CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

THÈME : ARITHMÉTIQUE

LEÇON 11 : PPCM ET PGCD DE DEUX ENTIERS RELATIFS

A.SITUATION D'APPRENTISSAGE

Des élèves de terminale, passionnés d'astronomie, observent au jour J_0 le corps céleste A, qui apparait périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard, ils observent le corps céleste B dont la période d'apparition est de 81 jours.

L'un d'eux affirme qu'on peut prévoir des jours d'apparition simultanée de ces deux corps célestes.

Intrigués par cette information, ils décident d'en savoir plus.

B.CONTENU DE LA LEÇON

I. PPCM DE DEUX NOMBRES ENTIERS RELATIFS

1) Définition

Soit a et b deux nombres entiers relatifs non nuls.

On appelle Plus Petit Commun Multiple de a et b et on note $PPCM(a;b)$ le plus petit élément strictement positif de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ où $a\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des multiples de a.

Exemple :

Déterminons le $PPCM(4;6)$

On a :

$4\mathbb{Z} = \{\dots -24; -20; -16; -12;\ -8;\ -4; 0; 4; 8; 12; 16; 20; 24; \dots\}$

$6\mathbb{Z} = \{\dots -24;\ -18;\ -12;\ -6; 0; 6; 12; 18; 24; \dots\}$

$4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} = \{\dots.;\ -24;\ -12; 0; 12; 24; \dots\}$

Donc $PPCM(4;6) = 12$

Remarque :

- Pour tous nombres entiers relatifs a et b ; on a : $PPCM(a;b) = PPCM(|a|;\ |b|)$

- Pour tous nombres entiers naturels non nuls a et b , on a : $Max\{a;b\} \leq PPCM(a;b) \leq ab$

- Pour tous nombres entiers naturels non nuls a et b, on a : $PPCM(a;b) = a \Leftrightarrow a \in b\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow$ a est un multiple de b.

2) Propriétés

Propriété1

Soit a et b deux nombres entiers naturels non nuls et μ leur PPCM. On a : $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mu\mathbb{Z}$

Exercice de fixation :

Justifie que $4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$

Solution

On montre que $PPCM(4;6) = 12$ donc $4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$

Propriété2

Soit $a; b$ et k trois nombres entiers relatifs non nuls. On a : $PPCM(ka;kb) = |k|PPCM(a;b)$

Exercice de fixation:

Sachant que $M(4;6) = 12$, détermine $PPCM(40;60)$

Solution

$\boldsymbol{40 = 10 \times 4 \ et \ 60 = 10 \times 6}$ **; donc**

$PPCM(40\,;60) = 10 \times PPCM(4\,;6)$

$= 10 \times 12$

On en déduit que $PPCM(40\,;60) = 120$

II. PGCD DE NOMBRES ENTIERS RELATIFS

1) Définition et propriétés

a. Définition

Soit a et b deux nombres entiers relatifs non nuls.

On appelle Plus Grand Commun Diviseur de a et b, noté $PGCD(a;b)$, le plus grand élément de l'ensemble $\mathcal{D}(a;b)$ où $\mathcal{D}(a;b)$ désigne l'ensemble des diviseurs communs à a et à b.

Exercice de fixation :

Sachant que : $\mathcal{D}(18) = \{-18;\ -9;\ -6;\ -3;\ -2;\ -1; 1; 2; 3; 6; 9; 18\}$ et

$\mathcal{D}(15) = \{-15;\ -5;\ -3;\ -1; 1; 3; 5; 15\}$, détermine $PGCD(18;15)$

Solution

On a : $\mathcal{D}(18; 15) = \{-3;\ -1; 1; 3\}$, donc $PGCD(18; 15) = 3$.

Remarques :

- Pour tous nombres entiers relatifs non nuls a et b, on a : $PGCD(a; b) = PGCD(|a|;\ |b|)$.

- Pour tous nombres entiers naturels non nuls a et b , on a : $1 \leq PGCD(a; b) \leq Min\{a; b\}$.

- Pour tous nombres entiers naturels non nuls a et b, on a : $PGCD(a; b) = a \Leftrightarrow a \in \mathcal{D}(b)$.

b. Propriétés

Propriété 1

Soit a et b deux nombres entiers naturels non nuls et δ leur $PGCD$. On a : $\mathcal{D}(a; b) = \mathcal{D}(\delta)$

Exercice de fixation:

Justifie que : $\mathcal{D}(18; 15) = \mathcal{D}(3)$

Solution

On a : $PGCD(18; 15) = 3$ donc $\mathcal{D}(18; 15) = \mathcal{D}(3)$.

Propriété 2

Soit a, b et k trois nombres entiers relatifs non nuls. On a : $PGCD(ka; kb) = |k|PGCD(a; b)$

Exercice de fixation :

Sachant que $D(18; 15) = 3$, détermine $PGCD(36; 30)$

Solution

On sait que $36 = 2 \times 18$ et $30 = 2 \times 15$

$PGCD(36; 30) = PGCD(2 \times 18; 2 \times 15) = \quad 2 \times PGCD(18; 15) = 2 \times 3 = 6$

Propriété 3

Soit a et b deux nombres entiers relatifs non nuls et δ leur $PGCD$

Un nombre entier relatif m est un multiple de δ si et seulement s'il existe deux nombres entiers relatifs u et v tels que $m = au + bv$.

Remarque : $\delta\mathbb{Z} = \{au + bv; u \in \mathbb{Z}; v \in \mathbb{Z}\}$

Exercice de fixation

Justifie qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $144 = 18u + 15v$

Solution

On a : $PGCD(18;15) = 3$ et 144= 3×18 donc 144 est un multiple de 3 ;par suite :il existe deux nombres entiers relatifs u et v tels que : $144 = 18u + 15v$.

2) **Algorithme d'EUCLIDE**

- Soit a et b deux nombres entiers naturels non nuls tels que $a > b$ et r le reste de la division euclidienne de a par b

- Si $r = 0$ alors $\mathcal{D}(a;b) = \mathcal{D}(b)$

- Si $r \neq 0$ alors $\mathcal{D}(a;b) = \mathcal{D}(b;r)$

- Soit a et b deux nombres entiers naturels non nuls tels que $a > b$ et r le reste de la division euclidienne de a par b

- Si $r = 0$ alors $PGCD(a;b) = b$

- Si $r \neq 0$ alors $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$

Exercice de fixation:

1) Détermine à l'aide de l'algorithme d'Euclide le pgcd de 2016 et 1188.
2) Trouve un couple d'entiers relatifs non nuls (u, v) tel que : $36 = 2016$ u $+ 1188$ v

Solution

1) On effectue la division euclidienne de *a* par *b*. Soit r et q respectivement le reste et le quotient de cette division. On obtient le tableau suivant :

a	2016	1188	828	360	108
b	1188	828	360	108	36
r	828	360	108	**36**	0
q	1	1	2	3	3

Donc : pgcd (2016 ; 1188) $= 36$

2) Trouvons un couple d'entiers non nuls (u, v) tel que : $36 = 2016$ u $+ 1188$ v

$36 = 360 - 3 \times 108$

$36 = 360 - 3 \times (828 - 2 \times 360)$

$36 = 7 \times 360 - 3 \times 828$

$36 = 7 \times (1188 - 828) - 3 \times 828$

$36 = 7 \times 1188 - 10 \times 828$

$36 = 7 \times 1188 - 10 \times (2016 - 1188)$

$36 = 17 \times 1188 - 10 \times 2016$

On a : $2016 \times (-10) + 1188 \times 17 = 36$

Donc le couple $(-10\,,17)$ vérifie l'égalité : $2016\text{ u} + 1188\text{ v} = 36$

REMARQUE

Le couple $(23\,,-39)$ vérifie aussi l'égalité précédente.

Dans le cas général, on a : Si pgcd $(\text{a}\,,\text{b}) = \text{d}$, alors il existe $(\text{u}\,,\text{v}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que :$\text{a u} + \text{b v} = \text{d}$

III. NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX

1) Définition et propriétés

a.Définition

Soit a et b deux nombres entiers relatifs non nuls.

On dit que a et b sont premiers entre eux si $PGCD(a;b) = 1$ (les seuls diviseurs communs de a et b sont -1 et 1)

Exemple1

Soit p un entier premier et a un entier relatif.

Si $a \in \text{p}\mathbb{Z}$, alors pgcd $(a\,,\text{p}) = \text{p}$

Si $a \notin \text{p}\,\mathbb{Z}$, alors pgcd $(a\,,\text{p}) = 1$

Tout entier premier p non diviseur d'un entier *a* est premier avec celui-ci.

Exemple2

Justifions que 25 et 7 sont premiers entre eux.

7 est un nombre premier et ne divise pas 25 donc 25 et 7 sont premiers ente eux.

Remarque

Soit a et b deux nombres entiers relatifs non nuls et d un diviseur commun à a et b

- On a : $a = da'$ et $b = db'$ avec $a' \in \mathbb{Z}$ et $b' \in \mathbb{Z}$

$PGCD(a;b) = PGCD(da';db') = d \times PGCD(a';b')$

- d est le $PGCD$ de a et b si et seulement si a' et b' sont premiers entre eux.

b.Théorème de BEZOUT

Soit a et b deux nombres entiers relatifs non nuls.

a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux nombres entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Exercice de fixation:

Justifie en utilisant le théorème de Bézout que 25 et 7 sont premiers entre eux.

Solution

On a **:** $25 \times 2 + 7 \times (-7) = 50 - 49 = 1$ donc 25 et 7 sont premiers entre eux.

c.Théorème de GAUSS

Soit a, b et c trois nombres entiers relatifs non nuls.

Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c

Exercice de fixation :

x et y sont deux entiers relatifs, tels que $2x - 5y = 0$

Justifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tels que $y = 2k$ et $x = 5k$

Solution

$2x - 5y = 0 \Longrightarrow 2x = 5y \Longrightarrow 2$ divise $5y$.

Or $PGCD(2; 5) = 1$ donc, d'après le théorème de GAUSS, 2 divse $y \Longrightarrow y = 2k$

avec $k \in \mathbb{Z}$;

$2x = 5y \Longrightarrow 2x = 5 \times 2k \Longrightarrow x = 5k$.

d. Conséquences

Soit a, b et c trois nombres entiers relatifs non nuls.

- Si a et b sont premiers entre eux et si a et c sont premiers entre eux alors a et bc sont premiers entre eux.

- Si a et b divisent c et si a et b sont premiers entre eux alors ab divise c.

- Si a et b sont premiers entre eux alors $PPCM(a; b) = ab$ avec $a > 0$ et $b > 0$

Exercice de fixation :

Justifie que $PPCM(4; 3) = 12$

Solution

$PPCM(4;3) = 4 \times 3 = 12$ car 4 et 3 sont premiers entre eux.

e. <u>Autres propriétés</u>

<u>Propriété1</u>

Soit n un nombre entier naturel non nul et a, b et c trois nombres entiers relatifs avec $a \neq 0$

Si a et n sont premiers entre eux et si $ab \equiv ac[n]$, alors $b \equiv c[n]$.

Exercice de fixation

Soit a un entier relatif non nul tel que $25a \equiv 100[7]$; justifie que $a \equiv 4[7]$

Solution

25 et 7 sont premiers entre eux et 100 = 25 × 4 ainsi $a \equiv 4[7]$

2) Relation entre $PPCM$ et $PGCD$

<u>Propriété 2</u>

Soit a et b deux nombres entiers naturels non nuls. On a : $PPCM(a;b) \times PGCD(a;b) = ab$

<u>Exercice de fixation</u>

Sachant que $PGCD(18;15) = 3$, déduis-en le $PPCM(18;15)$.

Solution

On a : $PPCM(18;15) \times PGCD(18;15) = 18 \times 15$ = 270 donc : 3 × $PPCM(18;15) = 270$ ainsi $PPCM(18;15) = 90$

3) a. Équations du type : $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\boldsymbol{ax+by=c}$ **où** $\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}$ **et** $\boldsymbol{c}$ sont des entiers relatifs.

Propriété
Soit a, b et c des nombres entiers relatifs. On pose $d = PGCD(a,b)$.
L'équation $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\boldsymbol{ax+by=c}$ admet des solutions si et seulement si d divise c.

<u>Exercice de fixation</u>

Pour chacune des équations suivantes vérifie si elle admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
1) (E) :$4x - 6y = 1$
2) (F) : $3x - 5y = -2$

<u>Solution</u>
1) $PGCD(4;6) = 2$ et 2 ne divise pas 1 donc (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2) $PGCD(3;5) = 1$ et 1 divise -2 donc (F) admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b. **Résolution des Équations du type :** $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\boldsymbol{ax + by = c}$ **où** $\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}$ **et** $\boldsymbol{c}$ sont des nombres entiers relatifs.

Exercice de fixation

Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ **l'équation :** (F) : $3x - 5y = -2$.

Solution

$PGCD(3; 5) = 1$ et 1 divise -2 donc (F) admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Le couple $(1; 1)$ est une solution particulière de (F) .

$$\begin{cases} 3x - 5y = -2 \\ 3 \times \mathbf{1} - \mathbf{5} \times \mathbf{1} = \mathbf{-2} \end{cases} \Rightarrow 3(x-1) - 5(y-1) = 0 \Rightarrow 3(x-1) = 5(y-1). \text{ (1)}$$

5 divise $3(x-1)$ et 5 sont 3 sont premiers entre eux donc d' après le Théorème de GAUSS, 5 divise $x - 1$.

Il existe un entier relatif k tel que $x - 1 = 5\,k$ c'est-à-dire $x = 1 + 5\,k$

Remplaçons $x - 1$ par $5\,k$ dans l'équation (1) ; on obtient $3 \times 5\,k = 5(y-1)$ d'où $y - 1 = 3\,k$.

Par suite $\begin{cases} x = 1 + 5\,k \\ y = 1 + 3\,k \end{cases}$ avec $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement pour tout entier relatif $\boldsymbol{k}$**,** $3(1 + 5\,k) - 5(1 + 3\,k) = 3 + 15k - 5 - 15k = -2$.

$$\boldsymbol{S} = \{(\mathbf{1} + \mathbf{5}\boldsymbol{k}, 1 + 3\boldsymbol{k}), \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}\}.$$

b. **Équations du type :** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}$, $\boldsymbol{ax} \equiv \boldsymbol{b}[\boldsymbol{n}]$ **avec** $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ **et** $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$.

Propriété

Soit a *et* b des entiers relatifs *et* n un entier naturel non nul. On pose $d = PGCD(a, n)$.
L'équation $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}$, $\boldsymbol{ax} \equiv \boldsymbol{b}[\boldsymbol{n}]$ admet des solutions si et seulement si d divise b.

Exercice de fixation
Résous dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :
a. $\mathbf{2}\boldsymbol{x} \equiv \mathbf{3}[\mathbf{5}]$ **;** b. $\mathbf{8}\boldsymbol{x} \equiv \mathbf{1}[\mathbf{4}]$

Solution

a. $PGCD(2,5) = 1$ et 1 divise 3 donc l'équation $\mathbf{2}\boldsymbol{x} \equiv \mathbf{3}[\mathbf{5}]$ admet des solutions.

Résolvons cette équation à l'aide d'un tableau de congruence.

$\boldsymbol{x}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$\mathbf{2}\boldsymbol{x}$	**0**	**2**	**4**	**1**	**3**

D'après le tableau de congruence ci-dessus , $\mathbf{2}\boldsymbol{x} \equiv \mathbf{3}[\mathbf{5}] \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \equiv \mathbf{4}[\mathbf{5}]$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{4} + \mathbf{5}\boldsymbol{k}$ avec $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$.

$$\boldsymbol{S} = \{\mathbf{4} + \mathbf{5}\boldsymbol{k}\,, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}\}$$

b. $PGCD(8,4) = 4$ et 4 ne divise pas 1 donc l'équation $\mathbf{8}\boldsymbol{x} \equiv \mathbf{1}[\mathbf{4}]$ n'admet pas de solution.

$$\boldsymbol{S} = \emptyset$$

C-SITUATION COMPLEXE

Un père et son fils en classe de terminale C, décident de communiquer de façon codée. Pour cela, le père définit le mode de codage suivant :
Il assimile chaque lettre de l'alphabet français, pris dans l'ordre alphabétique à un nombre entier naturel de 0 à 25.
<u>EXEMPLES</u> : La lettre A est assimilée au nombre 0 ; la lettre B est assimilée au nombre 1 ; la lettre Z est assimilée au nombre 25

Il considère la fonction de codage $\begin{cases} f: \{0,1 \ldots,25\} \longrightarrow \{0,1 \ldots,25\} \\ \qquad x \mapsto f(x) \end{cases}$

Avec $f(x) \equiv 29x + 13[26]$. (Autrement dit, $f(x)$ est le reste de $29x + 13$ dans la division euclidienne par 26)

On code tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la manière suivante :

- On détermine le reste r de la division euclidienne de $f(x)$ par 26
- x est alors codé par r

Son fils qui a passé un concours, envoie le mot NWXLP à son père en lui signifiant que ce mot est le résultat de son concours. Le père excité, veut savoir le résultat de son fils. Malheureusement, il ne sait pas comment décoder ce mot. Il te sollicite. Réponds à sa préoccupation.

Solution

- Pour répondre à la préoccupation du père, je vais utiliser l'arithmétique
- Je vais déterminer un entier u tel que $29u \equiv 1[26]$ avec $0 \leq u \leq 25$.
- Je vais en déduire la fonction de décodage g associée à f.
- Je vais Décoder alors chaque lettre du mot NWXLP.
- Je vais alors répondre à la préoccupation du père.

Je détermine un entier u tel que $29u \equiv 1[26]$ avec $0 \leq u \leq 25$.

$29u \equiv 1[26] \iff 29u = 1 + 26v[$, avec $0 \leq u \leq 25$ et $v \in \mathbb{Z}$.

$\iff 29u - 26v = 1$, avec $0 \leq u \leq 25$ et $v \in \mathbb{Z}$.

- J'utilise le tableau de l'algorithme d'Euclide pour déterminer une solution particulière de l'équation : $29u - 26v = 1$.

a	**29**	**26**	**3**	**2**
b	26	3	2	1
r	3	2	1	0
q	1	8	1	2

D'après le tableau de l'algorithme d'Euclide, PGCD(29 ;26) =1 ,donc 29 et 26 sont premiers entre eux.

1=3-2×1 ; 1=3-(26-8×3) ; 1=3×9-26 ;1=(29-26×1) ×9-26 ;1=29×9-26×10.

Le couple (9 ; 10) est une solution particulière de l'équation : $29u - 26v = 1$.

lettres	N	**W**	**X**	**L**	**P**
y	13	22	23	11	15
$9y + 13$	130	211	220	112	148
	0	3	12	8	18
Code	**A**	**D**	**M**	**I**	**S**

- Je détermine un entier u tel que $29u \equiv 1[26]$ avec $0 \leq u \leq 25$.

$$\begin{cases} 29u - 26v = 1 \\ 29 \times 9 - 26 \times 10 = 1 \end{cases} \Longrightarrow 29(u-9) - 26(v-10) = 0.$$

$$\Longrightarrow 29(u-9) = 26(v-10)$$

26 divise $29(u-9)$ et est premier avec 29, donc d'après le théorème de Gauss

26 divise $u - 9$; d'où $-9 = 26k \Longrightarrow u = 9 + 26k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$0 \leq u \leq 25 \Longrightarrow 0 \leq 9 + 26k \leq 25 \Longrightarrow -0{,}35 \leq k \leq 0{,}7 \Longrightarrow k = 0$ .d'où $u = 9$.

- Je vais en déduire la fonction de décodage g associée à f.

$$\begin{aligned} 29x + 13 \equiv y[26] &\Leftrightarrow 29x \equiv -13 + y[26] \\ &\Leftrightarrow 29x \equiv 13 + y[26]. \\ &\Leftrightarrow 9 \times 29x \equiv 9 \times 13 + 9y[26]. \\ &\Leftrightarrow x \equiv 13 + 9y[26]. \end{aligned}$$

J'en déduis la fonction de codage $\begin{cases} g\colon \{0,1 \ldots,25\} \longrightarrow \{0,1 \ldots,25\} \\ \qquad y \mapsto g(y) \end{cases}$

Avec $g(y) \equiv 9y + 13[26]$. (Autrement dit, $g(y)$ est le reste de $9y + 13$ dans la division euclidienne par 26).

- Je décode chaque lettre du mot NWXLP.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Nombre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Le mot NWXLP, après, décodage donne le mot ADMIS.

D. EXERCICES

1. EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

Détermine dans chaque cas le PPCM (-3, 8)

Solution

PPCM (-3, 8)= PPCM (3, 8) = 24 car 3 et 8 sont premiers entre eux

Exercice 2

Soient a et b deux nombres entiers relatifs non nuls, détermine dans chaque cas le PPCM

de a et b

- a = 48 et b= 12
- a = 160 et b= 200

Solution

- 12 divise 48 donc PPCM (12, 48) = 48
- 160 = 40×4 et 200 =40× 5, donc PPCM (160, 200) =40 ×PPCM (4,5)= 40 car 4 et 5 sont premiers entre eux.

Exercice 3

Détermine dans chaque cas le PGCD de -75 et -25

Solution

PGCD (-75 , -25) = PGCD(75 , 25) = 25 car 25 divise 75

Exercice 2

Soient a et b deux nombres entiers relatifs non nuls, détermine dans chaque cas le PGCD

de a et b

- a = 24 et b= 24
- a = 132 et b= -96

Solution

- PGCD(24 ;24) = 24
- PGCD(132 ;-96) = PGCD(132 ; 96) = 12 PGCD(11 ; 8) =12 car 11 et 8 sont premiers entre eux.

2. EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 4

Résous dans $\mathbb{N}^2$ le système suivant : $\begin{cases} PGCD(x;y) = 354 \\ x + y = 5664 \end{cases}$

Solution

$\begin{cases} PGCD(x;y) = 354 \\ x + y = 5664 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 354x' \\ y = 354y' \\ x + y = 5664 \end{cases}$ avec $PGCD(x';y') = 1$ donc

$\begin{cases} PGCD(x;y) = 354 \\ x + y = 5664 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 354x' \\ y = 354y' \\ x' + y' = 16 \end{cases}$ avec $PGCD(x';y') = 1$ donc les $(x';y')$ possibles sont : $(1;15)$; $(15;1)$; $(3;13)$; $(13;3)$;$(5;11)$ et $(11;5)$

Donc les solutions du système sont : $(354;5310)$; $(5310;354)$; $(1062;4602)$; $(4602;1062)$: $(1770;3894)$ et $(3894;1770)$

Exercice 5

Résous dans $\mathbb{N}^2$ le système suivant : $\begin{cases} PGCD(x;y) = 28 \\ xy = 8624 \end{cases}$

Solution

$\begin{cases} PGCD(x;y) = 28 \\ xy = 8624 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 28x' \\ y = 28y' \\ xy = 8624 \end{cases}$ avec $PGCD(x';y') = 1$ donc

$\begin{cases} PGCD(x;y) = 28 \\ xy = 8624 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 28x' \\ y = 28y' \\ x'y' = 11 \end{cases}$ avec $PGCD(x';y') = 1$ donc les $(x';y')$ possibles sont : $(1;11)$ et $(11;1)$

Donc les solutions du système sont : $(28;308)$ et $(308;28)$.

Exercice 6

Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $2x - 5y = 0$

Solution

$2x - 5y = 0 \Longrightarrow 2x = 5y \Longrightarrow 2$ divise $5y$. Or $PGCD(2;5) = 1$ donc , d'après le théorème de GAUSS, 2 divse $y \Longrightarrow y = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

D'où $2x = 5y \Longrightarrow 2x = 5 \times 2k \Longrightarrow x = 5k$

Réciproquement, tout couple de la forme $(5k;2k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$, est solution de l'équation $2x - 5y = 0$

$S = \{(5k; 2k); k \in \mathbb{Z}\}$.

<u>Exercice 7</u>

Pour chacune des équations suivantes vérifie si elle admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et résous-la.

1) (E) :$4x - 6\text{y} = 1$
2) (F) : $3x - 5\text{y} = -2$

<u>Solution</u>

1) $PGCD(4; 6) = 2$ et 2 ne divise pas 1 donc (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2) $PGCD(3; 5) = 1$ et 1 divise -2 donc (F) admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Le couple $(1; 1)$ est une solution particulière de (F) .

1) $\begin{cases} 3x - 5y = -2 \\ 3 \times \mathbf{1} - \mathbf{5} \times \mathbf{1} = \mathbf{-2} \end{cases}$. $\Longrightarrow 3(x - 1) - 5(\text{y} - 1) = 0 \Longrightarrow 3(x - 1) = 5(\text{y} - 1)$. (1)

5 divise $3(x - 1)$ et 5 sont 3 sont premiers entre eux donc d' après le Théorème de GAUSS, 5 divise $x - 1$.

Il existe un entier relatif k tel que $x - 1 = 5\ k$ c'est-à-dire $x = 1 + 5\ k$

Remplaçons $x - 1$ par 5 k dans l'équation (1) ; on obtient $3 \times 5\ k = 5(\text{y} - 1)$ d'où $\text{y} - 1 = 3\ k$.

Par suite $\begin{cases} x = 1 + 5\ k \\ \text{y} = 1 + 3\ k \end{cases}$ avec $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$**.**

Réciproquement pour tout entier relatif $\boldsymbol{k}$**,** $3(1 + 5\ k) - 5(1 + 3\ k) = 3 + 15k - 5 - 15k = -2$.

$$\boldsymbol{S} = \{(\mathbf{1} + \mathbf{5}\boldsymbol{k}\,, 1 + 3\boldsymbol{k}), \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}\}.$$

b.Résolution des **Équations du type :** $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} = \boldsymbol{c}$ **o**ù $\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}$ **et** $\boldsymbol{c}$ sont des entiers relatifs.

2) $PGCD(3; 5) = 1$ et 1 divise -2 donc (F) admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Le couple $(1; 1)$ est une solution particulière de (F) .

1) $\begin{cases} 3x - 5y = -2 \\ 3 \times \mathbf{1} - \mathbf{5} \times \mathbf{1} = \mathbf{-2} \end{cases}$. $\Longrightarrow 3(x - 1) - 5(\text{y} - 1) = 0 \Longrightarrow 3(x - 1) = 5(\text{y} - 1)$. (1)

5 divise $3(x - 1)$ et 5 sont 3 sont premiers entre eux donc d' après le Théorème de GAUSS, 5 divise $x - 1$.

Il existe un entier relatif k tel que $x - 1 = 5\ k$ c'est-à-dire $x = 1 + 5\ k$

Remplaçons $x - 1$ par 5 k dans l'équation (1) ; on obtient $3 \times 5\ k = 5(\text{y} - 1)$ d'où $\text{y} - 1 = 3\ k$.

Par suite $\begin{cases} x = 1 + 5\ k \\ \text{y} = 1 + 3\ k \end{cases}$ avec $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$**.**

Réciproquement pour tout entier relatif $\boldsymbol{k}$**,** $3(1 + 5\ k) - 5(1 + 3\ k) = 3 + 15k - 5 - 15k = -2$.

$$\boldsymbol{S} = \{(\mathbf{1} + \mathbf{5}\boldsymbol{k}\,, 1 + 3\boldsymbol{k}), \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}\}.$$

Exercice 8

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 13x + 47y = 1$

1) Justifie que (E) admet au moins une solution $(x_0\ ;\ y_0)$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
2) A l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de (E).
3) Soit $(x\ ; y)$ une solution de l'équation (E)
   a) Démontre que $8y \equiv 1[13]$
   b) Résous dans $\mathbb{Z}$, l'équation $8y \equiv 1[13]$
   c) Démontre que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $\{(47k - 18\ ; -13k + 5);\ k \in \mathbb{Z}\}$
4) Pendant son séjour à Abengourou pour ses affaire, Mr CHAUKAUD a effectué des réservations dans deux types d'hébergements : l'hébergement A et l'hébergement B. Une nuit en hébergement A coûte 13.000 Fr CFA et une nuit en hébergement B coûte 47.000 Fr CFA. Le coût total de sa réservation a été de 524.000 Fr CFA.

Déterminer le nombre de nuitées passées respectivement en hébergement A et en hébergement B.

Exercice 7

Solution

a	47	13	8	5	3	2
b	13	8	5	3	2	1
r	8	5	3	2	**1**	0
q	3	1	1	1	1	2

$PGCD(47; 13) = 1$.

D'après le théorème de BEZOUT, il existe deux entiers relatifs $x_0\ et\ y_0$ tels que $13x_0 + 47y_0 = 1$

D'où l'équation (E) admet au moins une solution $(x_0; y_0)$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

1. Une solution particulière de (E)
   $1 = 3 - 2 = 3 - (5 - 3) = 3 \times 2 - 5$
   $= (8 - 5) \times 2 - 5 = 8 \times 2 - 5 \times 3$
   $= 8 \times 2 - (13 - 8) \times 3 = 8 \times 5 - 13 \times 3$
   $= (47 - 13 \times 3) \times 5 - 13 \times 5 = 47 \times 5 - 13 \times 18$
   $1 = 13 \times (-18) + 47 \times 5$
   Dans le couple $(-18; 5)$ est une solution particulière de l'équation (E)
2. a) Démontrer que $8y \equiv 1[13]$
   $(x; y)$ est une solution de (E)
   $\Longrightarrow 13x + 47y = 1 \quad \Longrightarrow 13x + 39y + 8y = 1$
   $\Longrightarrow 13(x + 3y) + 8y = 1 \quad \Longrightarrow 8y = 13(-x - 3y) + 1$
   $8y \equiv 1[13]$

b) Résolution de $8y \equiv 1[13]$

Nous allons utiliser un tableau de congruence.

Reste de la division de y par 13	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Reste de la division de $8y$ par 13	0	8	3	11	6	1	9	4	12	7	2	10	5

$8y \equiv 1[13] \Leftrightarrow y \equiv 5[13] \quad \Leftrightarrow \quad y = 13k + 5 \ \ avec \ k \in \mathbb{Z}$

$S = \{13k + 5 \ ; \ \ k \in \mathbb{Z}\}$

c) Résolution de l'équation (E)

$(-18\,;5)$ est une solution.

Equation sans second membre

$13x + 47y = 0 \Leftrightarrow 13x = -47y$

13 divise $-47y$ et PGCD (13 ; 47) =1

D'après le théorème de Gauss, 13 divise –y

$\Longrightarrow \ -y = 13k \ \ ; k \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow \ \boldsymbol{y = -13k} \ \ ; \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$

D'où $13x = -47k \times (-13k)$

$\Longrightarrow \ \boldsymbol{x = 47k} \ \ ; \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$

Réciproquent, tout couple de la forme $(47k\,; \ -13k)$ $avec$ $k \in \mathbb{Z}$ est solution de l'équation $13x + 47y = 0$

$S_{(E)} = \{(47k - 18; -13k + 5)\,; \ \ k \in \mathbb{Z}\}$

4-nombre de nuitées passées en A et en B

Soit x et y les nombres respectifs de nuitée passées en hébergement A et en hébergement B
on a : $13000x + 47000y = 524000$
$\Leftrightarrow 13x + 47y = 524$
Le couple $(-18 \times 524\,; 5 \times 524)$ $c'est$à $dire$ $(-9432\,; 2620)$ est une solution particulière de l'équation $13x + 47y = 524$
On obtient par suite :

$$\left.\begin{array}{l} x = 47k - 9432 \\ y = -13k + 2620 \end{array}\right\} \quad avec \ k \in \mathbb{Z}$$

$x > 0 \ \ et \ \ y > 0 \quad \Longrightarrow \ \frac{9432}{47} < k < \frac{2620}{13}$

$\frac{9432}{47} \approx 200{,}68 \quad et \quad \frac{2620}{13} \approx 201{,}5$

$\Longrightarrow k = 201$

$\Longrightarrow x = 15 \ et \ y = 7$

Mr CHAUKAUD a passé 15 nuitées en A et 7 nuitées en B.