Niveau : TD

MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

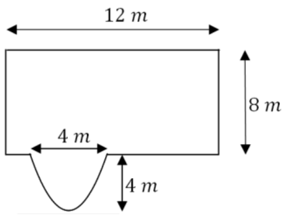
THEME : fonctions numériques

DUREE : 06 heures **CODE**

Leçon 4 : PRIMITIVES

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Le ministère a entrepris la construction d'une piscine dans l'enceinte d'un lycée d'excellence. L'entreprise chargée de l'ouvrage a affiché une image accompagnée d'un schéma de ce que sera cette piscine (voir image ci-contre).
Rimon élève de TA1 et amateur de natation, veut comparer la taille de la piscine de son lycée à celle du lycée professionnel de la ville. Il tente de calculer son aire mais n'y arrive pas. Il pose le problème à ses camarades de classe qui décident de l'aider à déterminer l'aire totale de la piscine en construction.



A. CONTENU DE LA LEÇON

I. Notion de primitive

1. Définition

f est une fonction définie sur un intervalle I. On appelle **primitive** de f sur I , toute fonction F dérivable sur I telle que f soit la dérivée de F.

Remarque

A partir de la définition, on peut écrire : **pour tout** $\mathbf{x \in I}$, $\mathbf{F'(x) = f(x).}$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 + 1$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F telle que : $F(x) = x^3 + x - 9$,

En effet : F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = 3x^2 + 1 = f(x)$.

EXERCICE DE FIXATION

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 5$.

On donne les fonctions F, G, H dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction P dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définies respectivement par :

$F(x) = x^2$; $G(x) = x^2 + 5x - 7$; $H(x) = x^2 + 5x$; $P(x) = x^2 + 5x + \frac{1}{x}$

Parmi les fonctions F, G, H et P, cite celles qui sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$

Solution

On vérifie que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = f(x)$ et $H'(x) = f(x)$.

Donc G et H sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

2 . Propriétés

Propriété1 : Condition d'existence d'une primitive

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

EXERCICE DE FIXATION

Soient f, g, h et u les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par :

$$f(x) = x^3 - 1 \ ; \quad g(x) = \frac{1}{x} \ ; \quad h(x) = \sqrt{x} \ ; \quad u(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Entoure celles qui admettent des primitives sur $\mathbb{R}$.

Solution

On entoure f et u , car ces deux fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$.

Propriété2 : Ensemble des primitives d'une fonction

Soit une fonction f continue, admettant une primitive F sur un intervalle I.

Toute primitive de f sur I est de la forme : $x \mapsto F(x) + c$, où c est un élément de $\mathbb{R}$.

Conséquence : toute fonction continue admet une infinité de primitives.

EXERCICES DE FIXATION

Exercice1

Soient f et F les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et définies par : $f(x) = x^2 - x$ et $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$

Vérifie que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, puis trouve deux autres primitives G et H de f sur $\mathbb{R}$.

Solution

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$. Donc, F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Toutes les primitives de f sont de la forme : $x \mapsto F(x) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$

Deux autres primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions G et H définies respectivement par :

$G(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 29$ et $H(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 546.$

Exercice2

Détermine les primitives sur $]0;+\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Solution

Les primitives sur $]0;+\infty[$ de f sont les fonctions : $x \longmapsto \frac{1}{x} + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

Propriété3 : La primitive d'une fonction vérifiant une condition initiale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un élément de I et y_0 un nombre réel .

Il existe une primitive de f sur I et une seule qui prend la valeur y_0 en x_0 .

EXERCICE DE FIXATION

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - 1$.

On suppose que la fonction G définie par $G(x) = x^2 - x$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$. Détermine la primitive H de g qui prend la valeur 5 en -1

Solution

La primitive cherchée H est de la forme $H(x) = G(x) + c = x^2 - x + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

Cherchons c :

$H(-1) = 5 \Leftrightarrow (-1)^2 - (-1) + c = 5$. D'où : $c = 3$

Donc : $H(x) = x^2 - x + 3$.

II. Détermination d'une primitive

1. Primitives de fonctions usuelles

Fonction f	**Primitives de f** $(c \in \mathbb{R})$	**Sur l'intervalle**
$x \longmapsto a \ (a \in \mathbb{R})$	$x \longmapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^r \quad (r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$	$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x \longmapsto \frac{1}{x^r} \quad (r \in \mathbb{Q} \setminus \{1\})$	$x \longmapsto \frac{-1}{(r-1)x^{r-1}} + c$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \longmapsto 2\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto \cos x$	$x \longmapsto \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin x$	$x \longmapsto -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \longmapsto \tan x + c$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$
$x \longmapsto \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot\text{an}^2 x$	$x \longmapsto -\cot\text{an}\, x + c$	$]k\pi ; \pi + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$

EXERCICE DE FIXATION

Dans chacun des cas suivants, détermine toutes les primitives sur $]0;+\infty[$ de la fonction f

a. $f(x) = x^3$ b. $f(x) = \frac{1}{x^5}$ c. $f(x) = x^{2/3}$

Solution

a. $x \longmapsto \frac{1}{4}x^4 + c \quad (c \in \mathbb{R})$ b. $x \longmapsto -\frac{1}{4x^4} + c \quad (c \in \mathbb{R})$ c. $x \longmapsto -3x^{-\frac{1}{3}} + c \quad (c \in \mathbb{R})$

2. Opérations et compositions

Propriété1

Soient u et v deux fonctions admettant respectivement pour primitives sur un intervalle I les fonctions U et V. k est un nombre réel.

- $U + V$ est une primitive sur I de la fonction $u + v$.
- kU est une primitive sur I de la fonction ku.

<u>EXERCICE DE FIXATION</u>

Dans chacun des cas suivants, détermine toutes les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

a. $f(x) = x + \sin x$ b. $f(x) = \sin x + \cos x$ c. $f(x) = 8x^2 + 5x - 9$

Solution

a. $x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - \cos x + c \quad (c \in \mathbb{R})$
b. $x \longmapsto -\cos x + \sin x + c \quad (c \in \mathbb{R})$
c. $x \longmapsto \frac{8}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 9x + c \quad (c \in \mathbb{R})$

Propriété2

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle contenant $u(I)$.

Une primitive sur I de la fonction $u' \times (v'ou)$ est la fonction $v \circ u$.

On en déduit le tableau suivant :

Fonction f	Une primitive F de f sur I	Conditions
$u'u^r \ (r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}$	$u > 0$ sur I
$\frac{u'}{u^r} \quad (r \in \mathbb{Q} \setminus \{1\})$	$\frac{-1}{(r-1)u^{r-1}}$	$u > 0$ sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$u'\cos u$	$\sin u$	
$x \longmapsto \cos(ax + b)$	$x \longmapsto \frac{1}{a}\sin(ax + b)$	$a \neq 0$
$u'\sin u$	$-\cos u$	
$x \longmapsto \sin(ax + b)$	$x \longmapsto -\frac{1}{a}\cos(ax + b)$	$a \neq 0$

EXERCICES DE FIXATION

Exercice1

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive F sur $]0;+\infty[$ de la fonction f.

a. $f(x) = 3\sin 2x$ b. $f(x) = 2\sqrt{2x+1}$; c. $f(x) = \frac{3}{(3x+5)^2}$

Solution

a. $F(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{2}cos2x\right) = -\frac{3}{2}cos2x$

b. $f(x) = 2(2x+1)^{\frac{1}{2}}$. Donc $F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}(2x+1)^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$.

c. $F(x) = -\frac{1}{(2-1)(3x+5)^{2-1}} = -\frac{1}{3x+5}$.

Exercice2

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive H sur $\mathbb{R}$ de la fonction h.

a. $h(x) = (2x+1)(x^2+x+6)^3$ b. $h(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x+3)^4}$ c. $h(x) = \sin x \cos^5 x$

d. $h(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

Solution

a. $h(x) = u'(x) \times (u(x))^3$; avec $u(x) = x^2+x+6$, donc $H(x) = \frac{1}{4}(x^2+x+6)^4$

b. $h(x) = \frac{u'(x)}{(u(x))^4}$; avec $u(x) = x^2+3x+3$, donc $H(x) = -\frac{1}{3(x^2+3x+3)^3}$

c. $h(x) = -u'(x) \times (u(x))^5$; avec $u(x) = \cos(x)$, donc $H(x) = -\frac{1}{6}\cos^6 x$.

d. $h(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$; avec $u(x) = x^2+x+1$, donc $H(x) = 2\sqrt{x^2+x+1}$.

B. SITUATION COMPLEXE

Le car loué par le lycée pour sa colonie de vacances doit effectuer un trajet de 1500 km.
Lorsque ce car roule à la vitesse moyenne v, exprimée en km/h, la dérivée de sa consommation $C(v)$, exprimée en litres pour 100 km, selon les études d'un expert sur ce type de véhicule, est donnée par la relation : $C'(v) = \frac{-300}{v^2} + \frac{1}{3}$. Une information complémentaire fournie par le chauffeur au moment de la location du car est qu'il consomme 25 litres au 100 pour une vitesse moyenne de 60 km/h.
Le salaire horaire du chauffeur est de 900 F CFA et le litre de gasoil coûte 600 F CFA.
Les organisateurs de la colonie veulent déterminer la vitesse moyenne à laquelle le chauffeur doit rouler pour minimiser le coût total du voyage. Ils te sollicitent pour leur venir en aide.
Propose - leur une solution argumentée basée sur tes connaissances mathématiques.

Solution

- **Pour répondre à la préoccupation des organisateurs du voyage, nous utilisons les primitives.**
- **Nous allons déterminer le cout total du voyage**

Modélisation

- **Détermination de C**

De la relation $C'(v) = \frac{-300}{v^2} + \frac{1}{3}$, on obtient : $C(v) = \frac{300}{v} + \frac{v}{3} + k$. Le car consomme 25 litres au 100 pour une vitesse moyenne de 60 km/h, d'où : C(60) = 25. Or $C(60) = \frac{300}{60} + \frac{60}{3} + k$ = 25 + k, donc k est nul.

La formule donnant la consommation en litres pour 100 km est : $C(v) = \frac{300}{v} + \frac{v}{3}$.

- *Détermination du coût total du voyage.*

Ce coût total P(v) dépend de la vitesse v.

La durée du trajet de 1500 km à la vitesse v, est t = $\frac{1500}{v}$.

Le salaire du chauffeur sera donc $900 \times \frac{1500}{v} = \frac{1350000}{v}$.

La consommation en litres pour 1500 km (1500 = 15 × 100) sera de 15C(v) = 15($\frac{300}{v} + \frac{v}{3}$)

Comme le litre coûte 600FCFA, alors le coût du carburant sera de : 600× 15($\frac{300}{v} + \frac{v}{3}$)=9000($\frac{300}{v} + \frac{v}{3}$).

$P(v) = \frac{4050000}{v} + 3000v.$

- **Calcul de la vitesse qui minimise le coût total du voyage (résolution du modèle)**

Pour minimiser le coût total du trajet, il faut étudier les variations de la fonction P.
Etudier les variations de la fonction P revient à étudier le signe de sa dérivée.
P est dérivable sur l'intervalle]0; +∞ [.

$P'(v) = \frac{-4050000}{v^2} + 3000$

$P'(v) = 0 \Leftrightarrow v = \sqrt{1350} \backsimeq 37,\ car\ v \geq 0$

v	0		$\sqrt{1350}$		$+\infty$
$P'(v)$		-	0	+	
$P(v)$		↘	m	↗	

$m = P(\sqrt{1350}) \backsimeq 220500$

- **conclusion**

Pour minimiser le coût total du voyage, le chauffeur doit rouler à une vitesse moyenne de 37 km/h.
L'organisation de cette colonie leur coûterait alors 220 500 FCFA.

D . EXERCICES

1. Exercices d'application

Exercice1

Réponds par VRAI (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes

N°	AFFIRMATIONS	REPONSES
1.	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction définie par : $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ est la fonction définie par : $F(x) = x^3 - 2x^2 + x - \pi$	
2.	La primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction définie par $p(x) = x - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ qui prend la valeur $-\frac{1}{2}$ en 1 est la fonction définie par $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + 1$	
3.	Une primitive sur un intervalle I de la fonction $u'v + uv'$ est la fonction $u \times v$	

Solution

1. V 2. F 3. V

Exercice2

Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives sur I de la fonction f.

1. $f(x) = \frac{1}{(2x+5)^2}$; $I = \left]-\frac{5}{2};+\infty\right[$
2. $f(x) = (3x+2)(3x^2+4x+7)^3$; $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \frac{4x^3}{\sqrt{x^4+1}}$; $I = \mathbb{R}_+$

solution

1. $\forall x \in \left]-\frac{5}{2};+\infty\right[, f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{(2x+5)^2}$.
   Donc, les primitives sur $\left]-\frac{5}{2};+\infty\right[$ de f sont de la forme : $x \longmapsto -\frac{1}{2(2x+5)} + c$ $(c \in \mathbb{R})$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}(6x+4)(3x^2+4x+7)^3$.
   Donc, les primitives sur $\mathbb{R}$ de f sont de la forme : $x \longmapsto \frac{1}{8}(3x^2+4x+7)^4 + c$ $(c \in \mathbb{R})$.
3. Les primitives sur $\mathbb{R}_+$ de f sont de la forme : $x \longmapsto 2\sqrt{x^4+1} + c$ $(c \in \mathbb{R})$.

Exercice3

On donne les fonctions fet F définies sur $]0;+\infty[$ respectivement, par :

$f(x) = x\left(5\sqrt{x} + 4\right)$ et $F(x) = 2x^2\left(\sqrt{x} + 1\right)$

Démontre que F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

Exercice4

Dans chacun des cas suivants détermine les primitives sur I de la fonction f.

1. $f(x) = \frac{2x^6-3x+8}{2x^4}$, $I =]0;+\infty[$
2. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-9}}$; $I =]3;+\infty[$
3. $f(x) = (x-1)(x^2-2x+5)^3$; $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right)$, $I = \mathbb{R}$

2. Exercices de renforcement

Exercice5

On considère les fonctions f et F définies sur $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$ respectivement par :

$f(x) = x\sqrt{3-2x}$ et $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x}$, où a, b et c sont des nombres réels.

Détermine a, b et c pour que F soit une primitive de f sur $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$.

Réponse

On a : $\forall x \in \left]-\infty;\frac{3}{2}\right[, F'(x) = f(x)$.

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow (2ax+b)\sqrt{3-2x} - \frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{3-2x}} = x\sqrt{3-2x}$$

$$\Leftrightarrow -5ax^2 + (6a-3b)x + 3b - c = -2x^2 + 3x.$$

Par identification : $\begin{cases} -5a = -2 \\ 6a - 3b = 3 \\ 3b - c = 0 \end{cases}$

On obtient : $a = \frac{2}{5}$, $b = -\frac{1}{5}$ et $c = -\frac{3}{5}$.

Exercice6

On donne les fonctions f et h définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$f(x) = \frac{-x^3+2x^2+2}{x^2+1}$ et $h(x) = \frac{x^4+3x^2-4x}{(x^2+1)^2}$

1. Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = -f'(x) - \frac{4x}{(x^2+1)^2}$.
2. Détermine la primitive H de h sur $\mathbb{R}$, qui prend la valeur 2 en 0.

Réponse

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{-x^4-3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^4-3x^2+4x-4x}{(x^2+1)^2} = -\frac{x^4+3x^2-4x}{(x^2+1)^2} - \frac{4x}{(x^2+1)^2} = -h(x) - \frac{4x}{(x^2+1)^2}$.

   Donc : $h(x) = -f'(x) - \frac{4x}{(x^2+1)^2}$.
2. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = -f'(x) - 2 \times \frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

   La primitive cherchée H est de la forme: $H(x) = -f(x) + \frac{2}{x^2+1} + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

   $H(0) = -f(0) + 2 + c = 2$. Alors : $c = f(0) = 2$.

   Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $H(x) = -f(x) + \frac{2}{x^2+1} + 2$.

Exercice7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = x\cos x$.

1. Calcule la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$, par : $g(x) = x\sin x$.
2. Déduis-en une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice8

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

1. $f(x) = \frac{x\sin x+\cos x}{x^2}$ 2. $f(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}$

Exercice9

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive F sur I de la fonction f.

1. $f(x) = \frac{-3x+1}{(3x^2-2x-1)^4}$; $I =]1;+\infty[$
2. $f(x) = \sin 7x \cos^3 7x$; $I = \mathbb{R}$

3. $f(x) = (3-2x)\sin(x^2-3x+1)$; $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{5}\right)$, $I = \mathbb{R}$
5. $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$, $I = \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$.
6. $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$, $I =]1; +\infty[$.

Exercice10

Soit la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, par : $f(x) = \frac{1}{1-\sin x}$.

1. Vérifie que : $\frac{1}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$.
2. Déduis-en les primitives de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice11

Sans linéariser l'expression $\cos^3 x \sin^3 x$, détermine une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f: x \longmapsto \cos^3 x \sin^3 x$.

3. **Exercices d'approfondissement**

Exercice12

1. Linéariser l'expression $\cos^4 x$.
2. Déduis-en les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \longmapsto \cos^4 x$.

Réponse

1. $\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$

   $$\cos^4 x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

   $\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$.
2. Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \longmapsto \cos^4 x$ sont les fonctions :
   $x \longmapsto \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c \quad (c \in \mathbb{R})$.

Exercice13

Soit f la fonction définie sur $]2; +\infty[$, par : $f(x) = \frac{x^3-x^2-8x+8}{(x-2)^2}$.

1. Détermine trois nombres réels a, b et c tels que : $\forall x \in]2; +\infty[$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$.
2. Déduis-en les primitives de f sur $]2; +\infty[$.

Réponse

1. A l'aide d'une division euclidienne , on obtient : $a = 1$, $b = 3$ et $c = -4$.
2. $\forall x \in]2; +\infty[$, $f(x) = x + 3 - \frac{4}{(x-2)^2}$
   Les primitives de f sur $]2; +\infty[$ sont de la forme : $x \longmapsto \frac{1}{3}x^2 + 3x + \frac{4}{x-2} + c \quad (c \in \mathbb{R})$.

Exercice14

On considère la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$, par : $f(x) = \sin^3 x - \frac{2}{(3x-1)^2}$.

Détermine les primitives de f sur $\left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$.

Exercice15

On considère les fonctions h et g définies sur $\mathbb{R}$, par : $h(x) = \cos^2 x$ et $g(x) = \sin^2 x$.

1. Calcule $h(x) + g(x)$.
   Déduis-en la primitive S de $h + g$ sur $\mathbb{R}$, qui s'annule en 0.
2. Détermine $h(x) - g(x)$.
   Déduis-en la primitive D de $h - g$ sur $\mathbb{R}$, qui s'annule en 0.
3. On désigne par H et G des primitives respectives de h et g sur $\mathbb{R}$.
   Déduis des questions précédentes H et G.

Exercice16

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, par : $h(x) = \frac{x}{(2x+1)^3}$.

1. Détermine les nombres réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\},\ h(x) = \frac{a}{(2x+1)^2} + \frac{b}{(2x+1)^3}$.
2. Déduis-en une primitive H de h sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.