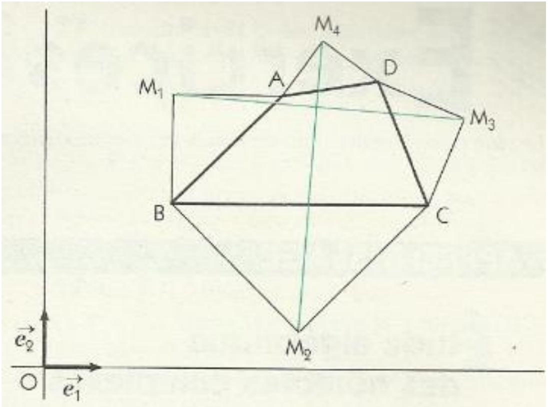
THEME : TRANSFORMATION DU PLAN

Durée : 12 heures **Code :**

Leçon 08 : NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE DU PLAN

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Des élèves d'un lycée ont décoré avec différentes figures géométriques les murs de la salle du club de Mathématiques.
La figure ci-contre représentant l'une d'elles est constituée d'un quadrilatère ABCD de sens direct et de triangles rectangles isocèles AM_1B, BM_2C, CM_3D et DM_4A de sommets respectifs M_1, M_2, M_3 et M_4.
Observant attentivement cette figure, l'un des élèves de la promotion de Terminale, passionné de nombres complexes et géométrie, affirme que les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ ont des supports perpendiculaires et ont la même longueur. D'autres élèves n'étant pas de cet avis, portent le problème aux autres.
Ceux-ci décident d'effectuer des calculs pour vérifier cette affirmation.



B-CONTENU DE LA LEÇON

1. ENSEMBLE DE POINTS ET NOMBRES COMPLEXES

1) Interprétation de $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right)$ et de $\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right|$

a) Interprétation de $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right)$

Propriété

Si A, B, C et D sont des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que A$\neq$ B et C$\neq$ D, alors $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right)$ est une mesure de l'angle orienté$(\widehat{\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA}})$.

Autrement dit : $mes\ (\widehat{\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA}}) = \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) + 2k\pi,\ k\epsilon\mathbb{Z}$

Exercice de fixation

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O ;I ;J)
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $-1 + i\sqrt{3}$; 2 et $-1 - i\sqrt{3}$.

Détermine la mesure principale de l'angle orienté$(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}})$.

Solution

$z_A \neq z_B$ et $z_B \neq z_C$. donc les points A, B et C sont tels que A ≠B et B ≠C.

On a : Mes$(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}) = \text{Arg}\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)$.

Calculons $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B} = \frac{-1+i\sqrt{3}-2}{-1-i\sqrt{3}-2}$$
$$= \frac{-3+i\sqrt{3}}{-3-i\sqrt{3}}$$
$$= \frac{(-3+i\sqrt{3})(-3+i\sqrt{3})}{(-3-i\sqrt{3})(-3+i\sqrt{3})}$$
$$= \frac{9-6i\sqrt{3}-3}{9+3}$$
$$= \frac{6-6i\sqrt{3}}{12}$$
$$= \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Posons $Arg\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \alpha$.

On a $\begin{cases} cos\alpha = \frac{1}{2} \\ sin\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Donc $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

D'où : Mes$(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}) = Arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)$
$$= Arg\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$
$$= -\frac{\pi}{3}.$$

Par suite la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}})$ est $-\frac{\pi}{3}$.

b) Interprétation de $\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right|$

Propriété

Si A, B, C et D sont des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que C≠ D, alors :
$\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right| = \frac{AB}{CD}$.

Exercice de fixation

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère les points non alignés A, B et C d'affixes respectives $-1+i\sqrt{3}$; 2 et $-1-i\sqrt{3}$

1) Donne une interprétation de $\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|$.

2) Déduis-en que : AB = BC.

Solution

1) On a : $z_B \neq z_C$; ce qui justifie l'existence du quotient $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$

$\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right| = \frac{AB}{BC}$

2) Calculons $\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|$

$\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right| = \left|\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

D'où : $\frac{BA}{BC} = 1$ et par suite AB = BC.

TABLEAU RECAPITULATIF

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$).

A et B deux points distincts du plan d'affixes respectives z_A et z_B.
M est un point quelconque du plan d'affixe z et $\vec{u}$ désigne le vecteur-image de z.

CARACTERISATIONS COMPLEXES	CARACTERISATIONS GEOMETRIQUES	ENSEMBLE DE POINTS
$\lvert z - z_A \rvert = r,\ r \in \mathbb{R}_+^*$	$AM = r$	Cercle de centre A et de rayon r.
$\lvert z - z_A \rvert = \lambda \lvert z - z_B \rvert,\ \lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$AM = \lambda\, BM$ Ou bien $\frac{AM}{BM} = \lambda$	- la médiatrice du segment [AB] lorsque $\lambda = 1$ - le cercle de diamètre $[G_1G_2]$ lorsque $\lambda \neq 1$, où G_1 = bar {(A ;1), (B; λ)} et G_2 = bar {(A ;1), (B;- λ)}
$\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}$	La droite (AB) privée des points A et B.
$\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}$	Le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.
$\arg(z - z_A) = \alpha + k\pi,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AM}}\right) = \alpha + k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}$	la droite de repère $(A, \vec{u})$, privée de A, où $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \vec{u}}) = \alpha$
$\arg(z - z_A) = \alpha + k2\pi, \alpha \in \mathbb{R}$	$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AM}}\right) = \alpha + 2k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}$	la demi-droite de repère $(A, \vec{u})$, privée de A, où $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \vec{u}}) = \alpha$

<u>Exercices de fixation</u>

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$), A et B deux points distincts du plan d'affixes respectives z_A et z_B, M est un point quelconque du plan d'affixe z et de vecteur-image $\vec{u}$.
Associe chaque caractérisation complexe à l'ensemble des points du plan qui convient

caractérisations complexes			**ensembles**
$\lvert z - z_A \rvert = r,\ r \in \mathbb{R}_+^*$	**A**	**1**	Le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.
$\lvert z - z_A \rvert = \lambda \lvert z - z_B \rvert,\ \lambda \in \mathbb{R}_+^*$	**B**	**2**	la droite de repère $(A, \vec{u})$, privée de A, où $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \vec{u}}) = \alpha$
$\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = k\pi$	**C**	**3**	la demi-droite de repère $(A, \vec{u})$, privée de A, où $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \vec{u}}) = \alpha$
$\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$	**D**	**4**	Cercle de centre A et de rayon r.
$\arg(z - z_A) = \alpha + k\pi,\ \alpha \in \mathbb{R}$	**E**	**5**	- la médiatrice du segment [AB] lorsque $\lambda = 1$ - le cercle de diamètre $[G_1G_2]$ lorsque $\lambda \neq 1$, où G_1 = bar {(A ; 1), (B;λ)} et G_2 = bar {(A ;1), (B;- λ)}
$\text{Arg}(z - z_A) = \alpha + k\pi, \alpha \in \mathbb{R}$	**F**	**6**	La droite (AB) privée des points A et B.

Solution
A-4 ; B-5 ; C-6 ; D-1 ; E-2 ; F-3

Exercice de fixation 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$). Détermine l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|2iz - 3 + 2i| = |z - 2|$.

Solution

$$|2iz - 3 + 2i| = |z - 2| \Leftrightarrow \left|2i\left(z + 1 + \frac{3}{2}\,i\right)\right| = |z - 2| \Leftrightarrow 2\left|z + 1 + \frac{3}{2}i\right| = |z - 2|$$

$$\Leftrightarrow 2\left|z - (-1 - \frac{3}{2}i)\right| = |z - 2| \Leftrightarrow 2\text{ BM} = \text{AM où A et B sont}$$

les points d'affixes respectives 2 et $-1 - \frac{3}{2}i$.

$$\Leftrightarrow \frac{\text{MA}}{\text{MB}} = 2.$$

On considère les points H et K tels que H = bar {(A ; 1), (B ; 2)} et K = bar {(A ; 1), (B ;- 2)}.

L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $|2iz - 3 + 2i| = |z - 2|$ est le cercle de diamètre [HK].

On a : $z_{\mathrm{H}} = \frac{1\times2 + 2\times\left(-1-\frac{3}{2}i\right)}{3} = -1$ et $z_{\mathrm{K}} = \frac{1\times2 - 2\times\left(-1-\frac{3}{2}i\right)}{-1} = -4 - 3i.$

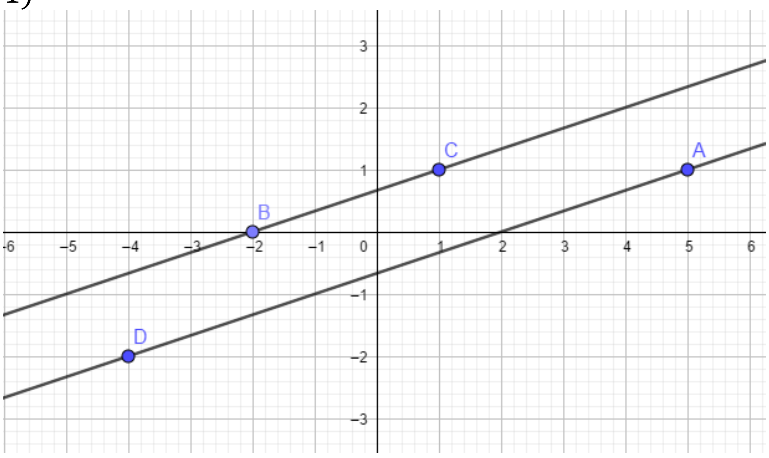
II. CONFIGURATIONS DU PLAN ET NOMBRES COMPLEXES

1) Droites parallèles

Propriété:
A, B, C et D sont des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que : A$\neq$ B et C$\neq$ D.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \in \mathbb{R}^*$.

Exercice de fixation
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $5 + i$; -2 ; $1 + i$ et $-4 - 2i$
1) Trace les droites (AD) et (BC).
2) Démontre que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Solution
1)



2) On a : $z_A \neq z_B$ et $z_D \neq z_C$. Donc A ≠B et D ≠C.

Calculons : $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_B}$

$$\frac{z_D - z_A}{Z_C - z_B} = \frac{-4 - 2i - (5 + i)}{1 + i - (-2)}$$
$$= \frac{-9 - 3i}{3 + i}$$
$$= \frac{-3(3+i))}{3+i} = -3.$$

- 3 $\epsilon \mathbb{R}^*$. Donc $\frac{z_D - z_A}{Z_C - z_B} \epsilon \mathbb{R}^*$. Par suite les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

2) Alignements de trois points

Propriété:

A, B et C sont des points tels que A ≠B et B ≠C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C .

Les points distincts A, B, et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \epsilon \mathbb{R}^*$.

Exercice de fixation

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $2 + i\sqrt{3}$; -1 et $11 + 4i\sqrt{3}$

Démontre que les points A, B et C sont alignés.

Solution

On a : $z_A \neq z_B$ et $z_B \neq z_C$ donc A ≠B et B ≠C.

Calculons : $\frac{z_A - z_B}{Z_C - z_B}$

$$\frac{z_A - z_B}{Z_C - z_B} = \frac{2 + i\sqrt{3} - (-1)}{11 + 4i\sqrt{3} - (-1)}$$
$$= \frac{3 + i\sqrt{3}}{12 + 4i\sqrt{3}}$$
$$= \frac{3 + i\sqrt{3}}{4(3 + i\sqrt{3})}$$
$$= \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{4}$ $\epsilon \mathbb{R}^*$. Donc $\frac{z_A - z_B}{Z_C - z_B} \epsilon \mathbb{R}^*$. Par suite les points A, B et C sont alignés.

3) Droites perpendiculaires

Propriété

A, B, C et D sont des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que : A≠ B et C≠ D.

Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \epsilon i\mathbb{R}^*$.

Exercice de fixation

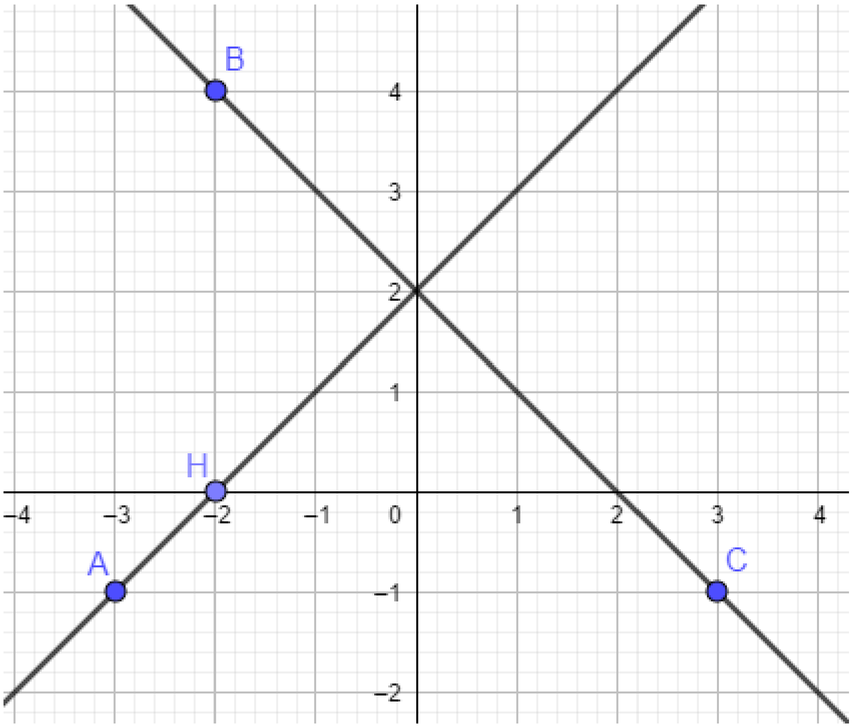
On considère les points A, B, C et H d'affixes respectives $-3 - i$; $-2 + 4i$; $3 - i$ et -2.

1) Trace les droites (AH) et (BC).

2) Démontre que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

Solution

1)



2) On a : $z_A \neq z_H$ et $z_B \neq z_C$ donc A≠ H et C≠ B.

Calculons $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$

$$\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A} = \frac{-2+4i-(3-i)}{-2-(-3-i)} = \frac{-5+5i}{1+i} = \frac{(-5+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$= \frac{-5+5i+5i+5}{1+1}$$
$$= \frac{10i}{2} = 5i$$

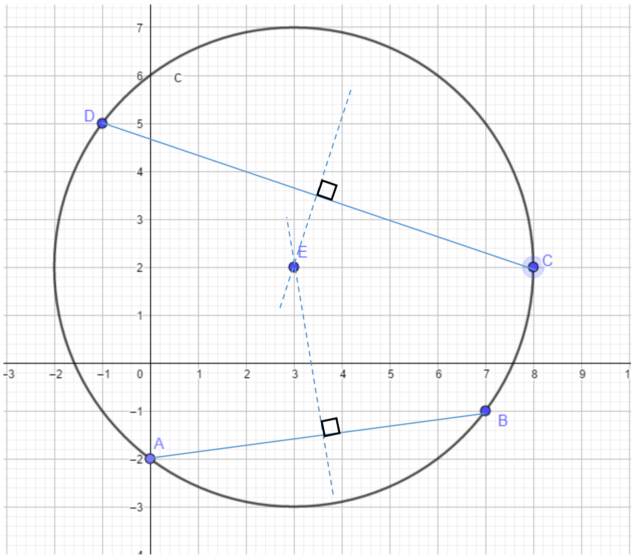
$5i \in i\mathbb{R}^*$. Donc les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

4) Points cocycliques
(C'est-à-dire des points situés sur un cercle)

Propriété
A, B, C et D sont des points deux à deux distincts et non alignés d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.
A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} : \frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \in \mathbb{R}^*$

Exercice de fixation
Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $-2i$; $7 - i$ et $8 + 2i$ et $-1 + 5i$.
a) Place les points A, B, C et D dans le repère.
b) Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.

Solution
a)



b) On a : $z_B \neq z_A$ et $z_B \neq z_C$. Calculons $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ et $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_C}$

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1 + 5i - (-2i)}{7 - i - (-2i)}$$

$$= \frac{-1+7i}{7+i} = \frac{(-1+7i)(7-i)}{(7+i)(7-i)} = \frac{-7+i+49i+7}{49+1} = \frac{50i}{50} = i$$

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} = \frac{-1+5i-(8+2i)}{7-i-(8+2i)} = \frac{-9+3i}{-1-3i} = \frac{(-9+3i)(-1+3i)}{(-1-3i)(-1+3i)} = \frac{9-27i-3i-9}{1+9} = \frac{-30i}{10} = -3i$$

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} : \frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} = \frac{i}{-3i} = -\frac{1}{3}.$$

Conclusion
$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = i$ donc A, B et D sont non alignés.
De plus $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} : \frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} \in \mathbb{R}^*$.
Donc les points A, B, C et D sont cocycliques.

5) Triangles particuliers et nombres complexes

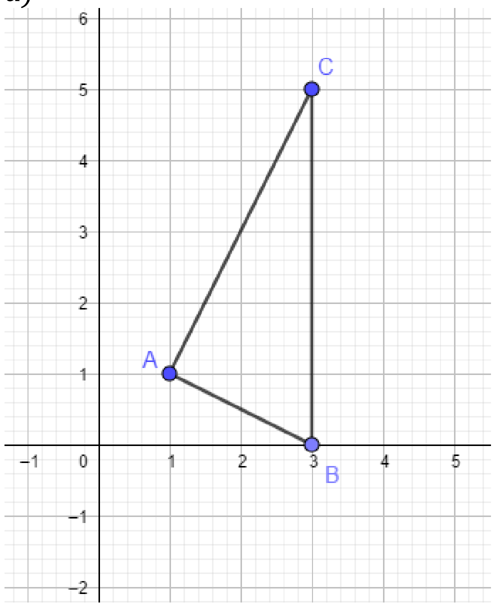
Propriétés

A, B et C sont des points non alignés d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.
- Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.
- Le triangle ABC est isocèle en A si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$, avec $0 < \alpha < \pi$
- Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$.
- Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice de fixation 1

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1 + i$; 3 et $3 + 5i$.
a) Place les points A, B et C dans le repère (O, I, J).
b) Démontre que le triangle ABC est rectangle en A.

Solution

a)  	b) On a : $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_A$. Donc A≠ B et C≠ A. Calculons : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{3-(1+i)}{3+5i-(1+i)}$ $= \frac{2-i}{2+4i}$ $= \frac{(2-i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}$ $= \frac{4-8i-2i-4}{4+16}$ $= \frac{-10i}{20}$ $= -\frac{1}{2}i$. $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \epsilon i\mathbb{R}^*$. Donc le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice de fixation 2

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $-3+2i$; $-2-3i$ et $3-2i$
Démontre que le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

Solution

On a : $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_B$. Donc A≠ B et C≠ B.

Calculons : $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-3+2i+2+3i}{3-2i+2+3i} = \frac{-1+5i}{5+i} = \frac{(-1+5i)(5-i)}{(5+i)(5-i)} = \frac{-5+i+25i+5}{25+1} = i$$

$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i$, donc le triangle est rectangle isocèle en B.

Exercice de fixation 3

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $-1+i\sqrt{3}$; 2 et $-1-i\sqrt{3}$.
Démontre que le triangle ABC est équilatéral.

Solution

On a : $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_B$. Les points A, B et C sont A≠ B et C≠ B.

Calculons : $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

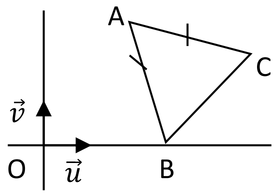
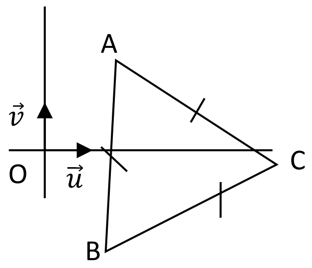
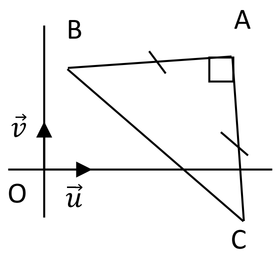
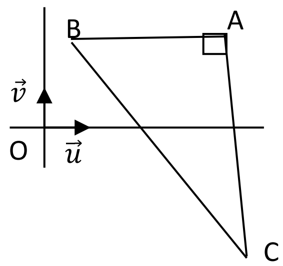
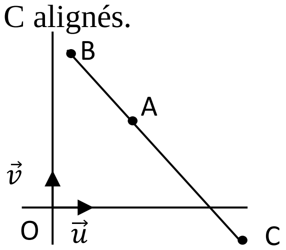
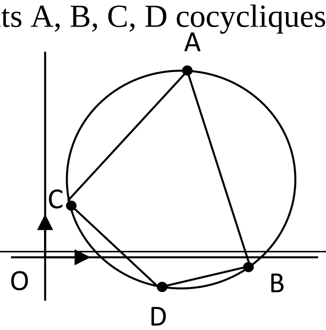
$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-1+i\sqrt{3}-2}{-1-i\sqrt{3}-2} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{-3-i\sqrt{3}} = \frac{(-3+i\sqrt{3})(-3+i\sqrt{3})}{9+3} = \frac{9-6i\sqrt{3}-3}{12} = \frac{6-6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

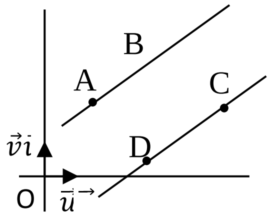
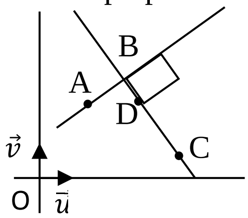
$= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}) = e^{-i\frac{\pi}{3}}$,

$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, donc ABC est un triangle équilatéral.

<u>TABLEAU RECAPITULATIF</u>

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

Configurations	Caractérisations géométriques	Caractérisations complexes
Triangle ABC isocèle en A. 	AB = AC et mes$\widehat{A} = \alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$.	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$
Triangle ABC équilatéral. 	AB = AC et mes$\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$.	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle et isocèle en A. 	AB = AC et mes$\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$.	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$
Triangle ABC rectangle en A. 	mes$\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = bi$, avec $b \in \mathbb{R}^*$
Points A, B, C alignés. 	mes$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$
Points A, B, C, D cocycliques 	mes$\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) =$ mes$\left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}\right) + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$ et mes$\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) \neq k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}$	$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} : \frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} \in \mathbb{R}^*$

Droites parallèles 	Il existe un nombre réel λ non nul tel que : $\overrightarrow{CD} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$. ou $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right) = k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}$	$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = k\pi\,;$ $k \in \mathbb{Z}$ ou $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$
Droites perpendiculaires 	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ ou $\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi;\, k \in \mathbb{Z}$	$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} +$ $k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}$ ou $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\,\mathbb{R}^*$

Exercice de fixation

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
On donne les points A, B, C, D et K d'affixes respectives $2 + i$, $2 - i$, $5 - 2i$, $5 + 2i$ et 4.
Justifie que :
1) les droites (AB) et (CD) sont parallèles ;
2) les droites (OK) et (DC) sont perpendiculaires

Solution

1) On a : $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{5+2i-(5-2i)}{2-i-(2+i)} = \frac{4i}{-2i} = -2$. D'où : $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$;Par suite les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
2) On a : $\frac{z_D - z_C}{z_K - z_O} = \frac{5+2i-(5-2i)}{4-0} = \frac{4}{4}\,i = i$. D'où : $\frac{z_D - z_C}{z_K - z_O} \in i\,\mathbb{R}^*$. Par conséquent les droites (OK) et (DC) sont perpendiculaires.

III. TRANSFORMATIONS DU PLAN ET NOMBRES COMPLEXES

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ})$.

- Une transformation du plan est une application bijective du plan dans le plan.
- Soit f une transformation du plan qui, à tout point M, associe le point M'.

L'application F de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui, à l'affixe z de M, associe l'affixe z' de M' s'appelle la transformation complexe associée à f .
L'application f s'appelle la transformation ponctuelle associée à F.
L'expression de z' en fonction de z s'appelle l'écriture complexe de f .

1- Définition d'une transformation du plan et d'écriture complexe

Définition
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

- Une transformation du plan est une application bijective du plan dans le plan.
- Soit F une transformation du plan qui à tout point M associe le point M'.

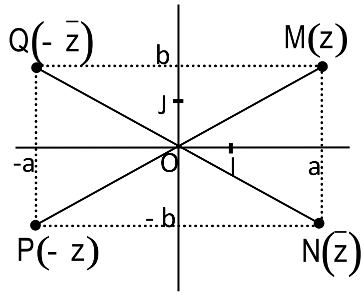
L'application bijective f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à l'affixe z de M, associe l'affixe z' de M' s'appelle la transformation complexe associée à F.
L'application F s'appelle la transformation ponctuelle associée à f.
L'expression de z' en fonction de z s'appelle l'écriture complexe de F.

2. Ecritures complexes de symétrie centrale de centre O et de symétries orthogonales d'axes (OI) et (OJ) dans le repère (O, I, J).

Propriété

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

- La symétrie orthogonale d'axe (OI) a pour écriture complexe : $z' = \bar{z}$.
- La symétrie centrale de centre O a pour écriture complexe : $z' = -z$.
- La symétrie orthogonale d'axe (OJ) a pour écriture complexe : $z' = -\bar{z}$.



3. Ecriture complexe d'une translation, d'une homothétie et d'une rotation

- **Translation**

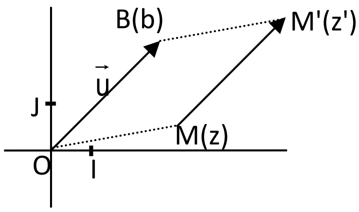
$t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b, M et M' sont les points du plan d'affixes respectives z et z'.

On a : $M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

$\Leftrightarrow z' - z = b$

$\Leftrightarrow z' = z + b$

La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b a pour écriture complexe : $z' = z + b$.



Exercice

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé.
On donne le vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1 - 2i$.
1) Donne l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$.
2) Détermine les affixes des images respectives A' et B' par t de chacun des points A et B, d'affixes respectives $3 - i$ et 5.

Solution

1) L'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1 - 2i$ est :
$z' = z + 1 - 2i$
2) Déterminons les affixes des images A' et B' respectives de A et de B par t.
$z_{A'} = z_A + 1 - 2i$
On a : $z_{A'} = 3 - i + 1 - 2i = 4 - 3i$
Donc $z_{A'} = 4 - 3i$

$z_{B'} = z_B + 1 - 2i$
On a : $z_{B'} = 5 + 1 - 2i = 6 - 2i$
Donc : $z_{B'} = 6 - 2i$

- **Homothétie de centre Ω et de rapport k, $k \in \mathbb{R}^*$**

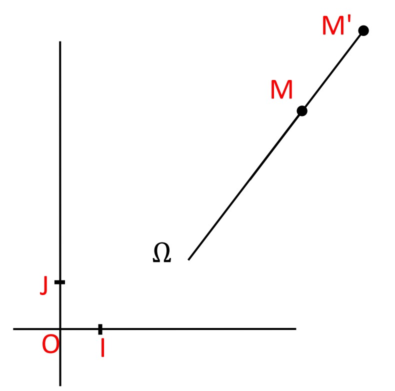
h est l'homothétie de centre Ω d'affixe Z_Ω et de rapport k, $k \in \mathbb{R}^*$.
M et M' sont les points du plan d'affixes respectives z et z'. On a :

$M' = h(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

$\Leftrightarrow Z' - Z_\Omega = k(Z - Z_\Omega)$

$\Leftrightarrow Z' = k(Z - Z_\Omega) + Z_\Omega$

L'homothétie de centre Ω d'affixe Z_Ω et de rapport k a pour écriture complexe : $Z' = k(Z - Z_\Omega) + Z_\Omega$



Exercice
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé.
Détermine l'écriture complexe associée à l'homothétie h de rapport – 2 et de centre Ω d'affixe $3 - i$.

Solution
L'écriture complexe associée à l'homothétie h de rapport -2 et de centre Ω d'affixe $3 - i$ est : $z' = -2\big(z - (3 - i)\big) + (3 - i)$.
Par suite : $z' = -2z + 9 - 3i$.

- **Rotation de centre Ω et d'angle θ, $\theta \in]-\pi, \pi]$**

r est la rotation de centre de centre Ω d'affixe Z_Ω et d'angle orienté de mesure principale θ.
• M et M' sont les points du plan d'affixes respectives z et z' tels que M est distinct de Ω. On a :

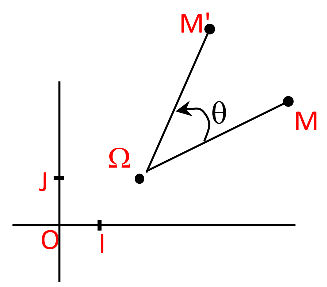
$$M' = r(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ Mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \end{cases}$$

• $r(\Omega) = \Omega$

On a : $\frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = e^{i\theta}$

$z' = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$

La rotation de centre Ω d'affixe Z_Ω et d'angle orienté de mesure principale θ a pour écriture complexe :
$z' = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$



Exercice
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct. (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$)
Trouve l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω d'affixe $i\sqrt{3}$ et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{3}$.

Solution

La rotation de centre Ω d'affixe Z_Ω et d'angle orienté de mesure principale θ a pour écriture complexe : $z' = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$
Or $z_\Omega = i\sqrt{3}$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$

Donc $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - i\sqrt{3}) + i\sqrt{3}$

Comme $e^{i\frac{\pi}{3}} = cos\frac{\pi}{3} + i\ sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

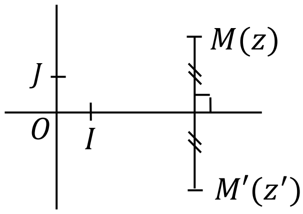
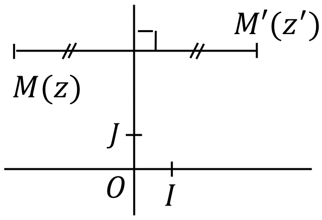
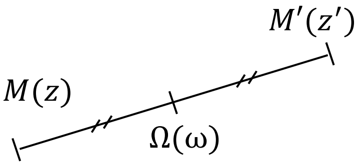
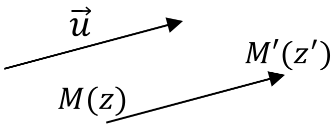
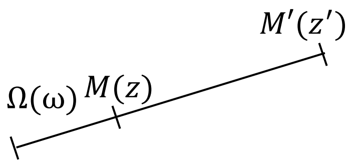
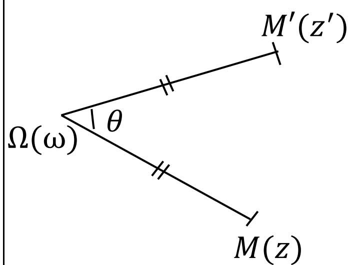
On a : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - i\sqrt{3}) + i\sqrt{3}$

$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - i\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\sqrt{3}$

Par suite : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + i\sqrt{3}$

On en déduit que : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Le tableau suivant donne des transformations du plan et leurs écritures complexes

Transformation du Plan	Image $M'(z')$ d'un point $M(z)$	Définition géométrique	Ecriture complexe
Symétrie orthogonale d'axe (OI)		La droite (OI) est la médiatrice du segment $[MM']$	$z' = \bar{z}$
Symétrie orthogonale d'axe (OJ)		La droite (OJ) est la médiatrice du segment $[MM']$	$z' = -\bar{z}$
Symétrie centrale de centre $\Omega(\omega)$		$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = -(z - \omega)$
Translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b		$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + b$
Homothétie de Centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)		$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = k(z - \omega)$
Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ		$M \neq \Omega$ $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \end{cases}$	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

Exercices de fixation

Exercice

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{OI}\ ; \overrightarrow{OJ}\ )$.
Détermine l'écriture complexe de l'homothétie h de centre Ω d'affixe $-1-\mathrm{i}$ et de rapport 3.

Solution

h étant l'homothétie de centre Ω d'affixe $-1-\mathrm{i}$ et de rapport 3, son écriture complexe est : $z' - (-1-\mathrm{i}) = 3(z - (-1-\mathrm{i}))$.
Par suite, l'écriture complexe de l'homothétie h de centre $\Omega(-1-\mathrm{i})$ et de rapport 3 est :

$$z' = 3z + 2 + 2\mathrm{i}.$$

4. Similitude plane directe

a- Ecriture complexe d'une similitude plane directe

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ; \vec{u}\ ; \vec{v}\ )$.

1. Définition

Une similitude directe est une transformation du plan dont l'écriture complexe est de la forme : $z' = az + b$ où $a \in C^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Exemple :
Toute translation, toute homothétie et toute rotation est une similitude directe.

2. Propriété

Soit s une similitude directe d'écriture complexe : $z' = a z + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
* Si $a = 1$, alors s est la translation de vecteur d'affixe b.
* Si $a \neq 1$ alors s est la similitude directe de centre d'affixe $\frac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$, d'angle $\mathrm{Arg}(a)$.

Remarque :
Pour déterminer l'affixe du centre de la similitude, on résout l'équation : $z \in \mathbb{C}$, $z = a z + b$

<u>Vocabulaire</u>
Lorsque $a \neq 1$, la similitude directe est caractérisé par : son centre, son rapport et son angle.

Remarque
• Toute rotation de centre A et d'angle α est une similitude directe de centre A , de rapport 1 et d'angle α.
•Toute homothétie de centre A et de rapport $k\,(k > 0)$ est une similitude directe de centre A, de rapport k et d'angle nul.

•Toute homothétie de centre A et de rapport $k (k < 0)$ est une similitude directe de centre A , de rapport $-k$ et d'angle π.

Exercice de fixation
Détermine les éléments caractéristiques de la similitude directe **S** dont l'écriture complexe est : $z' = (1-i)z + i$

Solution
L'écriture complexe de S est de la forme $z' = az + b$ *où* $a = 1 - i$, et $b = i$.
$a \neq 1$. Soit A le centre de **S**, k son rapport et θ son angle.
• L'affixe du centre A est $\frac{b}{1-a}$
$\frac{b}{1-a} = \frac{i}{1-(1-i)} = \frac{i}{i} = 1$
• Le rapport k est tel que : $k = |a|$
$k = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
• L'angle θ est tel que : $\theta = \operatorname{Arg}(a)$
On a : $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\theta = -\frac{\pi}{4}$
S est la similitude directe de centre A d'affixe 1, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

b- Reconnaitre une similitude directe définie par son écriture complexe

Propriétés
Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct, on considère la similitude directe S d'écriture complexe : $z' = az + b$ où $a \in C^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

TABLEAU RECAPITULATIF PERMETTANT DE PARTICULARISER UNE SIMILITUDE

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Conditions vérifiées par a</td><td>Nature et éléments caractéristiques de S</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Similitude directe S d'écriture complexe
$\boldsymbol{z' = az + b}$
où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.</td><td rowspan="2">Si $a \in \mathbb{R}^*$</td><td>$a = 1$</td><td>S est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b</td></tr>
<tr><td>$a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$</td><td>S est l'homothétie de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et de rapport a.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$</td><td>$|a| = 1$</td><td>S est la rotation de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle Arg (a)</td></tr>
<tr><td>$|a| \neq 1$</td><td>S est la similitude directe de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ de rapport $|a|$ de d'angle Arg (a)</td></tr>
</table>

Exercice de fixation
Détermine dans chaque cas, la nature et les éléments caractéristiques de la similitude directe S définie par son écriture complexe :

a) $z' = 5z + 2i$;
b) $z' = z + 1 + 3i$;
c) $z' = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$;
d) $z' = (-1 + i)z + 2$.

Solution
a) $a = 5$, dans ce cas $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, S est une homothétie de rapport 5.
Déterminons l'affixe z_0 de son centre.

$z_0 = \frac{2i}{1-5} = -\frac{1}{2}i$

Donc S est l'homothétie de centre le point d'affixe $-\frac{1}{2}i$ et de rapport 5

b) a = 1. Donc, S est la translation de vecteur d'affixe 1+3i

c) $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, dans ce cas $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i| = 1$, donc S est une rotation

Déterminons son angle

$\text{Arg}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{\pi}{3}$ car $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}$.

Son angle est $\frac{\pi}{3}$

Déterminons son centre

$\frac{b}{1-a} = \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

$= \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

$= 1$

Son centre a pour affixe 1.

D'où, S est la rotation de centre le point d'affixe 1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

d) a = -1 + i, dans ce cas $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$|-1+i| = \sqrt{2}$, $|-1+i| \neq 1$ donc S est une similitude directe

$\text{Arg}(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$ car $-1 + i = cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}$

L'angle de S est $\frac{3\pi}{4}$

$\frac{b}{1-a} = \frac{2}{1-(-1+i)}$

$= \frac{2}{2-i}$

$= \frac{2(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4+2i}{4+1} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$

D'où, S est la similitude directe de centre le point d'affixe $\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

c- Détermination de l'écriture complexe d'une similitude directe donnée par son centre, son rapport et son angle.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

<u>**Propriété**</u>

Soit M' un point du plan d'affixe z' qui est l'image d'un point M d'affixe z par une similitude directe S de centre Ω d'affixe z_Ω, de rapport k et d'angle θ.

On a : $z' = ke^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$.

<u>**Exercice de fixation**</u>

Détermine l'écriture complexe de la similitude directe de centre le point A d'affixe i, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

<u>**Solution**</u>

La forme générale de l' écriture complexe de S est : $z' = ke^{i\theta}(z - z_A) + z_A$

$z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_A) + z_A$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z - i) + i$

$= (1 + i)(z - i) + i$

$= (1 + i)z + 1.$

Donc l'écriture complexe de S est : $z' = (1 + i)z + 1$.

d. Construction de l'image d'un point par une similitude directe définie par son centre, son rapport et son angle.

<u>**Propriété**</u>

Soit s une similitude plane directe de centre A ,de rapport k et d'angle θ($\theta \in]-\pi;\pi[$).

Pour tout point M du plan distinct de A, s(M) = M' $\Leftrightarrow \begin{cases} AM' = kAM \\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}}\right) \end{cases}$

<u>**Conséquence**</u>

Toute similitude directe $s_{(A, k, \theta)}$ de centre A, de rapport k et d'angle de mesure θ, s'écrit de façon unique sous la forme :

$s_{(A\,;\,k\,;\,\theta)} = r_{(A\,;\,\theta)} \circ h_{(A\,;\,k)} = h_{(A\,;\,k)} \circ r_{(A\,;\,\theta)}$.

* $h_{(A\,;\,k)}$ est l'homothétie de centre A et de rapport k
* $r_{(A\,;\,\theta)}$ est la rotation de centre A et d'angle de mesure θ.

<u>Vocabulaire</u>:

L'écriture: $s_{(A\,;\,k\,;\,\theta)} = r_{(A\,;\,\theta)} \circ h_{(A\,;\,k)} = h_{(A\,;\,k)} \circ r_{(A\,;\,\theta)}$ s'appelle la décomposition canonique de la similitude directe $s_{(A\,;\,k\,;\,\theta)}$

Exercice de fixation 1

Ecris la décomposition canonique de $s_{(A\,;\,2\,;\,\frac{3\pi}{2})}$

Solution

$s_{(A\,;\,2\,;\,\frac{3\pi}{2})} = r_{(A\,;\,\frac{3\pi}{2})} \circ h_{(A\,;\,2)} = h_{(A\,;\,2)} \circ r_{(A\,;\,\frac{3\pi}{2})}$.

<u>**Exercice de fixation 2**</u> :

Construis l'image M' d'un point M par la similitude directe S de centre A, de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Solution

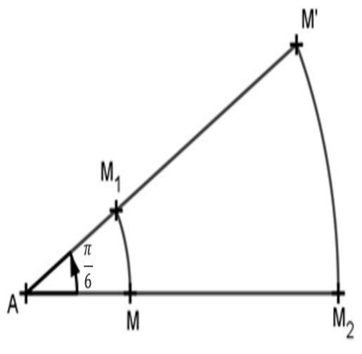
$s_{(A\,;\,3\,;\,\frac{\pi}{6})} = h_{(A\,;\,3)} \circ r_{(A\,;\,\frac{\pi}{6})} = r_{(A\,;\,\frac{\pi}{6})} \circ h_{(A\,;\,3)}$

• $s_{(A\,;\,3\,;\,\frac{\pi}{6})} = h_{(A\,;\,3)} \circ r_{(A\,;\,\frac{\pi}{6})}$.

$M \longmapsto^{r} M_1 \xrightarrow{h} M'$

• $s_{(A\,;\,3\,;\,\frac{\pi}{6})} = r_{(A\,;\,\frac{\pi}{6})} \circ h_{(A\,;\,3)}$

$M \xrightarrow{h} M_2 \xrightarrow{r} M'$



e. Similitude directe définie par deux points distincts et leurs images

Propriété
Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que : $A \neq B$ et $C \neq D$.
Il existe une unique similitude directe qui transforme A en C et B en D.

Conséquence
Soit A, B et C trois points du plan tels que : $A \neq B$ et $B \neq C$.
Il existe une unique similitude directe qui transforme A en B et B en C

Exercice de fixation
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.
On donne les points A(2), B(2+2i), C(1-3i) et D(-4i).
a) Trouve l'écriture complexe de la similitude directe s telle que : s(A) = C et s(B) = D.
b) Détermine les éléments caractéristiques de S.

Solution
a) Soit : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, l'écriture complexe de S.

$$\begin{cases} s(A) = C \\ s(B) = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} az_A + b = z_C \\ az_B + b = z_D \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 1 - 3i \\ (2 + 2i)a + b = -4i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 1 - 3i \\ (-2 - 2i)a - b = 4i \end{cases}$$

$$-2ia = 1+i$$

$$a = \frac{1+i}{-2i} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

La 1ère équation du système donne :

$$b = 1 - 3i - 2a = 1 - 3i - 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$b = 2 - 4i$$

L'écriture complexe de s est : $z' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 2 - 4i$

b) Notons k le rapport de S, θ son angle et Ω son centre :

* $k = \left|-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$
* $\theta = \text{Arg}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\pi}{4}$
* $z_\Omega = \frac{2-4i}{1-\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)} = \frac{2-2i}{1-\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)} = 2 - 2i$

Donc, S est la similitude directe de centre Ω(2-2i), de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

Cas particulier : Similitude directe définie par son centre, un point et son image

Propriété
Soit A, B et C trois points du plan tels que : $A \neq B$ et $A \neq C$.
Il existe une unique similitude directe de centre A qui transforme B en C.

Exercice de fixation
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on donne les points A(-2+i), B(1+2i) et C(2-i).
On considère la similitude directe S de centre A telle que : S(B) = C.
a) Trouve l'écriture complexe de S.
b) Détermine les éléments caractéristiques de S

SOLUTION
a) L'écriture complexe de s est de la forme : z' = az + b où a$\in \mathbb{C}^*$ et b $\in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} s(A) = A \\ s(B) = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} az_A + b = z_A \\ az_B + b = z_C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-2+i)a + b = -2+i & (L_1) \\ (1+2i)a + b = 2-i & (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-2+i)a + b = -2+i & (L_1) \\ (-1-2i)a - b = -2+i & -1 \times (L_2) \end{cases}$$

$(L_1) - (L_2) \Leftrightarrow (-3-i)a = -4+2i$

$a = \frac{-4+2i}{-3-i}$

a = 1 - i

(L_1) donne : b = -2 + i - (-2+i)a

b = -2 + i - (-2+i)(1 - i) = -1 - 2i

Donc, S : z' = (1 - i)z - 1 - 2i

b) S a un centre, donc S n'est pas une translation.
a = 1 – i, a $\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ donc S n'est pas une homothétie.
|1 - i| = $\sqrt{2}$, |a| $\neq$1 donc S n'est pas une rotation.
D'où S est la similitude directe de centre A de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle Arg(1 - i)
Soit θ l'argument principal 1-i.

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

Conclusion : S est la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$

f. Images de figures simples par une similitude directe

Propriété 1
Toute similitude directe de rapport k transforme :
• une droite en une droite ;
• une demi-droite en une demi-droite ;
• un segment de longueur ℓ en un segment de longueur $k\ell$;
• un cercle de centre A et de rayon r en un cercle de centre A', image de A par la similitude directe, et de rayon kr.

Propriété 2

Toute similitude directe de rapport k multiplie :
- les distances par k ;
- les aires par k^2

Exercice de fixation
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
On donne la similitude directe S dont l'écriture complexe est : $z' = (1 + i)z - 1 - 2i$
a) Calcule l'aire a_1 de l'image du triangle OIJ par S.
b) Trouve l'image (C_2) par S du cercle (C_1) de centre O et de rayon 2.
c) Détermine l'image de la droite (OI) par S.

Solution
a) Le rapport de la similitude S est $\sqrt{2}$. Le triangle OIJ a pour aire $\frac{1}{2}$ ua.
Donc l'aire a_1 de l'image du triangle OIJ est : $\left(\sqrt{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2}$ ua, soit 1ua.
b) Soit O' l'image de O par S. On a : $z_{O'} = -1 - 2i$.
(C_2) est le cercle de O' et de rayon $2\sqrt{2}$.
c) Soit I' l'image de I par S. On a : $z_{I'} = -i$.
L'image de la droite (OI) par S est la droite (O'I').

C- SITUATION COMPLEXE

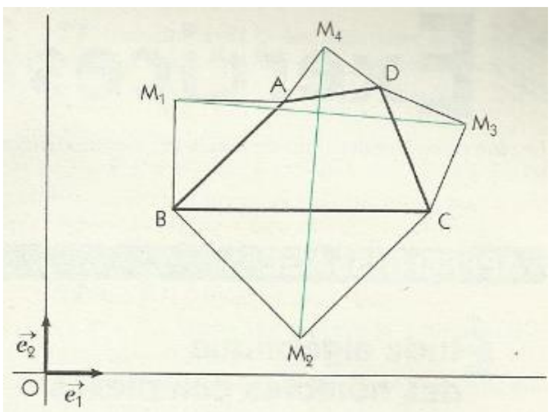
Situation complexe 1

Lors de la préparation d'un exposé en géométrie, un groupe d'élèves d'une classe de terminale découvre l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$, $2z^2 + 2z + 1 = 0$.
Ils veulent avoir des informations sur cette équation.
Après réflexion, un élève de ce groupe affirme que si l'on note a une solution de (E) dont la partie imaginaire est positive, les nombres a, a^2et a^3 seront les affixes des sommets d'un triangle équilatéral. Sa voisine de classe ne partage pas cet avis.
Ayant suivi la discussion, tu décides de les départager.
Dis, en argumentant, lequel des deux élèves a raison.

Solution
Les solutions de $2z^2 + 2z + 1 = 0$ sont : $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, les nombres a, a^2et a^3 seront les affixes des sommets d'un triangle équilatéral si $\frac{a^3-a}{a^2-a} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou si $\frac{a^3-a}{a^2-a} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ or $\frac{a^3-a}{a^2-a} = a + 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ donc le triangle n'est pas équilatéral

Situation complexe 2

Des élèves d'un lycée ont décoré avec différentes figures géométriques les murs de la salle du club de Mathématiques.
La figure ci-contre représentant l'une d'elles est constituée d'un quadrilatère ABCD de sens direct et des triangles rectangles isocèles AM_1B, BM_2C,



CM_3D et DM_4A de sommets respectifs M_1, M_2, M_3 et M_4.
Observant attentivement cette figure, l'un des élèves de la promotion de Terminale, passionné de nombres complexes et de géométrie, affirme que les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ ont des supports perpendiculaires et ont la même longueur.
Démontre en utilisant les nombres complexes que l'affirmation de cet élève est correcte.

Solution

- Pour résoudre ce problème, on va utiliser les nombres complexes appliqués à la géométrie.
- Pour cela, désignons par z_A, z_B, z_C et z_D, les affixes respectifs des points A,B,C et D ; $z_1, z_2, z_3,$ et z_4 les affixes respectifs des points M_1, M_2, M_3 et M_4.

Le triangle AM_1B est rectangle isocèle en $M_1 \Leftrightarrow \frac{z_B - z_1}{z_A - z_1} = i$ (car le triangle AM_1B est directe).

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = \frac{z_B - iz_A}{1-i}$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = \frac{(z_B - iz_A)(1+i)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = \frac{z_A \times (1-i) + z_B \times (1+i)}{2}.$$

De même, on montre que les triangles BM_2C, CM_3D , DM_4A sont rectangles si et seulement si on a respectivement :

$$z_2 = \frac{z_B \times (1-i) + z_C \times (1+i)}{2}, \quad z_3 = \frac{z_C \times (1-i) + z_D \times (1+i)}{2} \quad \text{et} \quad z_4 = \frac{z_D \times (1-i) + z_A \times (1+i)}{2}.$$

Il reste à calculer : $\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_1}$

$$\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{\frac{z_D \times (1-i) + z_A \times (1+i)}{2} - \frac{z_B \times (1-i) + z_C \times (1+i)}{2}}{\frac{z_C \times (1-i) + z_D \times (1+i)}{2} - \frac{z_A \times (1-i) + z_B \times (1+i)}{2}}$$

$= \frac{(1-i)(z_D - z_B) + (1+i)(z_A - z_C)}{(1-i)(z_C - z_A) + (1+i)(z_D - z_B)}$ et par multiplication par le conjugué

(1 + i) de (1 – i) $= \frac{2 \times (z_D - z_B) + 2i \times (z_A - z_C)}{2 \times (z_C - z_A) + 2i \times (z_D - z_B)}$

$$= \frac{[(z_D - z_B) + i \times (z_A - z_C)]}{i \times [(z_D - z_B) + i \times (z_A - z_C)]} = -i.$$

les segments $[M_1M_3]$ et $[M_2M_4]$ ont des supports perpendiculaires et puisque $|z_4 - z_2| = |z_4 - z_2|$ ces segments sont de même longueur.

Exercices de maison

Exercice 1

On donne le point A d'affixe $2+2i$.

a) Détermine l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ d'affixe 1-3i.

b) Détermine l'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport -3.

c) Détermine l'écriture complexe de la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 2

Détermine les éléments caractéristiques de la similitude directe **S** dont l'écriture complexe est : $z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2i\sqrt{3}$.

Exercice 3

Détermine dans chaque cas, la nature et les éléments caractéristiques de la similitude directe s définie par son écriture complexe :

a) z' = -3z +1- i ;

b) z' = z + i ;

c) $z' = (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)z + \frac{1}{2}i$;

d) z' = (2-2i)z.

e) z' = -z + i

Exercice 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

a) Détermine l'écriture complexe de la similitude directe de centre le point A d'affixe 1- i, de rapport 3 et d'angle $\frac{-3\pi}{4}$.

b) Détermine l'écriture complexe de la similitude directe de centre le point B d'affixe $i\sqrt{3}$, de rapport 4 et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$.

c) Détermine l'écriture complexe de la similitude directe de centre le point O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

D- EXERCICES

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
On donne les points A, B, C, D d'affixes respectives $2 + i$, $2 - i$, $5 - 2i$, $5 + 2i$.
Justifie que : les points A, B, C et D sont cocycliques.

Solution

On a : $\frac{z_D - z_C}{z_D - z_A} : \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{4i}{3+i} : \frac{-3+i}{-2i} = \frac{-2}{5}$.
D'où : $\frac{z_D - z_C}{z_D - z_A} : \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$.
Par suite les points A, B, C et D sont cocycliques.

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
1) Détermine l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1 + 4i$.
2) Détermine l'écriture complexe de la rotation r de centre A d'affixe $1 + i$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Solution

1) L'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ est : $z' = z + z_{\vec{u}}$. Or $z_{\vec{u}} = 1+4i$.
L'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ est : $z' = z + 1 + 4i$.

2) L’écriture complexe de la rotation r de centre A et d’angle $\frac{2\pi}{3}$ est :

$$z' - (1 + i) = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - (1 + i))$$

$$z' = (\frac{-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2})(z - (1 + i)) + 1 + i$$

$$z' = \left(\frac{-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + \frac{3+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

L’écriture complexe de la rotation r de centre A d’affixe $1 + i$ et d’angle $\frac{2\pi}{3}$ est :

$$z' = \left(\frac{-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + \frac{3+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

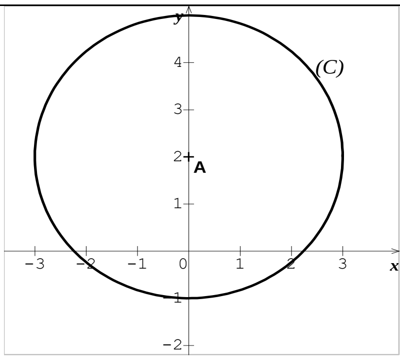
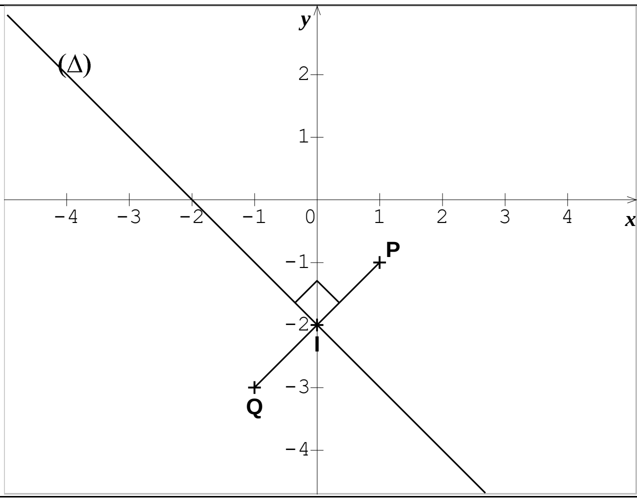
Exercice de renforcement

Exercice 3

Le plan complexe est muni d’un repère orthonormé direct $(O\,; \vec{u}\,, \vec{v}\,)$.
Dans chaque cas, détermine et construis l’ensemble des points M d’affixe z vérifiant la condition donnée :

a) $|z - 2i| = 3$.
b) $|z - 1 + i| = |z + 1 + 3i|$.
c) $\arg(z - 1 - i) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$.

Solution

a) $\lvert z - 2i\rvert = 3 \Leftrightarrow$ AM = 3 où A est le point d’affixe 2i. L’ensemble des points M dont l’affixe z vérifie : $\lvert z - 2i\rvert = 3$ est le cercle (C) de centre A de rayon 3.	
b) $\lvert z - 1 + i\rvert = \lvert z + 1 + 3i\rvert$ $\Leftrightarrow \lvert z - (1 - i)\rvert =$ $\lvert z - (-1 - 3i)\rvert$ $\Leftrightarrow$ PM = QM où P et Q sont les points d’affixes respectives $1 - i$ et $-1 - 3i$. L’ensemble des points M dont l’affixe z vérifie : $\lvert z - 1 + i\rvert = \lvert z + 1 + 3i\rvert$ est la médiatrice (Δ) du segment [PQ].	

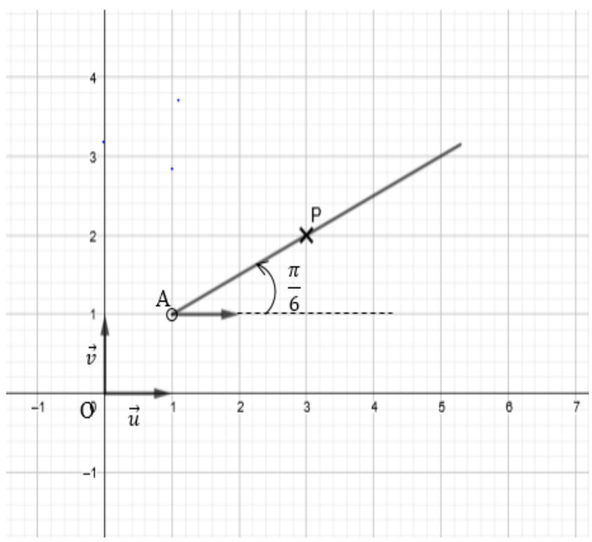
c) $\arg(z-1-i) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg(z-(1+i)) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg(z-z_A) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$, où $A(1+i)$

$\Leftrightarrow \mathrm{Mes}\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AM}}\right) = \frac{\pi}{6}$

L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $\arg(z-1-i) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ est la demi-droite [AP) privée du point A, où $\mathrm{Mes}\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AP}}\right) = \frac{\pi}{6}$.



3. Exercices d'approfondissement

Exercice 4

1) a) Résous dans C l'équation $z^2-2z+2=0$.

Précise le module et un argument de chacune des solutions.

b) Déduis les solutions de l'équation : $(-iz+3i+3)^2-2(-iz+3i+3)+2=0$

2) le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2cm,

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=1+i, z_B=\overline{z_A}$, $z_C=2z_B$

a) Détermine les formes algébriques de z_A, z_B et z_C

b) Place les points A, B et C

c) Montre que les points A, B et C appartiennent au cercle (C) de centre I d'affixe 3 et de rayon $\sqrt{5}$

d) Calcule $\frac{z_C-3}{z_A-3}$; en déduire la nature du triangle IAC.

Solution

1) a) $z^2-2z+2=0$. Utilisons (une fois quand même la forme canonique !)

$z^2-2z+2=0 \Leftrightarrow (z-1)^2-1+2=0 \Leftrightarrow (z-1)^2=-1=i^2 \Leftrightarrow z-1=i$ ou $z-1=-i \Leftrightarrow z=1+i$ ou $z=1-i$;

$S_C=\{1+i ; 1-i\}$

$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; $|1+i|=\sqrt{2}$ et $\mathrm{ARG}(1+i)=\frac{\pi}{4}$.

On montre de même que : $|1-i|=\sqrt{2}$ et $\mathrm{ARG}(1-i)=-\frac{\pi}{4}$

b) En posant $Z = -iz + 3i + 3$, l'équation dévient : $Z^2 - 2Z + 2 = 0$ donc les solutions sont d'après la première question, Z = 1 + i ou Z = 1 – i. Donc $-iz + 3i + 3 = 1 + i$ ou $-iz + 3i + 3 = 1 - i$; $z = 2 - 2i$ ou $z = 4 - 2i$; $S_C = \{2 - 2i ; 4 - 2i\}$

2°/ a) $z_A = 1 + i, z_B = 1 - i,\ z_C = 2 - 2i$;

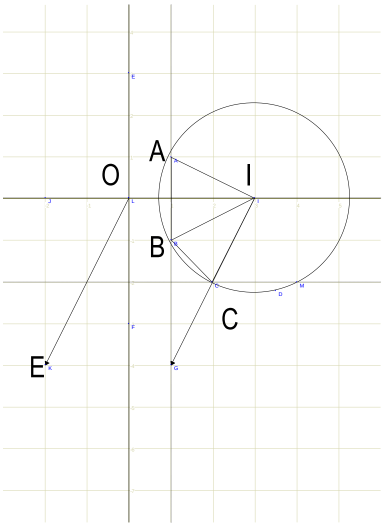
b) Figure

c) Il suffit de montrer que $IA = IB = IC = \sqrt{5}$

$IA = |z_{\overrightarrow{IA}}| = |1 + i - 3| = |-2 + i| = \sqrt{5}$; $IB = |z_{\overrightarrow{IB}}| = |1 - i - 3| = |-2 - i| = \sqrt{5}$

$IC = |z_{\overrightarrow{IC}}| = |2 - 2i - 3| = |-1 - 2i| = \sqrt{5}$

d) $\dfrac{z_C - 3}{z_A - 3} = i$; le triangle IAC est rectangle et isocèle en I.



Exercice 5

Exercice 5

Le plan complexe est muni du repère orthonormé (O, I, J).
A, B et D sont les points d'affixes respectives $-1 + 3i$; -2 et $2 + 2i$.
Soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre le point J d'affixe i.

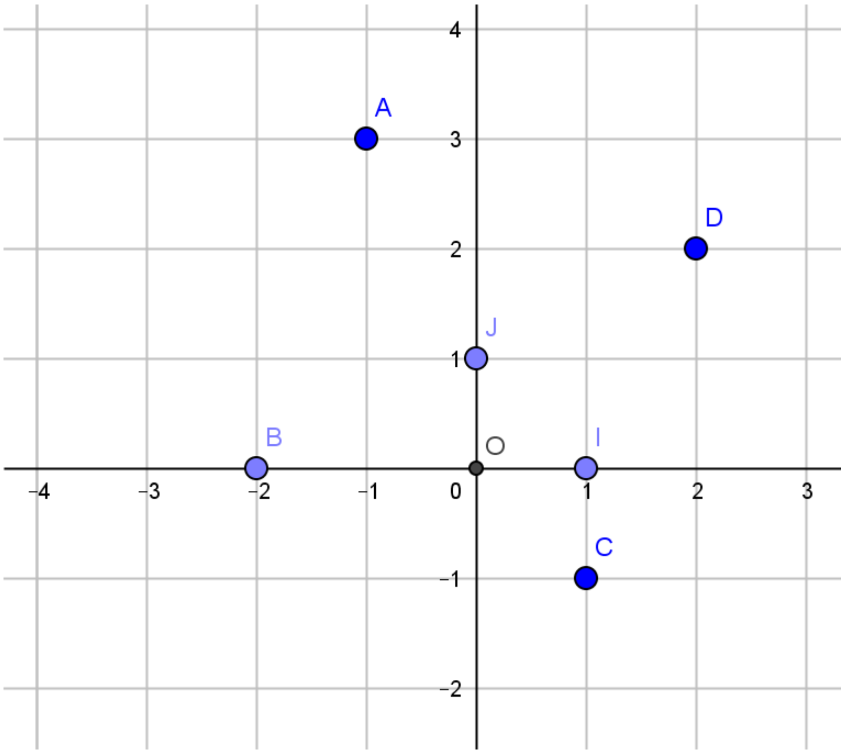
1- a) Fais une figure.
b) Démontre que l'écriture complexe de r est : $z' = i\,z + 1 + i$

2- a) Justifie que B est l'image du point A par la rotation r.
b) Justifie que D est l'antécédent du point A par r.

3- Soit C l'image du point A par la symétrie centrale de centre J.
a) Calcule l'affixe du point C.
b) Démontre que le quadrilatère ABCD est un carré.

Solution

1- a)



b) écriture complexe de r

L'écriture complexe d'une rotation est de la forme : $z' = e^{i\alpha}(z - \omega) + \omega$ où α est l'angle de la rotation et , l'affixe du centre de cette rotation. on en déduit que :

$z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - i) + i = iz + 1 + i$ est l'écriture complexe associé à cette rotation.

2) a- Soit z'_A, l'affixe de l'image de A par la rotation r ; $z'_A = i \times (-1 + 3i) + 1 + i = -2 = z_B$.

b- cela revient à résoudre l'équation :z $\in\mathbb{C}$, $-1 + 3i = iz + 1 + i$. On obtient : $z = \frac{-2+2i}{i} = 2 + 2i = z_D$.

3) a- calcule de l'affixe de C

$$z_J = \frac{z_A + z_C}{2} \Leftrightarrow z_C = 2 \times z_J - z_A = 2 \times i - (-1 + 3i) = 1 - i.$$

b- démontrons que ABCD est un carré.

Il suffit pour cela de montrer que ABCD est un losange ayant deux cotés consécutifs perpendiculaires.

- $|z_B - z_A| = |z_B - z_C| = |z_C - z_D| = |z_D - z_A|$, donc AB = BC = CD =DA.
- $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-2-(-1+3i)}{1 - i -(-1+3i)} = \frac{-1-3i}{2-4i} = \frac{(-1-3i)(2+4i)}{20} = \frac{-2-4i-6i+12}{20} = \frac{10-10i}{20} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ donc $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}}\right) = arg\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\pi}{4}$et puisque $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}}\right) = 2 \times Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}}\right) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ $d'où\ le\ résultat.$