, x\epsilon K$, $F'(x) = f(x)$

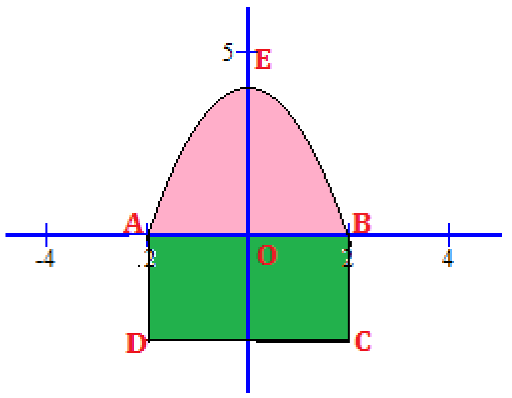
Exercice :

Justifie que la fonction logarithme népérien est la fonction F définie sur]0, + ∞ [par $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$

Solution :

La fonction ln, est l'unique primitive sur]0, + ∞ [de la fonction , $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{1}{x}$ et qui s'annule en 1. On en déduit que $ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$.

C- SITUATION COMPLEXE



Un de vos camarades de classe rend visite à l'ancien professeur de mathématiques de son père à la retraite. Il remarque les formes géométriques particulières de la terrasse de celui-ci (voir figure) : la partie en vert est délimitée par un rectangle de largeur 2 m et de longueur 4m et la partie en rose est délimitée par une portion de parabole et par un segment [AB]. Amusé par le regard de votre camarade, l'ancien professeur de mathématique le met au défi de lui calculer l'aire totale de la terrasse en vue de lui donner une idée du coût des travaux de revêtement de cette terrasse.

Il lui présente le plan de la terrasse en précisant que pendant la construction, il a veillé à ce que la parabole qui apparait dans le plan ait pour équation $y = -x^2+4$ dans le repère orthonormé d'origine O et d'unité 1m, avec A (-2,0) et B(2,0).

Aide ce camarade à relever ce défi.

Solution

Pour résoudre le problème, nous allons utiliser le calcul intégral.

Nous allons utiliser particulièrement le calcule d'aire

puis faire la somme des deux aires après les avoir calculées .

Aire A_1 de la partie en rose délimitée par la portion de la parabole

$A_1 = \int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx$ = G(2) – G(–2) où $G(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$

$= - \frac{8}{3} + 8 + \frac{8}{3} + 8 = 16$

Aire A_2 de la partie rectangulaire

$A_2 = 2 \times 4 = 8$

AIRE TOTALE DE LA TERRASSE

$A_1 + A_2 = 16\ m^2 + 8 m^2 = 24\ m^2$

D. EXERCICES

1. Exercices d'application

Exercice 1

Calcule les intégrales suivantes:

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (cosx + 2x)e^{(\sin x + x^2)}dx$; $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln z + 2}}{z} dz$ et $\int_{-2}^{1} \frac{2t^3 - t}{(t^4 - t^2 + 3)^4} dt$.

Exercice 2

Calcule $P = \int_{-4}^{6} |x + 3| dx$

Exercice 3

1) Justifie que, pour tout nombre réel t, $\cos^3 t = (1 - \sin^2 t)\cos t$.

2) Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{3}} -4\cos^3 t dt$

Exercice 4

Démontre que : $\int_0^{\pi} x^2 cosxdx \leq \int_0^{\pi} x^2 dx$.

Exercice 5

Soit a et b deux nombres réels de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ tels que $a < b$.

a) Démontre que : $\forall x \in [a; b]$, $\frac{1}{cos^2 a} \leq \frac{1}{cos^2 x} \leq \frac{1}{cos^2 b}$

b) Déduis-en que $\frac{b-a}{cos^2 a} \leq tanb - tana \leq \frac{b-a}{cos^2 b}$

Exercice 6

$Soit\ f\ la\ fonction\ définie\ sur\ \mathbb{R}\ par\text{:}\ \ f(x) = 3x + cosx$

Calcule $la\ valeur\ moyenne\ de\ f\ sur$ $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 7

Calcule les intégrales suivantes :

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cosxdx$; $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{cosx}{sinx} dx$ et $\int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} cos^5 t sin^5 t dt$

Exercice 8

Calcule les intégrales suivantes **:**

$\int_1^2 x\sqrt{3 - x} dx$; $\int_0^1 (x + 1)e^x dx$; $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} xcosxdx$; $\int_2^3 lnxdx$ et $\int_0^2 x^2 e^x dx$ (par deux intégrations par parties)

Exercice 9

Calcule les intégrales suivantes en utilisant un changement de variable affine

$\int_{-\frac{5}{2}}^{-2} (2x + 5)^7 dx$, $\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{2x+3}} dx$ et $\int_0^1 x\sqrt{x + 1} dx$

Exercice 10

Calcule: $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x^6 sinx dx$; $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x^6 cosx dx$ et $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} cosx dx$

Exercice 11

Soit les fonctions f et g définies par : $f(x) = x + 2$ et $g(x) = x^2$

On désigne par(C_f), (C_g)les courbes représentatives de f et g dans le plan muni d'un repère orthonormé(O, I, J) . Unité graphique: $2cm$

Calcule encm^2, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plandélimitée par (C_f), (C_g) et les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 2$

Exercice 12

Un corps est lâché, avec une vitesse initiale à l'instant $t_0 = 0$, d'une hauteur de 2000m et il est soumis à l'accélération de la pesanteur g = 9,8m.s^{-2}

1) Justifie que la fonction D définie par : D(x)=$\int_0^x gxtdt$ est la distance parcourue après x secondes de chute.

2) Calcule l'instant T (en seconde) mis pour qu'il soit au sol.

2 . Exercices de renforcement

Calcule les intégrales suivantes **:**

$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$;$\int_e^{e^2} \frac{1}{x(lnx)^2}dx$;$\int_{\frac{5}{3}}^{2} \frac{x^2}{(3x-4)^5}dx$; $\int_{-5}^{12} 2|2x+3|dx$; $\int_2^5 \frac{x+\frac{5}{2}}{x^2+5x-6}dx$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} cos^5 t sin^5 t dt \quad ; \quad \int_{-4}^{-2} \frac{t^2+3t-2}{t+1}dt \quad et \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} sin^6 x dx$$

2. Exercices d'approfondissement

Exercice 1 :

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1 - e^x$ et on admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique$2cm$.

1) Calcule les limites en $+\infty$ de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$.

Interprète graphiquement les résultats obtenus.

2) a) Calculer la limite en $-\infty$ de$f(x)$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation ~~y = x~~ y=x+1 est asymptote à (C) en $-\infty$.

c) Etudier les positions relatives de (C) et (D).

3) Dresse le tableau de variation de f.

4) Trace (D) et(C).

5) Calcule en cm^2, l'aire $\mathcal{A}(\Delta)$de la partie Δ du plan limitée par (C), la droite (D),les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.

SOLUTION

1) $\lim_{x\to+\infty} x + 1 - e^x = \lim_{x\to+\infty} x(1 + \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x}) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x} = -\infty$

Interprétation graphique : La courbe (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2.a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x+1-e^x = -\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

b) Il s'agit de justifier que $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+1) = 0$.

Ce qui est évident car $f(x)-(x+1) = -e^x$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

c) Il s'agit ici d'étudier le signe de $f(x)-(x+1)$ suivant les valeurs de x .

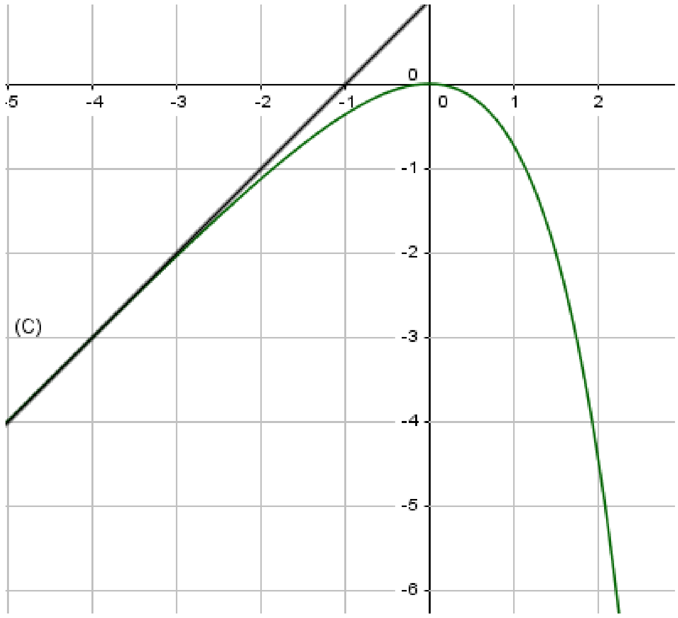
Or $f(x)-(x+1) = -e^x$ et $-e^x < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Donc La courbe (C) est en dessous de la droite (D).

3.) $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1-e^x$. Or $1-e^x \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq e^x$

$\Leftrightarrow x \geq 0$

X	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		–
$f(x)$	↗	0	↘

4) La courbe de la fonction



5. <u>Calcul d'aire</u>

$\mathcal{A}(\Delta) = \int_{-2}^{0} x+1-f(x) = 4\times [e^x]_{-2}^{0} = 4(1-e^{-2})$.

Exercice 2 :

Soit F la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}dt$.

On désigne par (C_F) la représentation graphique de F dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) tel que : $OI = 2cm$ et $OJ = 1cm$.

1) Détermine l'ensemble de définition de F.

2) Etudie le sens de variation de F

3) Soit f la fonction définie par : $f(x) = F(x) - \ln x$.

a) Justifie que : $\forall x \in]0;+\infty[\,, f(x) = \int_1^x \frac{e^t-1}{t}dt$

b) Justifie que : $\forall t \in]0;+\infty[\ ,\ \frac{e^t-1}{t} > 0$. Déduis-en que : $\begin{cases} \forall x \in]0;1[\,, f(x) < 0 \\ \forall x \ \in]1;+\infty[\,, f(x) > 0 \end{cases}$.
c) En utilisant les propriétés de comparaison, détermine les limites de F en 0 et en$+\infty$.
4) Dresse le tableau de variation de F.
5) Justifie que (C_F) admet une asymptote verticale.
6) Soit $x \in]1;+\infty[$.
a) Démontre que : $\forall t \in [1;x]\,, \frac{e^t}{t} \geq \frac{e^t}{x}$ et que $F(x) \geq \frac{1}{x}\int_1^x e^t dt$
b) Déduis-en que :$\frac{F(x)}{x} \geq \frac{e^x-e}{x^2}$
C)Démontre que (C_F) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).

SOLUTION
1) F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ *et* $\forall\, x \in\ \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = \frac{e^x}{x}$; $\frac{e^x}{x}$ étant positive pour toute valeur strictement positive de x, F'(x) est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Par suite, F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3) a) Soit f, la fonction définie par : $f(x) = F(x) - \ln x$.
On a : $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt - \int_1^x \frac{1}{t} dt = \int_1^x (\frac{e^t}{t} - \frac{1}{t})dt = \int_1^x \frac{e^t-1}{t}$ dt.

3.b) $\forall t \in]0;+\infty[\ ,\ \frac{e^t-1}{t} > 0$ car $\forall t \in]0;+\infty[\,, e^t > 1$

Déduction
$\forall x \in]0;1[$, $f(x) = \int_1^x \frac{e^t-1}{t}$ dt. Or $\frac{e^t-1}{t} > 0$ *et* au niveau des bornes de l'intégrale, $x < 1$. Par conséquent, $f(x) < 0$.
$\forall x \in]1;+\infty[$, $f(x) = \int_1^x \frac{e^t-1}{t}$ dt. Or $\frac{e^t-1}{t} > 0$ *et* au niveau des bornes de l'intégrale, $1 < x$. Par conséquent, $f(x) > 0$.
3.c) On a montré que $\forall t \in]0;+\infty[\ ,\ \frac{e^t-1}{t} > 0$. En particulier, $\forall t \in]0;1[\ ,\ \frac{e^t-1}{t} > 0$
Ce qui peut s'écrire aussi : $\forall t \in]0;1[$, $\frac{e^t}{t} > \frac{1}{t}$. Par suite $\forall\, x \in]0;1[$, $\int_x^1 \frac{e^t}{t}\, dt > \int_x^1 \frac{1}{t}\, dt$ ou encore
$\forall\, x \in]0;1[$, $\int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt < \int_1^x \frac{1}{t}dt$ c'est-à-dire $\forall\, x \in]0;1[, F(x) <\ \ln x$
qd $x \to 0, \ln x \to -\infty; donc\ F(x) \to -\infty$
De la même manière, $\forall t \in]1;+\infty[\ ,\ \frac{e^t-1}{t} > 0$
Ce qui peut s'écrire aussi : $\forall t \in]1;+\infty[$, $\frac{e^t}{t} > \frac{1}{t}$. Par suite $\forall\, x \in]1;+\infty[$, $\int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt > \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$
ou encore $\forall\, x \in]1;+\infty[, , F(x) >\ \ln x$.
Or qd $x \to +\infty, \ln x \to\ +\infty; donc\ F(x) \to\ +\infty$

4.) Tableau de variation de la fonction F

X	0		1	$+\infty$
$F'(x)$		+	E–1	+
$F(x)$			0	

5. $\lim_{x \to 0} F(x) = 0$; par conséquent, (C_F) admet la droite d'équation x=0 comme asymptote verticale

6) Soit $x \in]1; +\infty[$.

a) **Démontrons que :** $\forall \mathbf{t} \in [\mathbf{1}; \boldsymbol{x}]$, $\frac{\mathbf{e^t}}{\mathbf{t}} \geq \frac{\mathbf{e^t}}{\boldsymbol{x}}$ **et que** $\mathbf{F}(\boldsymbol{x}) \geq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} \int_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{x}} \mathbf{e^t dt}$

$t \in [1; x] \Leftrightarrow 1 \leq t \leq x \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{t} \leq 1$

$\Rightarrow \frac{e^t}{x} \leq \frac{e^t}{t}$

$\Rightarrow \int_1^x \frac{e^t}{x} \mathrm{dt} \leq \int_1^x \frac{e^t}{t} \mathrm{dt}$

C'est-à-dire : $\frac{1}{x} \int_1^x e^t \, dt \leq \mathrm{F}(x)$

b) Déduction de : $\frac{\mathbf{F}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}} \geq \frac{\mathbf{e}^{\boldsymbol{x}} - \mathbf{e}}{\boldsymbol{x}^2}$

En passant aux calculs dans cette inégalité ($\frac{1}{x} \int_1^x e^t \, dt \leq \mathrm{F}(x)$) on obtient :
$\frac{1}{x}(e^x - \mathrm{e}) \leq \mathrm{F}(x)$ ce qui revient à F(x)$\geq \frac{1}{x}(e^x - \mathrm{e})$. Et en multipliant les deux membres par $\frac{1}{x}$ qui est strictement positif , on obtient : $\frac{1}{x} \mathrm{F}(x) \geq \frac{1}{x^2}(e^x - \mathrm{e})$.

c) On sait que $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}(e^x - \mathrm{e}) = +\infty$. On en déduit que $\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$. Par suite, on peut affirmer la courbe (C_F) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées (OJ).

<u>Remarque</u> : $\frac{F(x)}{x} = \frac{1}{x}$