SECONDAIRE
Tle D
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

THEME : FONCTIONS NUMERIQUES

Durée : 14 heures **Code :**

Leçon 3: DÉRIVABILITÉ ET ÉTUDE DE FONCTIONS

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

En visite dans une usine de fabrication et de commercialisation de sachets de poudre de cacao des élèves d'une classe de Terminale D reçoivent les informations suivantes :
« La capacité journalière de production de l'usine est comprise entre 1 000 et 5 000 sachets. Toute la production journalière est commercialisée. Une étude a révélé que le bénéfice journalier, exprimé en millions de francs CFA, réalisé pour la production et la vente de x milliers de sachets est modélisé sur l'intervalle [1 ; 5] par la fonction B définie par : $\mathrm{B}(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 9x + 2$ ».
Le Directeur de l'usine veut accroître le bénéfice de l'entreprise. N'ayant pas de personnel qualifié, il demande aux élèves le nombre de sachets à produire en un jour, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal. Dès leur retour en classe, les élèves s'organisent pour répondre à la préoccupation du Directeur.

B. CONTENU DE LA LEÇON

I – DERIVABILITE

1 Dérivabilité à gauche-dérivabilité à droite d'une fonction en un point

a) Propriété et définition

- Une fonction numérique f définie sur un intervalle ouvert K est dérivable à gauche en un nombre réel x_0 de K si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *existe et est finie.*

  Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f à gauche en x_0 et se note $f_g{}'(x_0)$.

La demi-droite passant par le point M$(x_0, f(x_0))$ et de coefficient directeur $f_g{}'(x_0)$est appelée **demi-tangente à gauche** au point M$(x_0, f(x_0))$.

- Une fonction numérique f définie sur un intervalle ouvert K est dérivable à droite en un nombre réel x_0 de K si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *existe et estfinie*

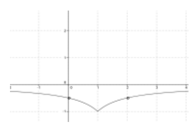
  Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f à droite en x_0 et se note$f_d{}'(x_0)$.
  La demi-droite passant par le point M$(x_0, f(x_0))$ et de coefficient directeur $f_d'(x_0)$ est appelée **demi-tangente à droite** au point M$(x_0, f(x_0))$.

Exercice de fixation

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0; 2\}$

par :$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; 1], f(x) = \frac{1}{x-2} \\ \forall x \in [1; 2[\cup]2; +\infty[, f(x) = \frac{-1}{x} \end{cases}$

et (C) sa courbe représentative donnée ci- contre dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).



1. Etudie la dérivabilité de f à gauche et à droite

en 1

2. interprète graphiquement les résultats.

3. Trace les demi-tangentes à (C) au point d'abscisse 1.

Solution

1. On a :$f(1) = -1$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{\frac{1}{x-2}+1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{x-2} = -1$;

f est donc dérivable à gauche en 1 car $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ est finie et $f_g'(1) = -1$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\frac{-1}{x} + 1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{x} = 1$

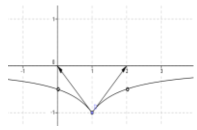
f est donc dérivable à droite en 1 car $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ est finie et $f_d'(1) = 1$.

Interprétation graphique :

(C) admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente à gauche de coefficient directeur -1 et une demi-tangente à droite de coefficient directeur 1.

Rappel : *Connaissant $f'_g(x_0)$, un vecteur directeur de la demi-tangente à gauche au point d'abscisse 1 est $\vec{u}$ (-1 ;- $f'_g(x_0)$).*

Un vecteur directeur de la demi-tangente à gauche en 1 est $\vec{u}$ (-1 ; 1) et un vecteur directeur de la demi-tangente à droite en 1 est $\vec{v}$ (1 ; 1).
On trace alors ces deux demi-tangentes.
Voir figure ci – contre.



b) Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert K et x_0 un nombre réel de K.
f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dériable à gauche et à droite en x_0 et $\mathrm{f}'_{\mathrm{d}}(x_0) = \mathrm{f}'_{\mathrm{g}}(x_0)$.

Exercice de fixation

Soit la fonction f définie sur ℝ par : $\begin{cases} \forall x \in \left]-\infty ; 0\right[, f(x) = x^2 \\ \forall x \in \left[0 ; +\infty\right[, f(x) = x^3 \end{cases}$

Justifie que f est dérivable en 0.

Solution

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$;

f est donc dérivable à gauche en 0 et $\mathrm{f}'_{\mathrm{g}}(0) = 0$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$;

f est donc dérivable à droite en 0 et $\mathrm{f}'_{\mathrm{d}}(0) = 0$.
Comme $\mathrm{f}'_{\mathrm{g}}(0) = \mathrm{f}'_{\mathrm{d}}(0)$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

c) Demi - tangente verticale

Si $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite infinie à gauche ou à droite en x_0, alors la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal admet une **demi-tangente verticale** au point de coordonnées $(x_0 ; f(x_0))$.

Exercice de fixation

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sqrt{x} - x$.
On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Etudie la dérivabilité de f en 0 puis interprète graphiquement le résultat obtenu.

Solution

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{x}-x}{x}$

$$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{x}}{x} - 1 = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 0 car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ est infinie.

Interprétation graphique :(C) admet en son point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

2– Dérivabilité sur un intervalle
a)Définition

- Une fonction numérique f est dérivable sur un intervalle ouvert K si f est dérivable en tout nombre réel de K.
- Une fonction numérique f est dérivable sur un intervalle fermé $[a\,;b]$ si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,;b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.

b) Exemples

- ✓ La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
- ✓ Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3 – Dérivabilité d'une fonction composée

a) Propriété

Soit K un intervalle ouvert ; f et g deux fonctions numériques telles que fog est définie sur K ; $x_0 \in$ K.
Si g est dérivable en x_0 et f dérivable en $g(x_0)$ alors la fonction $f \circ g$ est dérivable en x_0 et :
$(f \circ g)'(x_0) = g'(x_0) \times (f' \circ g)(x_0) = g'(x_0) \times f'[g(x_0)]$.

Exercice de fixation

Soient les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :$f(x) = \frac{3-x}{x-2}$ et $g(x) = x - \frac{1}{x} + 2$.
Démontre que $f \circ g$ est dérivable en 3 et calcule$(f \circ g)'(3)$.

Solution

g est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$, donc g est dérivable en 3.
f est dérivable sur $]-\infty\,;2[$ et sur $]2\,;+\infty[$.
$g(3) = \frac{14}{3}$, comme $g(3) \neq 2$ donc f est dérivable en $g(3)$.
On conclut que $f \circ g$ est dérivable en 3.
Pour tout $x \neq 0$, $g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$. Donc $g'(3) = \frac{10}{9}$.
Pour tout $x \neq 2$, $f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$. Donc $f'(\frac{14}{3}) = -\frac{9}{64}$.
On conclut que : $(f \circ g)'(3) = \frac{10}{9} \times (-\frac{9}{64}) = -\frac{5}{32}$.

b) Conséquences

u est une fonction dérivable sur un intervalle K.

Fonctions	**Dérivées**
u^n $(n \in \mathbb{Q}^*)$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}\, avec\, u > 0$ sur K	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
$\tan(u)\, avec\, cos(u) \neq 0$ Sur K	$u' \times [1 + tan^2(u)]$ ou $\frac{u'}{cos^2(u)}$

Exercices de fixation

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calcule sa dérivée.

a) $f(x)=(x^2 - 3x + 1)^5$; b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 5}$; c) $f(x) = \cos(x^2)$

d) $f(x) = \sin(\sin x)$; e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Solution

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5(2x - 3)(x^2 - 3x + 1)^4$.

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+5}}$.

$c)\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = -2xsin(x^2)$.

$d)\ \forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = cosx \times cos(sinx)$.

e) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$ par : $f(x) = (4x - 1)\sqrt{4x - 1}$.

1. Etudie la dérivabilité de f en $\frac{1}{4}$.

2. On admet que f est dérivable sur $\left]\frac{1}{4}; +\infty\right[$.Calcule $f'(x)$ pour tout x de $\left]\frac{1}{4}; +\infty\right[$

Solution

1. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}} \frac{f(x) - f(\frac{1}{4})}{x - \frac{1}{4}} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{4}} \frac{(4x - 1)\sqrt{4x - 1}}{x - \frac{1}{4}} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{4}} \left(4\sqrt{4x - 1}\right) = 0$

donc f est dérivable en $\frac{1}{4}$ car $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}} \frac{f(x) - f(\frac{1}{4})}{x - \frac{1}{4}}$ est finie; $f'\left(\frac{1}{4}\right) = 0$.

2.f est dérivable sur $\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$et $\forall\ x \in \left]\frac{1}{4};+\infty\right[$, $f'(x) = 6\sqrt{4\mathrm{x}-1}$.

4 – Dérivabilité d'une bijection réciproque

a) Propriété

Soit K un intervalle, f une fonction numérique dérivable et strictement monotone sur K ,
$x_0 \in$ K et $\mathrm{y}_0 = f(x_0)$.
Si $f'(x_0) \neq 0$ alors la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable en y_0 et
$(f^{-1})'(\mathrm{y}_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\mathrm{y}_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Point méthode

Pour calculer le nombre dérivé de f^{-1} en y_0, on peut procéder comme suit :

- On détermine $x_0 \in K$, tel que $f(x_0) = y_0$;
- On calcule $f'(x_0)$ et on vérifie que $f'(x_0) \neq 0$;
- On conclut alors que f^{-1} est dérivable en y_0 ;
- On calcule enfin $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Exercice de fixation

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^2 - x$.
1. Démontre que f réalise une bijection de $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ sur $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right[$.
2. Soit g la restriction de fà $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$.
Démontre que g^{-1}est dérivable en 2 et calcule $(g^{-1})'(2)$.

Solution

1.f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x élément de $\mathbb{R}$,$f'(x) = 2x - 1$.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ et $\forall\ x \in]-\infty;\frac{1}{2}[$, $f'(x) < 0$.

On a *:* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.
Ainsi,f est continue et strictement décroissante sur$\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$donc$f$réalise une bijection de$\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$sur
$f\left(\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]\right) = \left[-\frac{1}{4};+\infty\right[$.
2. La résolution de l'équation $x \in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$, $g(x) = 2$ donne *:* $x = -1$.
On a: $g(-1) = 2$; $g'(-1) = -3$ *;* comme $g'(-1) \neq 0$,donc la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable *en 2 et on a :* $(g^{-1})'(2) = \frac{1}{g'(-1)} = -\frac{1}{3}$.

5 – Dérivées successives

Définition

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle K.

- Si *f* est dérivable sur K, alors sa fonction dérivée est la dérivée première de *f.*
  On la note :$f'\ ou\ \frac{df}{dx}$.

- Si f' est dérivable sur K, alors sa fonction dérivée est la dérivée seconde de f.
  On la note : f'' *ou* $\frac{d^2 f}{dx^2}$ ou $f^{(2)}$.
- De proche en proche, Si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur K, alors sa fonction dérivée est la dérivée n[ième] de f ou la dérivée d'ordre n de f.
  On la note : $f^{(n)}$ *ou* $\frac{d^n f}{dx^n}$.

EXERCICE DE FIXATION

Détermine les 4 premières dérivées successives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$.

SOLUTION

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 4x$;

$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 6x - 4$;

$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(3)}(x) = 6$;

$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(4)}(x) = 0$.

6 – Inégalités des accroissements finis

Propriété 1

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f une fonction numérique dérivable sur $[a\,;b]$.

S'il existe deux nombres réels m et M tels que : $\forall x \in [a;b],\ m \leq f'(x) \leq M$,

alors : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

Exercice de fixation

Justifie que : $\frac{1}{\sqrt{19}} \leq \sqrt{19} - \sqrt{17} \leq \frac{1}{\sqrt{17}}$

Solution

On pose $f(x) = \sqrt{x}$.

f est dérivable sur $[\sqrt{17};\sqrt{19}]$ et $\forall x \in [\sqrt{17};\sqrt{19}],\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$\forall x \in [\sqrt{17};\sqrt{19}],\ \sqrt{17} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{19}$, donc $\frac{1}{2\sqrt{19}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{17}}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$\frac{1}{2\sqrt{19}}(19-17) \leq f(19) - f(17)) \leq \frac{1}{2\sqrt{17}}(19-17)$; Donc $\frac{1}{\sqrt{19}} \leq \sqrt{19} - \sqrt{17} \leq \frac{1}{\sqrt{17}}$.

Propriété 2

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle I.

S'il existe un nombre réel M tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq M$, alors pour tous nombres réels a *et* b de I, on a : $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$.

Exercice de fixation

Démontre que, pour tous nombres réels x et y, on a : $|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|$.

Solution

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \cos(t)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = -\sin(t)$.

On a :$|f'(t)| \leq 1$ pour tout nombre réel t.
Donc d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous nombres réels *x* et y,
on a :$|f(x) - f(y)| \leq 1.|x - y|$.
Comme $f(x) = \cos(x)$ et $f(y) = \cos(y)$, donc pour tous nombres réels *x* et y,
on a : $|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|$

II – ETUDE DE FONCTIONS

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :$\begin{cases} f(x) = x^2 + x \text{ si } x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x} - x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1. Etudie la continuité de f en 0.
2. Etudie la dérivabilité de f en 0 puis interprète graphiquement les résultats obtenus.
3. a) Calcule les limites de *f* en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Justifie que la courbe (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.
4. On admet que *f* est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0\,;\ +\infty[$.
   Etudie les variations de *f* et dresse son tableau de variation.
5. Trace (C) et les demi-tangentes obtenues dans la question b).

Solution

1. $f(0) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x^2 + x) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x} - x\right) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

$$2. \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2 + x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}(x + 1) = 1$$

$$f \text{ est donc dérivable à gauche en } 0 \text{ car } \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ est finie et } f'_g(0) = 1.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x} - x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x}}{x} - 1\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) = +\infty$$

$$f \text{ n'est pas dérivable à droite en } 0 \text{ car } \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \text{ est infinie}$$

Conclusion *: f n'est pas dérivable en 0.*
Interprétation graphique *: (C) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente à gauche de coefficient directeur 1 et à droite une demi-tangente verticale.*
3*.a)* ***Limites de f en $-\infty$ et $+\infty$***

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}(x^2 + x) = \lim\limits_{x\to -\infty}(x^2) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})\right) = -\infty \; car \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x}) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1-\sqrt{x}) = -\infty \end{cases}$$

b) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}(1+x) = -\infty.$

Donc (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).

4. *f est dérivable sur* $]-\infty;0[$ *et sur* $]0\,;\,+\infty[$

$$\begin{cases} \forall x \in\,]-\infty;0[, f'(x) = 2x+1 \\ \forall x \in\,]0\,;\,+\infty[, f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = \dfrac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \end{cases}$$

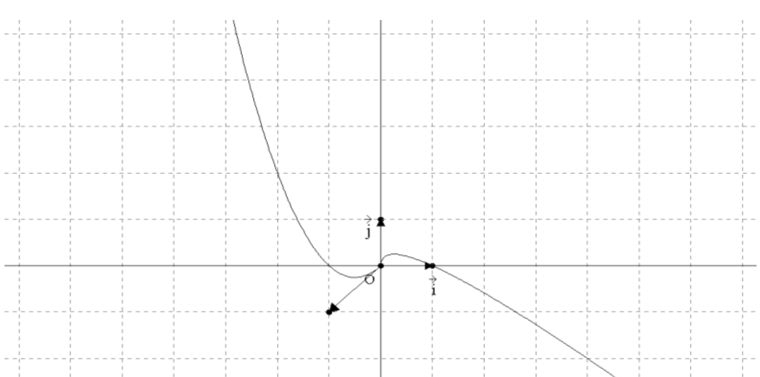
- $x \in\,]-\infty;0[,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$
  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{2}\,;0\right[$ *et* $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$. *Ainsi, f est strictement croissante sur* $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ *et f est strictement décroissante sur* $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$.

- *Pour tout* $x \in\,]0\,;\,+\infty[$, $2\sqrt{x} > 0$ *donc* $f'(x)$ *a le signe de* $1-2\sqrt{x}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-2\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{4}$.
  Ainsi, f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ *et f est strictement décroissante sur* $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$ 0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$



Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) (l'unité graphique est 2 cm).
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)$ =$x + \sqrt{|x^2 - 1|}$.
On note (C) la courbe représentative de$h$.

1.Justifie que :$\begin{cases} \forall\, x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\,, h(x) = x + \sqrt{x^2 - 1} \\ \forall\, x \in [-1; 1]\,, h(x) = x + \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$

2Démontre que (C) admet aux points d'abscisses-1 et 1 des demi-tangentes verticales.
3. Démontre que la droite (OI) est une asymptote à (C) en $-\infty$.
4.a) Calcule la limite de h en $+\infty$.
b) Démontre que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
c) Justifie que (C) est au-dessous de (D)sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$.
5.a) On admet que $h$est dérivable sur les intervalles $]-\infty; -1[$et$]1; +\infty[$; et pour $|x| > 1$, $|x| > \sqrt{x^2 - 1}$.
Etudie les variations de $h$sur les intervalles $]-\infty; -1[$et$]1; +\infty[$.
b) On admet que h est dérivable sur l'intervalle$]-1; 1[$.
Justifie que h est croissante sur l'intervalle $\left[-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.
c) Dresse le tableau de variation de la fonction h sur $\mathbb{R}$
6. Trace(D) et (C).
7. Soit $k$la restriction de h à$]-\infty\,;\, -1]$.
a) Justifie que k réalise une bijection de $]-\infty\,;\, -1]$ sur [-1 ; 0[.
b) Calcule $k\,(-\sqrt{2}\,)$.
c) Soit k^{-1} la bijection réciproque de k.
Démontre que k^{-1} est dérivable en $1 - \sqrt{2}$ et calcule$(k^{-1})'(1 - \sqrt{2})$.

Solution

1.

x	$-\infty$ $\quad$ -1		1 $\quad$ $+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	0 $-$	0 $+$
$\lvert x^2 - 1 \rvert$	$x^2 - 1$	$1 - x^2$	$x^2 - 1$
$h(x)$	$x + \sqrt{x^2 - 1}$	$x + \sqrt{1 - x^2}$	$x + \sqrt{x^2 - 1}$

Donc :$\begin{cases} \forall\, x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\,, h(x) = x + \sqrt{x^2 - 1} \\ \forall\, x \in [-1; 1]\,, h(x) = x + \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$

2.Dérivabilité de h à gauche en – 1 :

$$\lim_{\substack{x\to-1\\<}} \frac{h(x)-h(-1)}{x+1} = \lim_{\substack{x\to-1\\<}} \frac{x+\sqrt{x^2-1}+1}{x+1} = \lim_{\substack{x\to-1\\<}} \left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}\right)$$

On a : $\lim_{\substack{x\to-1\\<}} (x-1) = -2$ *et* $\lim_{\substack{x\to-1\\<}} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$*,donc* $\lim_{\substack{x\to-1\\<}} 1+\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = -\infty$.

D'où : $\lim_{\substack{x\to-1\\<}} \frac{h(x)-h(-1)}{x+1} = -\infty$ *donc hn'est pas dérivable à gauche en* -1 .

Par conséquent, (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse -1.

Dérivabilité de h à droite en 1

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1\\>}} \frac{x+\sqrt{x^2-1}-1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1\\>}} \left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x\to1\\>}} 1+\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

car $\lim_{\substack{x\to1\\>}} (x+1) = 2$ *et* $\lim_{\substack{x\to1\\>}} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$

$\lim_{\substack{x\to1\\>}} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = +\infty$ *donc hn'est pas dérivable à droite en* 1

Par conséquent, (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1.

3.

$\forall\, x < -1, h(x) = \frac{[x+\sqrt{x^2-1}][x-\sqrt{x^2-1}]}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$

On a : $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty$ *car* $\lim_{x\to-\infty} (x^2-1) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Comme $\lim_{x\to-\infty} (-\sqrt{x^2-1}) = -\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ *donc* $\lim_{x\to-\infty} \left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = -\infty$

Par suite $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = 0$; *Ainsi,* $\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$

D'où la droite (OI) est asymptote à (C) en $-\infty$.

4.a)

Ona : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty$ *car* $\lim_{x\to+\infty} (x^2-1) = +\infty$ *et* $\lim_{y\to+\infty} \sqrt{y} = +\infty$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ *alors* $\lim_{x\to+\infty} \left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = +\infty$

Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

b) Calculons $\lim_{x\to+\infty} [h(x)-2x]$

$\forall$ *x>1,* $h(x)-2x = \sqrt{x^2-1}-x = \frac{[\sqrt{x^2-1}-x][\sqrt{x^2-1}+x]}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

On a : $\lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2-1} = +\infty$ *d'où* $\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x+\sqrt{x^2-1}} = 0$.

Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} [h(x)-2x] = 0$.

D'où la droite (D) d'équation y = $2x$ *est asymptote à (C) en* $+\infty$.

c) *Etudions le signe de* $h(x)-2x$.

● *Pour toutx* $\in \left]\frac{\sqrt{2}}{2};1\right[$*,on a :* $h(x)-2x = \sqrt{1-x^2}-x$.

$$h(x) - 2x \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} \le x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 \ge 0 \\ x \ge 0 \\ 1 - x^2 \le x^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x \ge 0 \\ 1 - 2x^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x \ge 0 \\ x \in \left]-\infty ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty\right[\end{cases}$ donc, $h(x) - 2x \le 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; 1\right]$

● *Pour tout* $x \in [1 ; +\infty[$, *on a :*

$h(x) - 2x = \sqrt{x^2 - 1} - x = \frac{[\sqrt{x^2-1}-x][\sqrt{x^2-1}+x]}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

Pour tout $x \in [1 ; +\infty[$, $\sqrt{x^2-1} \ge 0$ *et* $x > 0$ *donc* $\forall x \in [1 ; +\infty[, \sqrt{x^2-1} + x > 0$.

Par suite, pour tout $x \in [1 ; +\infty[$, $h(x) - 2x < 0$.

Ainsi **:** $\forall x \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2} ; 1\right[$, *et* $\forall x \in [1 ; +\infty[$, $h(x) - 2x < 0$.

On en déduit que (C) est au-dessous de (D) sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty\right[$.

5. a) $\forall x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$, $h'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$\forall x \in]1 ; +\infty[, h'(x) > 0$ *donc h est strictement croissante sur* $]1 ; +\infty[$.

$\forall x \in]-\infty ; -1[$, $h'(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$. $\forall x \in]-\infty ; -1[, \sqrt{x^2-1} > 0$ *donc le signe de* $h'(x)$

est celui de $\sqrt{x^2-1} + x$. *Or* $|x| > \sqrt{x^2-1}$, *donc pour* $x \in]-\infty ; -1[$, $-x > \sqrt{x^2-1}$,

d'où pour $x \in]-\infty ; -1[, \sqrt{x^2-1} + x < 0$.

Donc $\forall x \in]-\infty; -1[, h'(x) < 0$ *et par suite h est strictement décroissante sur* $]-\infty ; -1[$.

On conclut donc que h est strictement décroissante sur $]-\infty ; -1[$ *et strictement croissante sur* $]1 ; +\infty[$.

b) $\forall x \in]-1 ; 1[$, $h'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

donc $\forall x \in]-1; 0], h'(x) > 0$.

$\forall x \in]0 ; 1[, h'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\forall x \in]0 ; 1[, \sqrt{1-x^2} > 0$ *donc le signe de* $h'(x)$*est celui de* $\sqrt{1-x^2} - x$.

h'(x)$\le 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} - x \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} \le x \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; 1\right]$. (D'après la question 4.c))

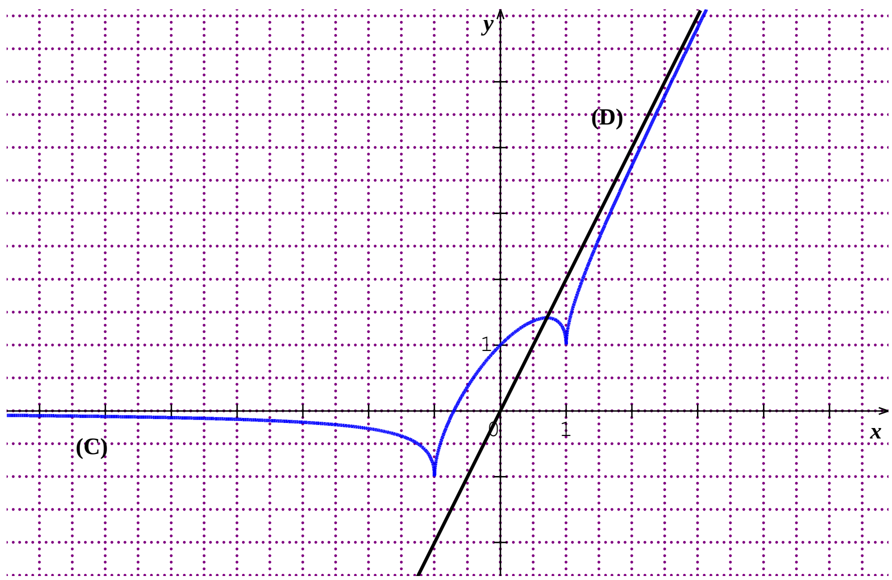
d'où $\forall x \in \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$; $h'(x) \ge 0$.

Donc h est décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; 1\right]$ et croissante sur $\left[-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

c)Tableau des variations de h

x	$-\infty$		-1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$h(x)$	0	↘	-1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1	↗	$+\infty$

*6.*Représentation graphique



7.a) h est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,-1]$. k étant la restriction de h à $]-\infty\,;\,-1]$ donc k est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,-1]$.
D'où k réalise une bijection de $]-\infty\,;\,-1]$ sur $k(]-\infty\,;\,-1]) = [-1;0[$.
b) $k(-\sqrt{2}\,) = 1-\sqrt{2}$.
c) $k(-\sqrt{2}\,) = 1-\sqrt{2}$ et k'$(-\sqrt{2}\,) = 1-\sqrt{2}$. Comme $k'(-\sqrt{2}\,) \neq 0$ donc k^{-1} est dérivable en $1-\sqrt{2}$ et on a :$(k^{-1})'\left(1-\sqrt{2}\right) = \frac{1}{1-\sqrt{2}} = -1-\sqrt{2}$.

Exercice 3
Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).
Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)$ =tan$\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.
On note (C) la courbe représentative de$f$.

1. Détermine, D_f, l'ensemble de définition de la fonction f.
2. a) Justifie que f est périodique de période 2.
   b) Justifie que f est impaire.
   c) Démontre que la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à (C).

3. a) Démontre que, $\forall\, x \in D_f, f'(x) = \frac{\pi}{2}(1 + tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right))$.
   b) Dresse le tableau de variation de f sur $[0; 1[$.
4. Trace (C) sur $[0; 1[$ puis sur $]-3; 3[$.

Solution

1. Détermine D_f

$x \in D_f \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2}x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$

Donc$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1 + 2k\}, k \in \mathbb{Z}$

2. a) Justifions que f est périodique de période 2.
   Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1 + 2k\}, k \in \mathbb{Z}$ on a : $x \neq 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$
   Donc $x + 2 \neq 3 + 2k, k \in \mathbb{Z};\ x + 2 \neq 1 + 2k', k' \in \mathbb{Z};$
   D'où pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1 + 2k\}, k \in \mathbb{Z}$, $x + 2 \in \mathbb{R} \setminus \{1 + 2k\}, k \in \mathbb{Z}$
   $f(x + 2) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}(x + 2)\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}x + \pi\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$
   $f(x + 2) = f(x)$, donc f est périodique de période 2.

   b) Justifions que f est impaire.
   Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1 + 2k\}, k \in \mathbb{Z}$ on a : $x \neq 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$
   Donc $-x \neq -1 - 2k, k \in \mathbb{Z};\ -x \neq 1 - 1 - 1 - 2k, k \in \mathbb{Z}$
   D'où $-x \neq 1 + 2(-1 - k), k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire $-x \neq 1 + 2k', k' \in \mathbb{Z}$
   D'où pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1 + 2k\}, k \in \mathbb{Z}$, $-x \in \mathbb{R} \setminus \{1 + 2k\}, k \in \mathbb{Z}$
   $f(-x) = \tan\left(-\dfrac{\pi}{2}x\right) = -\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$
   $f(-x) = -f(x)$, donc $f$est impaire.

   c) Démontrons que la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à (C).

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \tan(X) = +\infty$$

   et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ >}} \tan(X) = -\infty$
   Donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à (C).

3. a) Démontrons que, $\forall\, x \in D_f, f'(x) = \frac{\pi}{2}(1 + tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right))$.

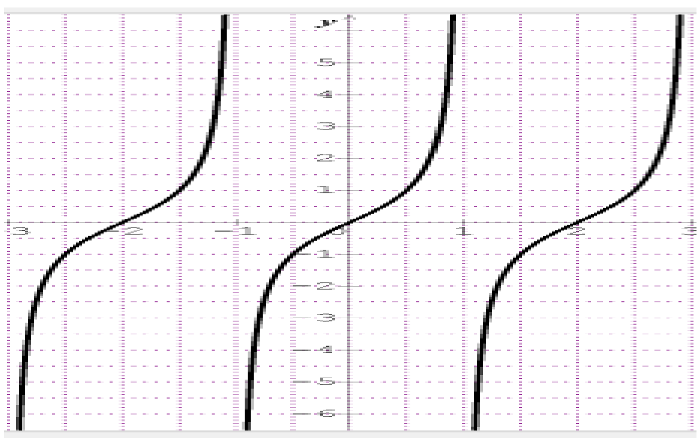
$\forall\, x \in D_f, f'(x) = \left(\frac{\pi}{2}x\right)'\left(1 + tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) = \frac{\pi}{2}(1 + tan^2\left(\frac{\pi}{2}x\right))$.

   b) Dressons le tableau de variation de f sur $[0; 1[$.

   $\forall\, x \in D_f, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0; 1[$.

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. Traçons (C) sur $[0; 1[$ puis sur $]-3; 3[$.



C. SITUATIONS COMPLEXES

Situation 1

En visite dans une usine de fabrication et de commercialisation de sachets de poudre de cacao des élèves d'une classe de Terminale scientifique reçoivent les informations suivantes :

« La capacité journalière de production de l'usine est comprise entre 1 000 et 5 000 sachets. Toute la production journalière est commercialisée. Une étude a révélé que le bénéfice journalier, exprimé en millions de francs CFA, réalisé pour la production et la vente de x milliers de sachets est modélisé sur l'intervalle [1 ; 5] par la fonction B définie par : $\mathrm{B}(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 9x + 2$ ».

Le Directeur de l'usine veut accroître le bénéfice de l'entreprise. N'ayant pas de personnel qualifié, il te demande le nombre de sachets à produire en un jour, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal.

En argumentant, détermine le nombre de sachets de poudre de cacao à produire pour obtenir un bénéfice maximal.

Solution

Pour répondre à la préoccupation du Directeur de l'usine,

- J'étudie les variations de la fonction B modélisant le bénéfice journalier de l'usine.
- Je détermine la dérivée de B
- J'étudie le signe de la dérivée de B
- Je détermine le zéro de la dérivée de B sur l'intervalle
- Je donne le nombre de sachets de poudre de cacao à produire pour obtenir le bénéfice journalier maximal de l'usine.

Le bénéfice journalier, exprimé en millions de francs CFA, réalisé pour la production et la vente de x milliers de sachets est modélisé sur l'intervalle [1 ; 5] par la fonction B définie par :

$\mathrm{B}(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 9x + 2$. Etudions les variations de B.

- Dérivée de B :
  $\mathrm{B}'(x) = -x^2 + 9 = -(x-3)(x+3)$

- Signe de la dérivée de B

x	1		3		5
$B'(x)$		$-$	0	$+$	

Pour $x \in [1;5], x+3 > 0$ donc $\mathrm{B}'(x)$ a le même signe que $-(x-3)$. Or

$$-(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow x - 3 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow x \leq 3$$

Donc pour $x \in [1;3]$, $\mathrm{B}'(x) \geq 0$ et

pour $x \in [3;5]$, $\mathrm{B}'(x) \leq 0$

- Les variations de la fonction B.
  B est croissante sur l'intervalle $[1;3]$ et décroissante sur l'intervalle$[3;5]$.
- B atteint son maximum en 3. Ce maximum est B(3) = 20.

Le nombre de sachets de poudre de cacao à produire pour obtenir le bénéfice journalier maximal de l'usine est 3000.

Le bénéfice journalier dans ce cas est d'environ 20 millions.

D. EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

f est la fonction continue sur $\mathbb{R}$ et définie par : $\begin{cases} f(x) = 1 - x^2 \text{si } \; x \in]-\infty; -1[\\ f(x) = \frac{2x+2}{x+2} \text{si } \; x \in [-1; +\infty[\end{cases}$

Etudie la dérivabilité de f en -1.

Solution

Dérivabilité de f à gauche en -1 :
$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \left(\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}\right) = \lim\limits_{x \to -1} \left(\frac{1-x^2-0}{x+1}\right) = \lim\limits_{x \to -1} (1-x) = 2$ donc f est dérivable à gauche en -1 et $f'_g(-1) = 2$.
Dérivabilité de f à droite en -1 :
$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left(\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}\right) = \lim\limits_{x \to -1} \left(\frac{\frac{2x+2}{x+2}-0}{x+1}\right) = \lim\limits_{x \to -1} \left(\frac{2}{x+2}\right) = 2$ donc f est dérivable à droite en -1 et $f'_d(-1) = 2$.
On a $f'_g(-1) = f'_d(-1)$ par suite f est dérivable en -1.

Exercice 2

k est une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$ telle que $\forall x \in [a; b]$, $|k'(x)| < 0{,}2$.
Justifie que $k(b) \in]k(a) - 0{,}2(b-a); k(a) + 0{,}2(b-a)[$.

SOLUTION

k est une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$ telle que $\forall x \in [a; b]$, $|k'(x)| < 0{,}2$.
D'après l'inégalité des accroissements finis $|k(b) - k(a)| < 0{,}2(b-a)$.
Par suite : $-0{,}2(b-a) < k(b) - k(a) < 0{,}2(b-a)$
$k(a) - 0{,}2(b-a) < k(b) < k(a) + 0{,}2(b-a)$
Donc $k(b) \in]k(a) - 0{,}2(b-a); k(a) + 0{,}2(b-a)[$.

Exercice 3

Soit n un entier naturel.
Démontre par récurrence que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Solution

Pour $n = 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $cos^{(0)}(x) = \cos(x) = \cos\left(x + 0 \times \frac{\pi}{2}\right)$.
Supposons l'égalité à un rang k; $k \in \mathbb{N}$.
Au rang $k+1$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; cos^{(k+1)}(x) = \left(cos^{(k)}\right)'(x) = cos'\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right).$$
$$= \cos\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 4

Soit la bijection dérivable f : $\begin{array}{l} \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan(x) \end{array}$

et φ sa bijection réciproque.

1. Démontre que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
2. Démontre que $\forall x \in \ ]0; +\infty[$, $\varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
3. Détermine $\varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \in \ ]-\infty; 0[$.

Solution

1. f est une bijection dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, f'(x) = 1 + tan^2(x)$.
$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, f'(x) > 0$ donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \frac{1}{f'(\varphi(x))}$.
Or $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\frac{\pi}{2}\right[, f'(x) = 1 + f^2(x)$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'\left(\varphi(x)\right) = 1 + f^2(\varphi(x)) = 1+x^2$.
D'où $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
2. Posons :
$\forall x \in \ ]0; +\infty[, u(x) = \varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$

Dérivons la fonction u
$\forall x \in \ ]0; +\infty[, u'(x) = \varphi'(x) - \frac{1}{x^2}\ \varphi'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$
$\forall x \in \ ]0; +\infty[, u'(x) = 0$ donc la fonction u est constante sur $]0; +\infty[$.
Par suite $\forall x \in \ ]0; +\infty[, u(x) = u(1) = \varphi(1) + \varphi\left(\frac{1}{1}\right) = 2 \times \varphi(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
3. f étant impaire, φ est impaire.
$x \in \ ]-\infty; 0[\iff -x \in \ ]0; +\infty[$.
$\varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = -\varphi(-x) - \varphi\left(-\frac{1}{x}\right) = -\left(\varphi(-x) + \varphi\left(-\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{\pi}{2}$.
Donc $\varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$. pour $x \in \ ]-\infty; 0[$.

Exercice 5

f est la fonction de IR vers IR définie par : $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 4 cm.
1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Etudie la dérivabilité de f en 1 puis interprète graphiquement le résultat.
3. Calcule la limite de f en -1 puis interprète graphiquement le résultat.
4. Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

5. Trace la courbe (C).
6. Démontre que f réalise une bijection de $]-1\,;1]$ sur $[0;+\infty[$.
7. Justifie que la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable en 1 et calcule $(f^{-1})'(1)$.
8. Trace la courbe représentative (C') de f^{-1} sur le même graphique que (C).

Solution

1. $D_f = \{ x \in IR /\ \ 1 + x \neq 0 \ et\ \frac{1-x}{1+x} \geq 0 \ \}$.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$1+x$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{1-x}{1+x}$	$-$		$+$	0	$-$

Donc: $D_f =]-1;1]$.

2. Dérivabilité de f en 1.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{(x-1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{-1}{(x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = -\infty$$

$$car\ \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} (x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = 0\ \ et\ (x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \geq\ 0\ \ pour\ x \in\,]-1\,;1]$$

$$Ainsi\ f\ n'est\ pas\ dérivable\ \ en\ 1\ car\ \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}\ \ n'est\ \ pas\ finie.$$

Interprétation graphique

(C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1.

3. Limite en -1

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{1}{1+x} = +\infty\ et\ \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} (1-x) = 2\ \ donc\ \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{1-x}{1+x} = +\infty.$$

$$Par\ ailleurs\ \ \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty\,,donc\ :\ \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = +\infty$$

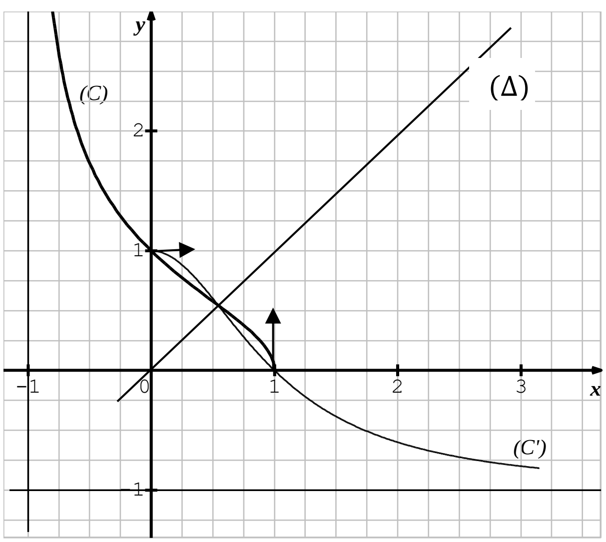
$$D'où\ \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) = +\infty. La\ droite\ (D)\ d'équation\ x\ =\ -1\ est\ asymptote\ à\ (C).$$

4. f *est dérivable sur* $]-1;1[$. *Pour tout* $x \in\,]-1;1[$, $f'(x) = \frac{\frac{-(x+1)-(1-x)}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \frac{-1}{(1+x)^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$

$\forall x \in]-1;1[, -1 < 0$ *et* $(x+1)^2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} > 0$. *Donc* $\forall x \in]-1;1[$, $f'(x) < 0$. f *est donc strictement décroissante sur* $]-1;1[$,

x	-1		1
$f'(x)$		-	
$f(x)$		$+\infty$ ↘	0

5. Courbe représentative de f.



6.f est continue et strictement décroissante sur $]-1;1]$ donc f réalise une bijection de $]-1;1]$ sur $f(]-1;1]) = [0;+\infty[$.

7. On a : $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$; comme $f'(0) \neq 0$ donc la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable en 1 et on a : $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = -1$.

***8.** Les courbes représentatives (C') et (C) sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$ (voir figure).*

IV. EXERCICES

I – EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1
f est une fonction dérivable sur l'intervalle I. Dans chacun des cas suivants, calcule $f'(x)$ pour tout x de I.

a) $f(x) = -3x^3 + 4x^2 - 7x + 2$, I=IR;
b) $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + 1$, I = IR;
c) $(x) = 3x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{7}{x^3}$,$I =]0; +\infty[$;
d) $f(x) = 2x^2\sqrt{x}$,$I =]0; +\infty[$;
e) $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$,$I =]-\infty; -1[$;
f) $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^5$, I= IR ;
g) $f(x) = \sqrt{4x-1}$, $I = \left]\frac{1}{4}; +\infty\right[$;
h) $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$,$I =]1; +\infty[$;
i) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$, I=IR;
j) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3x+1}}$,$I = \left]\frac{-1}{3}; +\infty\right[$;
k) $f(x) = x\cos 2x$, I= IR;
l) $f(x) = \frac{2}{(1-2x)^2}$, $I = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$;
m) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, I=IR;
n) $f(x) = x^3(1-x)^2$, I=IR;
o) $f(x) = \sin x\cos^3 x$, I=IR;
p) $f(x) = \frac{x}{2} + 1 - \frac{2}{(x-1)^2}$,$I =]-\infty; 1[$.

Exercice 2
f est la fonction définie sur $]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$
Etudie la dérivabilité de f en -2 et en 1.

Exercice 3
Démontre que :

1. $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[$, $\tan x \geq x$.
2. $\forall x \in]0; +\infty[$, on a $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercice 4
Soit la fonction $f : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1;1]$
$x \longmapsto \sin x$

1. Démontre que f admet une bijection réciproque φ.
2. Démontre que : $\forall x \in]-1; 1[, \varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

II – EXERCICES DE RENFORCEMENT /APPROFONDISSEMENT

Dans les exercices qui suivent, on note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Exercice 5
f est la fonction définie sur IR par : f(x) = x|x-3|+2.

1. Etudie la continuité de f en 3.
2. Etudie la dérivabilité de f en 3. Interprète graphiquement le résultat.
3. Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
4. Trace (C).

Exercice 6
f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$par :$f(x) = x^2 - 2\sqrt{x}$.

1. Etudie la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.

2. Calcule les limites de $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$ puis interprète graphiquement les résultats.
3. Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
4. Trace (C).

Exercice 7

f est la fonction de IR vers IR définie par: $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$

1. Précise l'ensemble de définition de f
2. Etudie la continuité de f en 0.
3. Démontre que (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente dont on précisera une équation.
4. Etudie la parité de f et en donner une conséquence graphique.
5. Calcule la limite de f en $+\infty$. Interpréte graphiquement le résultat.
6. Etudie les variations de f sur $[0\,;\ +\infty[$ et dresse le tableau de variation de f.
7. Trace la courbe (C).

Exercice 8

f est la fonction définie sur IR-{-1} par : $f(x) = \frac{x^2+|x-2|}{x+1}$

1. Etudie la continuité de f en 2.
2. Etudie la dérivabilité de f en 2. Interprète graphiquement les résultats.
3. Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
5.
   a) Démontre que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = x - 2$ et $y = x$ sont asymptotes à (C) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) Etudie la position de (C) par rapport à (D_1) sur $]-\infty;-1[\cup]-1;2]$.
   c) Etudie la position de (C) par rapport à (D_2) sur $[2;+\infty[$.
6. Trace (D_1), (D_2) et (C).

Exercice 9

f est la fonction de IR vers IR définie par : $f(x) = \sqrt{x^2+3x+2}$.

Partie A

1. Justifie que l'ensemble de définition de f est $]-\infty;-2]\mathrm{U}[-1;+\infty[$.
2. Etudie la dérivabilité de f en -1 et en -2 puis interpréte graphiquement les résultats.
3. Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
5. Démontre que les droites (D_1) : $y = -x - \frac{3}{2}$ et (D_2) : $y = x + \frac{3}{2}$ sont asymptotes à (C) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.
6. Démontre que la droite (Δ) d'équation $x = -\frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de (C).
7. Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
8. Trace (D_1), (D_2), (T) et (C).

Partie B

Soit g la restriction de f à [-1 ; +∞ [.

1. Démontre que g est une bijection de [-1 ; +∞ [sur [0 ; +∞ [.
2. Justifie que la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable en $\sqrt{2}$ etcalcule $(g^{-1})'(\sqrt{2})$.

Exercice 10

f est la fonction sur définie sur IR par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1. Démontre que f est une bijection de IR sur un intervalle K que l'on précisera.
2. Justifie que la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable en 1 et calculer $(f^{-1})'(1)$.
3.
   a) Trace (C).
   b) Trace (C') la courbe représentative de f^{-1}.

Exercice 11

f est la fonction définie sur [0 ; 1] par : $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ +1.
On prendra pour unité graphique10 cm.
Etudier la dérivabilité de f en 0.

1. Interprète graphiquement le résultat.
2. Démontre que f est une bijection de [0 ;1] sur [0 ; 1]
3. Démontre que pour tout $x \in$ [0 ; 1],$f \circ f(x) = x$.
4. Déduis en la bijection réciproque de f.
5. Construis (C).

Exercice 12

f est la fonction de IR vers IR définie par : $f(x) = (2 - x)\sqrt{4 - x^2}$.
L'unité graphique est 2cm.

1. Etudie la dérivabilité de f en -2 et en 2 puis interprète graphiquement les résultats.
2. Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
3. Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
4. Trace (T) et (C).

Exercice 13

f est la fonction de IR vers IR définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

1. Calcule la limite de f en +∞.
   Interprète graphiquement le résultat.
2. Calcule la limite de f en $-\infty$.
3.
   a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C) en$-\infty$.
   b) Etudie la position de (C) par rapport à (D).
4. Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
5. Trace (D) et (C).

Exercice 14

f est la fonction définie sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ par :

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$$

Partie A

g est la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $g(x) = 2 - x^2\sqrt{x^2 - 1}$

1. Calcule la limite de g en +∞ .
2. Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3.
   a) Démontre que l'équation $x \in]1; +\infty[, g(x) = 0$ admet une solution unique α et que 1$< \alpha < 2$.

b) Donne une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

4. Justifie que : $\begin{cases} \forall x \in]1\,;\alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha\,;+\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$

Partie B

1. Etudie la parité de f.
2.
   a) Calcule la limite de f en $+\infty$.
   b) Démontre que la droite (D) d'équation $y = -\frac{x}{2}+1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
   c) Etudie la position de (C) par rapport à (D) sur $]1;+\infty[$.
3. Etudie la dérivabilité de f en 1 puis interprète graphiquement le résultat.
4.
   a) Démontre que : $\forall\, x \in]1\,;+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2\sqrt{x^2-1}}$
   b) Dresse le tableau de variation de f.
5. Démontre que : $f(\alpha) = -\frac{\alpha}{2} + \frac{2}{\alpha^3}$.