THEME : FONCTIONS NUMERIQUES

Durée : 14 heures   Code :

LEÇON 05: FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Le médico-scolaire de ta commune organise une campagne de dépistage de la fièvre typhoïde dans ton établissement. Après avoir examiné n élèves pris au hasard, le médecin-chef affirme que la probabilité d'avoir au moins un élève non atteint de la fièvre typhoïde dans cet établissement est de $1-(0{,}325)^{n}$.
Afin de sensibiliser davantage les élèves contre cette maladie, le chef de l'établissement veut connaitre le nombre minimum d'élèves tel que la proportion d'avoir au moins un élève non atteint de la fièvre typhoïde soit supérieur à 98%. Il sollicite ta classe.
Après plusieurs essais infructueux avec la calculatrice, la classe décide de s'informer sur la résolution de ce type d'inéquation auprès de son professeur de mathématique.
.

B. CONTENU DE LA LEÇON

I- La fonction logarithme népérien

1. Définition

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0\,;+\infty[$ et qui s'annule en 1.

2. Conséquences

- **$\ln 1 = 0$**
- L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0\,;+\infty[$.
- La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
- Pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$, donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

3. Propriétés algébriques

Propriété fondamentale :
Pour tous réels a et b strictement positifs,
$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

Conséquences : Pour tous réels a et b strictement positifs :

- $\ln \frac{1}{b} = -\ln(b)$
- $\ln \frac{a}{b} = \ln(a) - \ln(b)$
- pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $\ln(a^r) = r\ln(a)$, en particulier, $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Exercice de fixation

Ecris sous la forme ln a, où a > 0, chacune des expressions suivantes :

A = ln 8 + ln 10 + ln $\frac{1}{40}$; B = ln 3x – ln 3 , x >0 ; C = ln$\frac{3}{4}$ + ln $\frac{8}{3}$ – ln 2^3

D = ln (7^{-3}) + 2 ln 49 E = 4 ln 25 – 2 ln $\sqrt{5}$

Solution

$$A = \ln 8 + \ln 10 + \ln \frac{1}{40} = \ln\left(8 \times 10 \times \frac{1}{40}\right) = \ln 2$$

$$B = \ln 3x - \ln 3 = \ln\left(\frac{3x}{3}\right) = \ln x$$

$$C = \ln\frac{3}{4} + \ln\frac{8}{3} - \ln(2^3) = \ln 2 - \ln(2^3) = \ln\left(\frac{2}{2^3}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right).$$

$$D = \ln(7^{-3}) + 2\ln 49 = \ln(7^{-3}) + \ln(49^2) = \ln(7^{-3} \times 7^4) = \ln 7$$

$$E = 4\ln 25 - 2\ln\sqrt{5} = 8\ln 5 - \ln 5 = \ln 5^7.$$

4. Equations, inéquations

Propriété : Pour tous réels a et b strictement positifs,

- ln a > ln b équivaut à $a > b$
- ln a = ln b équivaut à $a = b$

Conséquences : Pour tout réel x strictement positif :

- ln x = 0 équivaut à $x = 1$
- ln x < 0 équivaut à $0 < x < 1$
- ln $x \geq 0$ équivaut à $x \geq 1$

Le nombre réel e

La fonction ln est continue et strictement croissante sur]2 ; 3[.

ln 2 ≈ 0,69 et ln 3 ≈ 1,09 ; comme 1 ∈] ln2 ; ln3[, il existe un unique réel noté e ∈]2 ; 3[tel que ln(e)=1. On a : e ≈ 2,718.

Remarque :

Pour tout nombre rationnel r, ln (e^r) = r.

Résolution d'équations et d'inéquations

a) Equations du type ln u(x) = m

Exemple de resolution

- Résous dans ℝ, l'équation : ln(x) = 3

solution

ln(x) = 3 équivaut à $x \in]0; +\infty[$ et $x = e^3$.

$$S_{\mathbb{R}} = \{e^3\}$$

- Résous dans ℝ, l'équation : ln(2x – 1) = -5

Solution

ln(2x – 1) = -5 équivaut à $x \in]\frac{1}{2}; +\infty[$ et $2x - 1 = e^{-5}$. On obtient : $x = \frac{e^{-5}+1}{2}$.

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{e^{-5}+1}{2}\right\}$.

b) Inéquations du type ln u(x) < m

Résous dans ℝ, l'inéquation : ln(x + 1) ≤ 2

Solution

$\ln(x + 1) \leq 2$ équivaut à $x \in]-1; +\infty[$ et $\ln(x + 1) \leq \ln(e^2)$

équivaut à $0 < x + 1 \leq e^2$.

Donc $-1 < x \leq e^2 - 1$.

$S_{\mathbb{R}} =]-1 ; e^2 - 1[$.

c) Equations du type $a (\ln x)^2 + b \ln x + c = 0$

Résous dans$\mathbb{R}$, l'équation : $(\ln x)^2 - 3 \ln x - 4 = 0$.

Solution

L'ensemble de validité est$] 0 ; +\infty [$.

On pose $X = \ln x$ et on obtient l'équation : $X^2 - 3X - 4 = 0$

$\Delta = 25$. Les solutions sont alors : $X_1 = -1$ et $X_2 = 4$.

On résout alors les équations :

$\ln x = -1$ et on obtient : $x = e^{-1}$

$\ln x = 4$ et on obtient : $x = e^4$.

$$S_{\mathbb{R}} = \{e^{-1} ; e4\}$$

- <u>Méthode :</u> Pour résoudre une équation du type $\ln u(x) = \ln v(x)$ (respectivement une inéquation du type $\ln u(x) \geq \ln v(x)$) :

- on détermine l'ensemble de validité c'est à dire l'ensemble des réels x tels que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$ (dans ce cas l'équation est bien définie);
- on résout dans cet ensemble l'équation $u(x) = v(x)$ (respectivement l'inéquation $u(x) \geq v(x)$).

- <u>Exemple</u> : Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\ln(x^2 - 4) = \ln(3x)$.

-

.

L'équation sera alors résolue dans l'ensemble $E =]2 ; +\infty[$.

- de plus $x^2 - 4 = 3x$ signifie $x^2 - 3x - 4 = 0$.

On trouve $\Delta = 25$ et les solutions sont $x_1 = - 1$ et $x_2 = 4$. Or $4 \in E$ et $-1 \notin E$,
donc la seule solution de l'équation $\ln(x^2 - 4) = \ln(3x)$ est 4.

- Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\ln(2x + 4) \geq \ln(6 - 2x)$.
- On cherche les réels x tels que $2x + 4 > 0$ et $6 - 2x > 0$, c'est à dire tels que $x > -2$ et $x < 3$.

L'inéquation doit alors être résolue dans l'ensemble : $E =]-2 ; 3[$.

De plus, $2x + 4 \geq 6 - 2x$ équivaut à $x \geq \frac{1}{2}$. L'ensemble des solutions est alors : $E \cap [\frac{1}{2}; +\infty[$, c'est à dire $[\frac{1}{2} ; 3[$.

Exercices de fixation

Exercice1

Résous dans$\mathbb{R}$, l'équation : $\ln(2x - 4) = 0$

Solution

On cherche les nombres x tels que $2x - 4 > 0$

Or $2x - 4 > 0$, lorsque $x \in]2 ; +\infty[$.

L'équation sera alors résolue dans l'ensemble $V =]2 ; +\infty[$.

$\ln(2x - 4) = 0$ équivaut à $2x - 4 = 1$, c'est à dire $x = \frac{5}{2}$. Or $= \frac{5}{2} \in E$.

donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

Exercice2
Résous dans$\mathbb{R}$, l'inéquation : $\ln(x-10) < 0$

Solution
L'équation sera alors résolue dans l'ensemble E =] 10 ; + ∞[.

De plus : $x - 10 < 1$. D'où : $x < 11$.
L'ensemble des solutions est : $S_{\mathbb{R}} =$ E ∩]-∞ ; 11[c'est-à-dire] 10;11[.

5. Etude de la fonction ln

a- limite en +∞ et en 0

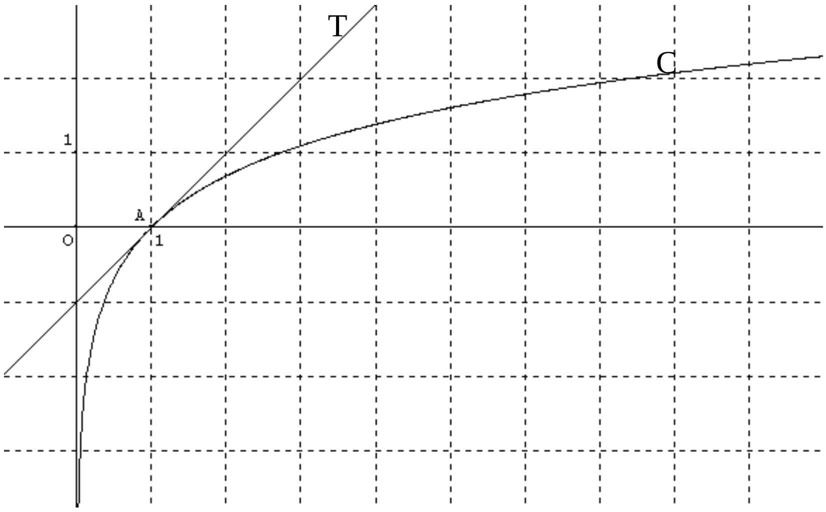
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$

Conséquence : L'axe des ordonnées est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction ln.

b- Variation de la fonction ln

la fonction ln est dérivable et strictement croissante sur]0 ; +∞[. On a :

x	0	+∞
$\frac{1}{x}$	+	
ln(x)	-∞ ↗	+∞



(T) est la tangente à la courbe représentative (C) de la fonction ln au point A d'abscisse 1.
Une équation de (T) est : $y = x - 1$
La courbe est au-dessous de T sur]0 ; +∞[, donc pour tout $x > 0$,
$\ln x \leq x - 1$.

- **limite en +∞ de $\frac{lnx}{x}$**

Propriété : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

Démonstration : f est la fonction définie sur]0 ; +∞[par $f(x) = \ln x - 2\sqrt{x}$.
f est dérivable sur]0 ; +∞[, et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$

Sur]0 ; +∞[, $f'(x)$ est du signe de $1 - \sqrt{x}$.
Le tableau de variation permet d'affirmer que, pour tout $x > 0$, $f(x) < 0$, c'est à dire $\ln x < 2\sqrt{x}$,
d'où $\frac{lnx}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$.

x	0	1	+∞
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	-∞ ↗	-2	↘ 0

Or pour tout $x \geq 1$, $0 \leq \frac{lnx}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$.

- Autres limites

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} x\, lnx = 0$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1} \frac{lnx}{x-1} = 1$

Exercices de fixation

Exercice 1

Calcule la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto 2x - 3 - lnx$

Solution

$$\lim_{x\to+\infty} (2x - 3 - lnx) = \lim_{x\to+\infty} x(2 - \frac{3}{x} - \frac{lnx}{x})$$

Or $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (2 - \frac{3}{x} - \frac{lnx}{x}) = 2 \end{cases}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x - 3 - lnx) = +\infty$

Exercice 2

Calcule :

a. la limite en 0 de x$\mapsto x^3 \ln x$

b. la limite en $+\infty$ de x$\mapsto x\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$

Solution

a. $\lim\limits_{x\to0} x^3 \ln x = \lim\limits_{x\to0} x^2 \times x \ln x = 0$

Car: $\lim\limits_{x\to0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} x \ln x = 0$

. b. On a : $x\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = 2 \times \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}$

Par composé $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ et et $\lim\limits_{x\to0} 2\frac{\ln(1+x)}{x} = 2$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = 2$

4. Etude de Fonction du type ln *u*

1. Dérivées de ln *u* et ln$|u|$

Propriétés

- Si *u* est une fonction dérivable et **strictement positive sur un intervalle I**, alors la fonction ln *u* est dérivable sur I et on a : (ln *u*)’ = $\frac{u'}{u}$.

- Si u est une fonction dérivable et **ne s'annulant pas sur un intervalle I**,

alors la fonction ln $|u|$ est dérivable sur I et : (ln $|u|$)' = $\frac{u'}{u}$.

Exercice de fixation

Dans chacun des cas suivants, précise l'ensemble de dérivabilité, puis détermine la dérivée de la fonction f :

a. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ b. $f(x)=ln|2x - 1|$

Solution

a. Le polynôme u définie par $u(x) = x^2 + 1$ est strictement positif et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x ∈ $\mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

b. On a : $2x - 1 \neq 0$ pour $x \neq \frac{1}{2}$.

La fonction f est dérivable sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$.

2. Primitive de $\frac{u'}{u}$

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, **ne s'annulant pas sur I**, alors, une primitive sur I de la fonction $\frac{u'}{u}$ est la fonction ln $|u|$.

Remarque

- $\ln|u| = \ln u$ si $u > 0$ sur I ;
- $\ln|u| = \ln(-u)$ si $u > 0$ sur I

Exercice de fixation

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive F de la fonction f sur l'intervalle K

a. $f(x) = \frac{1}{x}$, $K =]-\infty; 0[$

b. $f(x) = \frac{4x^3}{x^4+2}$, $K = \mathbb{R}$

Solution

a. Une primitive sur]-∞ ; 0[de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est donc la fonction $x \mapsto \ln|x|$.

Or : pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $x < 0$. $F(x) = ln|x| = ln(-x)$.

b. La fonction $f : x \mapsto \frac{4x^3}{x^4+2}$ se présente sous la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^4 + 2$.

Or : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^4 + 2 > 0$. Donc $F(x) = \ln|x^4 + 2| = \ln(x^4 + 2)$.

II. La fonction logarithme de base a

Définition :

On appelle fonction logarithme de base a (a >0 et a ≠ 1) , notée log_a , la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $log_a(x) = \frac{\ln(x)}{lna}$.

Remarque :

- La fonction logarithme décimal, notée log, est la fonction définie sur]0 ; +∞[par :

  $\log x = \frac{lnx}{ln10}$.
- Pour tout entier relatif n, log $(10^n) = n$.
- $log_a(a) = 1$.
- log(1) = 0, log(10) = 1.

C. SITUATION COMPLEXE

A la fin de chaque mois, une nouvelle entreprise de fabrication de boissons gazeuses fait le bilan de ses recettes du mois écoulé.
Un expert en finances et ami du chef de l'entreprise, ayant obtenu des chiffres sur l'évolution financière de cette entreprise, fait une modélisation des recettes par la fonction r telle que :
pour tout $x \geq 1$, $r(x) = 3x - x\ln\frac{1}{2}x$,
où x designe le nombre de mois d'existence de l'entreprise et $r(x)$ est exprimée en millions de francs CFA.
Le chef, pour surmonter d'éventuelles difficultés que pourrait connaître son entreprise, voudrait savoir le mois à partir duquel une baisse des recettes sera enregistrée, en vue d'accroître le capital d'investissement.
Il te sollicite.
Réponds à la préoccupation du chef de l'entreprise.

Solution

- Pour répondre à sa préoccupation je vais utiliser la fonction logarithme népérien.
- Après avoir déterminé le sens de variation de la fonction je vais répondre à sa préoccupation.

Etudions le sens de variation de la fonction r sur $[1;+\infty[$ et dressons son tableau de variation.

- $r(1) = 3 + ln2$
- Pour tout $x \in [1;+\infty[$, $r'(x) = 2 - \ln\frac{1}{2}x$.

$r'(x) > 0 \iff x < 2e^2$

On en déduit que : $\begin{cases} \forall x \in [1;2e^2[, & r'(x) > 0 \\ \forall x \in]2e^2;+\infty[, & r'(x) < 0 \end{cases}$

<u>Sens de variation de r</u>

r est strictement croissante sur $[1;2e^2[$
r est strictement décroissante sur $]2e^2;+\infty[$.
<u>Tableau de variation</u>

x	1	$2e^2$	$+\infty$
r '(x)	+	|	-
r(x)	$r(1) = 3 + ln2$ ↗		↘ - ∞

On a : $14 < 2e^2 < 15$.
L'entreprise va enregistrer une baisse de ses recettes mois à partir de son 15ème mois d'existence.

D. EXERCICES

1. Exercices d'application

Exercice 1

Calcule les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(7x)$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{lnx}$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln(x))$

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(4 - 3x)$

e. $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x\sqrt{2})$.

f. $\lim\limits_{x\to-\infty} ln\left(-\frac{x}{3}\right)$

g. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(0{,}8x)}{x}$

Solution

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(7x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$;

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{lnx} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{lnx}{x}} = +\infty$;

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(1 - \frac{ln(x)}{x}) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = 1 \end{cases}$;

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(4 - 3x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$;

e. $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x\sqrt{2}) = \lim\limits_{X\to 0} \ln(X) = 0$

f. $\lim\limits_{x\to-\infty} ln\left(-\frac{x}{3}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} ln(X) = +\infty$

g. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(0{,}8x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 0{,}8 \times \frac{\ln(0{,}8x)}{0{,}8x} = \lim\limits_{X\to+\infty} 0{,}8 \times \frac{\ln(X)}{X} = 0{,}8.$

.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive de la fonction f sur l'intervalle K

a. $f(x) = \frac{1}{1-3x}$, $K = \left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$

b. $f(x) = 2x - 7 + \frac{4}{x-9}$, $K =]9; +\infty[$

Solution

a. f admet pour primitive la fonction F avec $F(x) = \ln|1 - 2x|$.

b. f admet pour primitive la fonction F avec F(x)=$x^2 - 7x + 4ln|x - 9|$.

Exercice 3:

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1+lnx}{1-lnx}$.

Justifie que la fonction f admet le tableau de variation ci-dessous :

x	0	e	$+\infty$
$f(x)$	$-1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow -1$

Solution

f est une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

pour tout x $\in$ $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times(1-lnx)+\frac{1}{x}\times(1+lnx)}{(1-lnx)^2} = \frac{2}{x(1-lnx)^2}$. On a donc : pour tout x $\in$ $]0; +\infty[$, $f'(x)$ >0 donc f est strictement croissante sur $]0; e[$ et sur $]e; +\infty[$ d'où le tableau de variation.

2. Exercice de renforcement

Exercice 4

a. Résous dans ℝ, l'équation : $ln(2x-3) = 2ln(6-x) - lnx$
b. Résous dans ℝ, l'inéquation: $\ln 24 + \ln(3-x) < \ln(x+1) + \ln(25x-49)$

Solution

a. $ln(2x-3) = 2ln(6-x) - lnx$

On cherche les réels x tels que $2x - 3 > 0$, et $6 - x > 0$ et $x > 0$, c'est à dire tels que :
$x > \frac{3}{2}$, $x < 6$ et $x > 0$.
L'équation doit alors être résolue dans l'ensemble : $E = \left]\frac{3}{2} ; 6\right[$
On a : $2x - 3 = \frac{(6-x)^2}{x}$
On obtient : $x = 3$ ou $x = -12$.
$3 \in E$, mais $-12 \notin E$. Donc l'unique solution de l'équation est 3.

b. $\ln 24 + \ln(3-x) < \ln(x+1) + \ln(25x-49)$

On cherche les réels x tels que $3 - x > 0$, et $x + 1 > 0$ et $25x - 49 > 0$, c'est à dire tels que :
$x < 3$, $x > -1$ et $x > \frac{49}{25}$.
L'inéquation doit alors être résolue dans l'ensemble : $E = \left]\frac{49}{25} ; 3\right[$

On a : $24(3-x) < (x+1)(25x-49)$

$25x^2 - 121 > 0$
Alors : $x \in \left]-\infty ; -\frac{11}{5}\right[\cup \left]\frac{11}{5} ; +\infty\right[$
On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S_{\mathbb{R}} = \left]\frac{49}{25} ; 3\right[\cap (\left]-\infty ; -\frac{11}{5}\right[\cup \left]\frac{11}{5} ; +\infty\right[)$$
$$S_{\mathbb{R}} = \left]\frac{11}{5} ; 3\right[.$$

3. Exercice d'approfondissement

Exercice 5
1. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 - 2x \ln x$.
   a. Détermine son sens de variation.
   b. Déduis-en le signe de $f(x)$.
2. Soit g la fonction définie sur $]0 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{lnx}{(x-2)^2}$.
   On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).
   a. Calcule les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
      Interprète graphiquement les résultats obtenus.
   b. Démontre que : pour tout x de $]0 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$, $g'(x) = \frac{f(x)}{x(x-2)^3}$.
   c. Détermine le sens de variation de g et dresse son tableau de variation.
   d. Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
   e. Construis (C) et (T) dans le repère (O,I, J) (unité 2 cm).

Solution

1. a. Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f^{'}(x) = -1 - 2lnx$

$f'(x) > 0 \iff x < e^{-\frac{1}{2}}$.

On en déduit que :

$$\begin{cases} \forall x \in \left]0; e^{-\frac{1}{2}}\right[, \quad f'(x) > 0 \\ \forall x \in \left]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty\right[, \quad f'(x) < 0 \end{cases}$$

<u>Sens de variation de f</u>

- f est strictement croissante sur $\left]0; e^{-\frac{1}{2}}\right[$
- f est strictement décroissante sur $\left]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty\right[$

a. <u>Signe de $f(x)$</u>

Utilisons le tableau de variation de f.

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ 0	$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{e}} - 2$	$\searrow$	$-\infty$

$\forall x \in]0; +\infty[$, $f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}} - 2 < 0$

2. a. Limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{lnx}{(x-2)^2} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{lnx}{(x-2)^2} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{lnx}{(x-2)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x+\infty} \frac{lnx}{(x-2)^2} = \lim_{x+\infty} \frac{lnx}{x} \times \frac{1}{x - 4 + \frac{4}{x}} = 0 \times 0 = 0$$

<u>Interprétation graphique des résultats</u>

- Les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$ sont des asymptotes verticales à (C).
- La droite d'équations $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

b. $\forall x \in]0\,;\,2[\cup]2\,;\,+\infty[$,

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-2)^2 - 2(x-2)lnx}{(x-2)^4} = \frac{\frac{1}{x}(x-2)^2 - 2(x-2)lnx}{(x-2)^4} = \frac{(x-2)^2 - 2x(x-2)lnx}{x(x-2)^4} = \frac{x-2-2xlnx}{x(x-2)^3} = \frac{f(x)}{x(x-2)^3}$$

c. Détermine le sens de variation de g.

$\forall x \in]0\,;\,2[\cup]2\,;\,+\infty[$, $x > 0$. Donc, le signe de $g(x)$ est celui de $\frac{f(x)}{(x-2)^3}$

- $\forall x \in]0\,;\,2[$, $(x-2)^3 < 0$ et $f(x) < 0$, donc $g'(x) > 0$

- $\forall x \in]2;+\infty[$, $(x-2)^3 > 0$ et $f(x) < 0$, donc $g'(x) < 0$

Donc : g est strictement croissante sur $]0\ ;\ 2[$

g est strictement décroissante sur $]2;+\infty[$

<u>Tableau de variation de g</u>

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	‖	$-$	
$g(x)$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$	

d. Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

Une équation de (T) est : $y = g'(1)(x-1) + g(1)$

$g(1) = 0$ et $g'(1) = 1$

Donc, une équation de (T) est : $y = x - 1$.

e. Construction de (C) et (T) dans le repère (O,I, J) (unité 2 cm).