THEME : FONCTIONS NUMERIQUES

Leçon 7 : FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour son premier stage pratique dans l'infirmerie de ton établissement, un étudiant en médecine reçoit un élève malade. Il lui donne un médicament qu'il prend immédiatement.

La fonction qui modélise la masse M, en mg de ce médicament encore présent dans le sang, t heures après sa prise, est la fonction telle que : $M(t) = 50.e^{-0.75t}$

L'étudiant affirme que la prochaine prise de ce médicament se fera lorsque le taux de présence dans le corps de la première prise est en dessous de 20%.

L'élève malade veut savoir quand il pourra effectuer la prochaine prise. Pour cela il te sollicite.

Motivés pour la cause, les élèves de la classe s'organisent et décident de faire des recherches sur le comportement de cette fonction.

B – CONTENU DE LA LEÇON

I. FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

1. DEFINITION – PROPRIETES ALGEBRIQUES

a) Définition

On appelle fonction exponentielle népérienne, notée exp, la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.

Notation :

$$\begin{aligned} exp :\ & \mathbb{R} \to \left]0;+\infty\right[\\ & x \longmapsto exp(x) \end{aligned}$$

Pour tout nombre réel x, le nombre $exp\,(x)$ se note également e^x : $exp(x) = e^x$.

b) Conséquences

- La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$
- Pour tout nombre réel x et pour tout nombre réel strictement positif y , on a : $e^x = y \iff x = lny$
- Pour tout réel x, $e^x > 0$
- $e^0 = 1$; $e^1 = e$
- Pour tout nombre $x \in \left]0;+\infty\right[$, on a : $e^{lnx} = x$
- Pour tout nombre réel y , on a : $ln(e^y) = y$
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Propriétés algébriques

Pour tous nombres réels a et b et pour tout nombre rationnel r, on a :

$$e^a \times e^b = e^{a+b} \quad , \qquad e^{-b} = \frac{1}{e^b} \, , \qquad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \quad \text{et} \quad (e^a)^r = e^{a\times r}$$

Exercice de fixation

Ecris plus simplement : $\ln\sqrt{e}$; $e^{(x+\ln 3)}$; $\frac{e^{2x}}{e^x}$

Solution

$\ln\sqrt{e} = \ln(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$; $e^{(x+\ln 3)} = e^x\, e^{\ln 3} = 3e^x$; $\frac{e^{2x}}{e^x} = e^{2x}e^{-x} = e^x$

d) Equations et inéquations

Propriété

Pour tous nombres réels a et b, on a : $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$ et $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

Exercice de fixation

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune les équations suivantes :

1) $e^{2x-1} = e^{x+5}$
2) $e^{x-2} = 5$
3) $e^{2x} + e^x - 6 = 0$

Corrigé

1) Ensemble de validité V V $=\mathbb{R}$ $e^{2x-1} = e^{x+5}$ $\Leftrightarrow 2x - 1 = x + 5$ $\Leftrightarrow x = 6$ Comme $6 \in V$, $S_{\mathbb{R}} = \{6\}$	2) Ensemble de validité V V $=\mathbb{R}$ $e^{x-2} = 5$ $\Leftrightarrow e^{x-2} = e^{\ln 5}$ $\Leftrightarrow x - 2 = \ln 5$ $\Leftrightarrow x = 2 + \ln 5$ $2 + \ln 5 \in V$, $S_{\mathbb{R}} = \{2 + \ln 5\}$	3) Ensemble de validité V V $=\mathbb{R}$ $e^{2x} + e^x - 6 = 0$ $\Leftrightarrow (e^x)^2 + e^x - 6 = 0$ Posons **:** $X = e^x$. **Donc X > 0** L'équation devient : $X^2 + X - 6 = 0$ Résolution de cette équation : $\Delta = 1 + (-4) \times (-6) = 25 = 5^2$ $X = \frac{-1-5}{2}$ ou $X = \frac{-1+5}{2}$ $X = -3$ ou $X = 2$, X = - 3 est impossible car **X > 0.** $X = 2 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$ $\ln 2 \in V$, $S_{\mathbb{R}} = \{\ln 2\}$

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune les inéquations suivantes :

1) $e^{2x-1} < 8$
2) $e^{2x} - 5e^{x} + 6 \geq 0$

Corrigé

1)Ensemble de validité V

V $=\mathbb{R}$

$e^{2x-1} < 8$

$\Leftrightarrow \ln(e^{2x-1}) < \ln 8$

$\Leftrightarrow 2x - 1 < \ln 8$

$\Leftrightarrow x < \frac{1+\ln 8}{2}$

$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty; \frac{1+\ln 8}{2}\right[$

$S_{\mathbb{R}} = V \cap \left]-\infty; \frac{1+\ln 8}{2}\right[$

$= \left]-\infty; \frac{1+\ln 8}{2}\right[$

2) $e^{2x} - 5e^{x} - 6 \geq 0$

Ensemble de validité V : V $=\mathbb{R}$

Posons $e^{x} = X$, donc $X > 0$. On a $X^2 - 5X + 6 \geq 0$

$\Delta = 25 - 24 = 1$

$X = 2$ ou $X = 3$

Etudions le signe de $X^2 - 5X + 6$

X	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$X^2 - 5X + 6$	+	0	-	0	+

$X^2 - 5X + 6 \geq 0 \Leftrightarrow X \epsilon]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$

D'ou $e^{2x} - 5e^{x} - 6 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x} \epsilon]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$

$\Leftrightarrow e^{x} \leq 2$ ou $e^{x} \geq 3$

$\Leftrightarrow x \leq \ln 2$ ou $x \geq \ln 3$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty; \ln 2] \cup [\ln 3; +\infty[$

$S_{\mathbb{R}} = V \cap (]-\infty; \ln 2] \cup [\ln 3; +\infty[)$

$=]-\infty; \ln 2] \cup [\ln 3; +\infty[$

2- ETUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

a) Limites de référence

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0 \; ; \quad \lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty \; ; \quad \lim_{x\to-\infty} xe^{x} = 0 \; ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$$

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes : $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} (x+1)\, e^{x}$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x(e^{-x} + 1)$

Solution

- $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} (x+1)\, e^{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} (x\, e^{x} + e^{x}) = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} x\, e^{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} e^{x} = 0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x(e^{-x} + 1) = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x\left(\frac{1}{e^{x}} + 1\right) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{1}{e^{x}} + 1 = 1 \end{cases}$

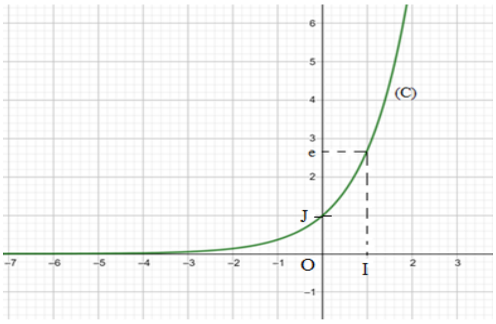
b) Dérivée

La fonction exponentielle népérienne est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est : $x \longmapsto e^{x}$

3 Tableau de variation et courbe représentative

La fonction exponentielle népérienne est strictement croissante sur ℝ.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
exp'(x)	+
exp(x)	0 ↗ $+\infty$



3 . DERIVEES   - PRIMITIVES

a) Dérivée de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$

Propriété
Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K, alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur K

Pour tout x élément de K on a : on a : $(e^u)'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$

Exercice de fixation

Calcule les dérivées sur IR des fonctions suivantes : $f(x) = e^{2cosx}$ et $g(x) = e^{x^3-4x-1}$

Solution

- Pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-2sinx)e^{2cosx}$
- Pour tout nombre réel x,$g'(x) = (-3x^2 - 4)e^{x^3-4x-1}$

b) Primitive de la fonction : $x \mapsto u'(x) \times e^{u(x)}$

Propriété
Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K alors la fonction : $x \mapsto u'(x) \times e^{u(x)}$ a pour primitives sur K , les fonctions : $x \mapsto e^{u(x)} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Exercice de fixation

Détermine sur ℝ les primitives de chacune des fonctions suivantes :

$a)$ $\mathrm{f(x) = e^x}$, b) $\mathrm{f(x) = (sin2x)e^{cos2x}}$, c) $\mathrm{f(x) = xe^{x^2}}$

Solution

a) Déterminons les primitives de la fonction f telle que : $\mathrm{f(x) = e^x}$ sur ℝ .
Les primitives de f sur ℝ, sont les fonctions F telles que : $\mathrm{F(x) = e^x} + \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

b) Déterminons les primitives de la fonction f telle : $\mathrm{f(x) = (sin2x)e^{cos2x}}$ sur ℝ .

Soit $u(x) = \cos 2x$ et $u'(x) = -2\sin 2x$,on a : $u'(x)e^{u(x)} = -2(\sin 2x)e^{\cos 2x}$;$f(x) = \frac{-1}{2}\, u'(x)e^{u(x)}$

Les primitives de f sur ℝ sont les fonctions F telles que : $F(x) = -\frac{1}{2}e^{\cos 2x} + \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.

c) Déterminons les primitives de la fonction f telle que : $f(x) = xe^{x^2}$ sur ℝ .
Soit $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$, on a : $u'(x)e^{u(x)} = 2xe^{x^2}$; $f(x) = \frac{1}{2}\, u'(x)e^{u(x)}$
Les primitives de f sur ℝ sont les fonctions F telles que : $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

II . FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

1- Fonction exponentielle de base a

a- Définition

Soit a est un nombre réel strictement positif.
On appelle fonction exponentielle de base a, notée exp_a , la fonction : $x \mapsto a^x$ et définie sur ℝ par : $exp_a(x) = a^x = e^{xlna}$

Remarques

- Pour tout nombre réel x, $a^x > 0$
- La fonction exponentielle de base 1 est la fonction constante : $x \mapsto 1$
- La fonction exponentielle de base e est la fonction exponentielle népérienne

Exercice de fixation

Exprime sous forme $e^{u(x)}$ les expressions suivantes : 5^x et 12^x

Solution

$5^x = e^{xln5}$ et $12^x = e^{xln12}$

b- Dérivée et sens de variation de la fonction exp_a

Propriété

- Pour tout nombre réel a strictement positif et différent de 1 , la fonction exp_a est dérivable sur ℝ et pour tout nombre réel x on a : $exp_a{}'(x) = ln(a) \times a^x$
- Si $0 < a < 1$, $ln(a) < 0$ alors la fonction exp_a est strictement décroissante sur ℝ.
- Si $a > 1$, $ln(a) > 0$ alors la fonction exp_a est strictement croissante sur ℝ .

Conséquence

Pour tout nombre réel strictement positif a, et pour tous nombres réels x et y on a :

- $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$
- Si $0 < a < 1$, alors $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$
- Si $a > 1$, alors $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$

c- Limites de référence

- Si $0 < a < 1$, alors $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$
- Si $a > 1$, alors $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

d- Représentation graphique

Exercice de fixation
Résoudre dans $\mathbb{R}$
1) $2^{x-9} = 8^{3x+1}$
2) $(0,7)^{-x} = (0,7)^{-5x+1}$

Solution
1) $2^{x-9} = 8^{3x+1} \Leftrightarrow 2^{x-9} = 2^{3(3x+1)} \Leftrightarrow x-9 = 3(3x+1) \Leftrightarrow x = \frac{-3}{2}$; $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{-3}{2}\right\}$

2) $(0,7)^{-x} < (0,7)^{-5x+1} \Leftrightarrow -x > -5x+1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$; $S_{\mathbb{R}} = x \in \left]\frac{1}{4}; +\infty\right[$

2- Fonctions puissances d'exposant α

a- Définition

Soit α un nombre réel non nul.
On appelle fonction puissance d'exposant α, la fonction : $x \mapsto x^{\alpha}$
Cette fonction est définie sur $]0;+\infty[$ par : $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$

b- Remarque

Les règles de calculs sur les puissances d'exposants rationnels s'appliquent pour ces fonctions puissances d'exposants réels

3- Croissances comparées

Propriété
Soit α un nombre réel strictement positif, on a :
(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$; (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^{\alpha}\ln x = 0$; (3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^{\alpha}} = +\infty$; (4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}e^{-x} = 0$

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{5}}$; (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^{2}\ln x$; (3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^{3}} =$; (4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{8}e^{-x}$

Solution
(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{5}} = 0$; (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^{2}\ln x = 0$; (3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^{3}} = +\infty$; (4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{8}e^{-x} = 0$

C- SITUATION COMPLEXE

Des élèves de terminale travaillent les samedis dans le service marketing d'un grand magasin. Ce magasin veut informer la population des nouvelles offres promotionnelles. Le service marketing a observé que la proportion P de la population qui est au courant de ces nouvelles offres après *t* jours d'annonces publicitaires est donnée par la fonction : $P(t) = 1 - e^{-0,21t}$.

Le magasin veut arrêter cette publicité lorsque au moins 90 % de la population sera au courant des nouvelles offres. Un de tes camarades de classe affirme que cela n'excédera pas une semaine.

Donne ton avis argumenté sur l'affirmation de cet élève.

Solution

- ✓ Pour donner mon avis sur l'affirmation de cet élèves ,je vais résoudre une inéquation en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle et conclure .
- ✓ Déterminer le nombre de jours nécessaires au grand magasin pour faire la publicité de ces nouvelles offres revient à déterminer le nombre de jours pour que la proportion de la population qui est au courant de ces nouvelles offres atteigne 90%.

C'est-à-dire : $1 - e^{-0,21t} \geq 0,9$, soit $e^{-0,21t} \leq 0,1$ donc $-0,21t \leq ln0,1$, ainsi $t \geq \frac{ln0,1}{-0,21}$

et donc $t \geq 10,96$ donc on peut prendre t = 11

Conclusion : puisque $11 > 7$, l'affirmation de cet élève est fausse.

IV- <u>EXERCICES</u>

C1 <u>EXERCICES DE FIXATION</u>

<u>Exercice</u> 1

Ecris plus simplement chacun des nombres suivants :

$A = \frac{e^6}{e^3}$; B=$\frac{e^{-3}}{e^{-7}}$; C=$\frac{e^5 \times e^{-2}}{e^3}$; D=$e^6 \times e^{-4}$; E=$\left(e^{-4}\right)^3$

Exercice 2

Ecris plus simplement chacune des expressions suivantes :

a) $(e^x)^3 e^{2x}$ b) $\frac{e^{3x}}{(e^{-x})^2}$ c) $\frac{e^x e^y}{e^{x-y}}$

Exercice 3

Résous dans ℝ chacune des équations proposées :

a) $e^{3-x} = 1$ b) $e^{2x^2+3} = e^{7x}$

c) $(e^x - 2)(e^{-x} + 1) = 0$ d) $2-e^x = 0$

<u>Exercice</u> 4

Détermine la limite des fonctions suivantes en a :

a) $f(x) = e^x - 2x + 1$, $a = -\infty$; b) $g(x) = -e^x - x - 3$, $a = +\infty$;

c) $h(x) = xe^x - x^2 - 2x + 2$, $a = 0$.

<u>Exercice</u> 5

Détermine la limite des fonctions suivantes en a :

a) $f(x) = (2x + 1)\, e^x + \dfrac{1}{x}$, pour $a = +\infty$;

b) $g(x) = (2x - 3)e^{-x}$, pour $a = -\infty$;

<u>Exercice</u> 6

Détermine la limite des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$:

a) $f(x) = (2 - 3x)\, e^x$; b) $g(x) = (x + 1)\, e^{-x}$; c) $h(x) = 3 - 2x + e^x$

<u>Exercice</u> 7

Dans chacun des cas suivants, on admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calcule la fonction dérivée de f.

a) $f(x) = e^{-2x+1}$ b) $f(x) = x + 2 - e^x$ c) $f(x) = (1 - x)e^x$

<u>Exercice</u> 8

Détermine la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = (-2x+5)\, e^x$; $g(x) = \left(-3x^2 + 5\right)e^x$; $h(x) = \dfrac{e^x - 1}{x+1}$; $k(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^{x-1}}$.

<u>Exercice 9</u>

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = e^{-4x} + 2x$

b) $f(x) = 2xe^{x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$

d) $f(x) = x - 5 + 3e^{-2x+1}$

<u>Exercice</u> 10

Détermine une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = 3x^2e^{x^3}$; $g(x) = e^x + 1$; $h(x) = 2xe^{x^2-1}$.

C2 <u>EXERCICES DE RENFORCEMENT</u>

<u>Exercice 11</u>

Résous dans IR les équations suivantes :(1) $e^{(-x^2+2x+4)} = 5$, (2) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

Exercice 12

Résous dans IR les inéquations suivantes

(1) $e^{2x} - 3e^{x} + 2 < 0$

(2) $e^{(-x^2 + 2x + 4)} > 1$

Exercice 13

Résous dans ℝ les équations suivantes d'inconnue x en posant $X = e^x$.

a) $e^{2x} + e^{x} + 3 = 0$;

b) $e^{2x} + e^{x} - 2 = 0$;

c) $e^{2x} - 2e^{x} + 1 = 0$;

d) $-3e^{2x} - 9e^{x} + 12 = 0$.

Exercice 14

Résous dans ℝ chacune des inéquations suivantes :

a) $2e^{2x} - 3e^{x} - 2 \leq 0$; b) $(ex + 1)(e - x - 1) \leq 0$; c) $\dfrac{e^x + 1}{x + 2} \geq 0$; d) $\dfrac{x\left(e^{-x} - 1\right)}{x - 3} \geq 0$.

Exercice 15

Résous dans ℝ l'équation suivante : $2^x + 1 + 2^{-x} = 0$

Exercice 16

1. On donne $p(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4$.
   a) Vérifie que p (-1) = 0
   b) Résoudre dans ℝ l'inéquation suivante :
   $2e^{3x} - 7e^{2x} - 5e^{x} + 4 < 0$.

Exercice 17

Calcule la dérivée et étudie les variations de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = xe^{2x} - 1$; $g(x) = x - 1 + e^{x}$

Exercice 18

Détermine la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x + 2}$; b) $g(x) = \dfrac{e^x + 2}{x + 2}$; c) $h(x) = \dfrac{xe^x}{x + 1}$

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = (x - 2)e^{x}$

a) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Calcule la dérivée f' de f

c) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

Exercice 20

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 4)e^{2x}$

1) Détermine les nombres réels $\alpha; \beta$ et γ pour que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{2x}$ soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f
2) Détermine la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f qui s'annule en 0

C3 <u>EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT</u>

Exercice 21

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.

On considère la fonction f dérivable et définie sur $]-\infty ; 2]$ par $f(x) = (-2x + 3)e^x$.

On note (C) la représentation graphique de f dans le repère (O, I, J).

1. calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, puis interprète graphiquement ce résultat.

2.a) détermine , $f'(x)$ sur $]-\infty ; 2]$

b) Etudie le signe de la dérivée f' sur $]-\infty ; 2]$ et Déduis-en les variations de f sur$]-\infty ; 2]$.

c) Dresse le tableau de variation de f sur$]-\infty ; 2]$.

3. Soit A le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses et B le point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées.

Détermine les coordonnées respectives des points A et B.

4. Construis (C) sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$.

<u>Exercice</u> 22

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = (2 - x)e^x$.

a) Calcule la limite de f en $+\infty$.
b) Calcule la dérivée f' de f
c) Etudie les variations de f
d) Dresse le tableau de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.
e) Trace la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé (O, I, J).
f) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique a sur $[1 ; 2]$.
g) Déduis-en une étude du signe de $f(x)$.

<u>Exercice 23</u>

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 1 - x + e^x$. On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J),

1. Précise l'ensemble de définition de f, noté D_f.

2. Calcule la limite de f en $-\infty$.

3. a) Vérifie que pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f(x) = x\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{e^x}{x}\right)$

b) Déduis-en la limite de f en $+\infty$.

4. a) Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$

b) Précise la position relative de (C) par rapport à (Δ).

5. a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calcule $f'(x)$.

b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$

c) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) > 0$

d) Déduis-en les variations de f et dresse son tableau de variations.

Exercice 24

PARTIE A

On considère la fonction g de$\mathbb{R}$vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = 1 - x - 2e^{-x}$.
Etudier les variations de g (on ne demande pas de calculer les limites).
a) Calculer g (ln2).
b) En déduire que pour tout réel x ; $g(x) < 0$.
PARTIE B

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle $f(x) = e^{-x}(x + e^{-x})$ e^{-x}
On appelle(C) sa représentation graphique dans le repère orthonormé (O ; I ; J). Unité graphique 2cm.
1- a) Calculer la limite de f en$+\infty$.
b) Interpréter graphiquement le résultat.
2- a) Montrer que $f(x) = e^{-2x}(xe^x + 1)$.
Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.
a) Démontrer que pour tout x$\in\mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}g(x)$.
Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
5- a) Justifier que f est une bijection puis dresser le tableau de variation de f^{-1}.
b) Calculer $f(0)$
c) Calculer $(f^{-1})'$ (1).
d) Tracer (T) ; (C) et (C') la courbe de f^{-1}.

PARTIE C

On considère la fonction F de $\mathbb{R}$vers $\mathbb{R}$ définie par: $\boldsymbol{F(x)}$= e^{-x} (ax +b+ $ce^{-x)}$.

1) Déterminer les réels a ; b et c pour que F soit une primitive de f.
2) Déterminer une pimitive F de f qui prend la valeur 0 en 1

Exercice 25

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (2 - x)e^x + 2 - x$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé$(O; I; J)$, unité1 cm.

Partie A

On donne la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = (1 - x)e^x - 1$.

1- Etudier le sens de variation de h puis dresser son tableau de variation.
$(on\ ne\ calculera\ pas\ les\ limites\ en\ -\infty\ et\ en\ +\infty)$

2- En déduire que $\forall\, x \in\,]-\infty; 0[\, \cup\,]0; +\infty[, h(x) < 0$.

Partie B

1- Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2- **a**. Justifier que $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = h(x)$.
b. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

3- Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = 2 - x$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

4- Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$.

5- Déterminer les coordonnées du point K de $(\mathcal{C})$ où la tangente $(\mathcal{T})$ à $(\mathcal{C})$ est parallèle à $(\mathcal{D})$.

6- Déterminer les coordonnées des points A et B où $(\mathcal{C})$ coupe respectivement les droites (OI) et (OJ).

7- Construire $(\mathcal{C}), (\mathcal{D})$ et $(\mathcal{T})$; $\big(on\ ne\ déterminera\ pas\ une\ équation\ de\ (\mathcal{T})\big)$.

Partie C

Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $g(x) = (3 - x)e^x + 2x - \frac{x^2}{2}$.

1- Justifier que g est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.

2- Déterminer la primitive F sur $\mathbb{R}$ de f qui prend la valeur $\frac{3}{2}$ en 0.

4. SITUATION COMPLEXE

Exercice 27

Le président du conseil régional fait mener une étude sur l'évolution de la population dans une zone de son territoire qui compte 10200 habitants en vue de prévoir la construction de centres de santé. L'expert lui dit que l'évolution de la population dans cette zone se fait suivant la formule : 10200 $e^{0,5n}$ où n est le nombre d'années écoulées. Le président veut savoir au bout de combien d'année cette population dépassera 20000 habitants. L'expert étant parti, il te sollicite.
Réponds a la préoccupation du président.

Exercice 28

Une conférence a été prononcée dans une ville pour inviter la population à investir. Les élèves de la de ta classe y ont été aussi invités. À cette occasion, le conférencier a affirmé que le pouvoir d'achat d'un dollar actuel dans t années sera donné par la formule suivante : $A(t) = 0.95^t$.
D'autres personnes de ton quartier présentes à cette conférence et soucieuses de l'avenir, veulent savoir dans combien d'années le pouvoir d'achat sera la moitié de ce qu'il est aujourd'hui. Elles te sollicite. Réponds à leur inquiétude.

Corrections d'exercices

Exercice 3

a) $e^{3-x} = 1 \Leftrightarrow 3 - x = \ln(1) \Leftrightarrow 3 - x = 0$

b) $e^{2x^2+3} = e^{7x} \Leftrightarrow 2x^2 + 3 = 7x \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0$

c) $(e^x - 2)(e^{-x} + 1) = 0 \Leftrightarrow (e^x - 2) = 0$ ou $(e^{-x} + 1) = 0 \Leftrightarrow (e^x - 2) = 0 \Leftrightarrow e^x = 2$

d) $2\text{-}e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 2$

Exercice 10

$F(x) = e^{x^3}$; $G(x) = e^x + x$; $H(x) = e^{x^2-1}$

Exercice 11

(1) $e^{(-x^2+2x+4)} = 5 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 4 = \ln\ (5)$

(2) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ posons X= e^x
ainsi $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow$ X= 1 ou X= 2 , donc $e^x = 1$ ou $e^x = 2$

Exercice 20

1) F'(x)= $(2\alpha x + \beta)e^{2x}$+ $(2\alpha\, x^2 + 2\beta x + 2\gamma\,)e^{2x}$=$[2\alpha\, x^2 + (2\alpha + 2\beta)x + (\beta + 2\gamma\,)]e^{2x}$ donc

$2\alpha= 1$; $2\alpha + 2\beta = 0$ et $\beta + 2\gamma = -4$, ainsi : $\alpha = \frac{1}{2}$; $\beta = -\frac{1}{2}$ et $\gamma= -\frac{7}{4}$

2) F(x)= $(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4})e^{2x}$+ C or F$(x)$= 0 $\Leftrightarrow -\frac{7}{4}$+ C $= 0$ donc C $= \frac{7}{4}$ et ainsi la primitive cherchée est F(x)= $(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4})e^{2x}$+ $\frac{7}{4}$

Exercice 21

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -2xe^x + e^x$

$= 0$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} -2xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$

2.a) pour tout élément x de $]-\infty\,;2]$, $f'(x) = -2e^x + (-2x + 3)e^x$

$= (-2x + 1)e^x$

Donc pour tout élément x de $]-\infty\,;2]$, $f'(x) = (-2x + 1)e^x$

b) Etudions le signe de la dérivée f' sur $]-\infty\,;2]$.

pour tout élément x de $]-\infty\,;2]$, $e^x > 0$ donc le signe f' est celui de $-2x + 1$, ainsi, pour tout élément x de $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$, $f'(x)\geq 0$ et pour tout élément x de $\left[\frac{1}{2}\,;2\right]$, $f'(x)\leq 0$

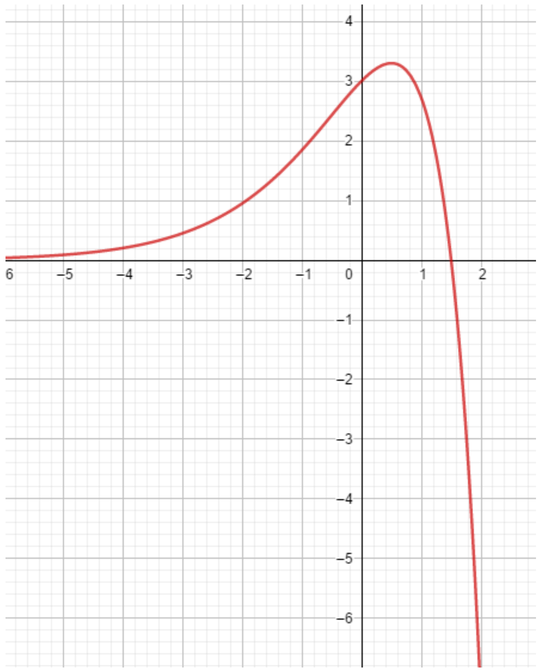
Ainsi : f est croissante sur de $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;2\right]$

c) Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2e^{\frac{1}{2}}$	$\searrow$	$-e^2$

3) $f(0) = 3$ et $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$, on en déduis que : A($\frac{3}{2}$; 0) et B(0 ; 3).

4)



Exercice 26

Déterminer le nombre de jours nécessaires au grand magasin pour faire la publicité de ces nouvelles offres revient à déterminer le nombre de jours pour que la proportion de la population qui est au courant de ces nouvelles offres atteigne 90%.

C'est-à-dire : $1 - e^{-0,21t} = 90\%$, soit $e^{-0,21t} = 0,1$ donc $-0,21t = ln0,1$, ainsi $t = \frac{ln0,1}{-0,21}$ et donc $t = 11$

Le grand magasin fera la publicité pendant 11 jours.