SECONDAIRE
$T^{le}C$
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

THEME : CALCULS ALGEBRIQUES

DUREE : 10 heures **CODE :**

Leçon 6 : NOMBRES COMPLEXES

A - SITUATION D'APPRENTISSAGE

Des élèves d'une classe de terminale s'interroge sur ce qu'ils viennent de découvrir à l'exposition sur les journées mathématiques organisée par la Société Mathématique de Côte d'Ivoire (SMCI). Dans un stand sur les équations on peut lire :
Au début du XVIème siècle, le mathématicien Scipione dal Ferro, propose une formule donnant une solution de l'équation du 3ème degré $x^3 + px = q$

$$x = \sqrt[3]{\frac{q-\sqrt{q^2+4p^3/27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q+\sqrt{q^2+4p^3/27}}{2}}$$

A la fin du XVIème siècle, le mathématicien Bombelli applique cette formule à l'équation $x^3 - 15x = 4$.
Il obtient littéralement : $x = \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}$.
Les élèves sont intrigués par la notation $\sqrt{-1}$ car depuis la classe de troisième ils savent que la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas. Leur professeur de mathématique explique qu'en mathématique, lorsqu'une équation n'a pas de solutions dans un ensemble, une démarche naturelle (et historique) consiste à en chercher dans un ensemble plus grand. L'ensemble numérique le plus grand que l'on a rencontré est $\mathbb{R}$. Pourtant, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$. Il a fallu envisager un autre ensemble dans lequel l'équation ci-dessus admet des solutions.
Les élèves décident d'en savoir d'avantage sur ce nouvel ensemble.

B - RESUME DE COURS

I. ETUDE ALGEBRIQUE

1. Notion de nombre complexe

a- Définition

on appelle nombre complexe tout nombre de la forme $a + ib$ où $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Propriété et définition

Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme $z = a + ib$;

La forme $a + ib$ est appelée forme algébrique du nombre complexe.

Le nombre réel a est appelé la partie réelle du complexe, on note : $a = \mathcal{R}e(z)$.

Le nombre réel b est appelé la partie imaginaire du complexe, on note : $b = \mathcal{I}m(z)$.

Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est un nombre complexe imaginaire pur. L'ensemble des nombres complexes imaginaires purs est l'ensemble noté $i\mathbb{R}$.

Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est un nombre réel.

On a: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Le seul nombre complexe à la fois réel et imaginaire pur est le nombre nul 0.

Les calculs se font dans $\mathbb{C}$ $\boldsymbol{comme\ dans}$ $\mathbb{R}$ en tenant compte du fait que $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

Exemples :

- $z = 3 - 2i$ est un nombre complexe de partie réelle 3 et de partie imaginaire -2.
- $z = 5i$ est un nombre complexe de partie réelle 0 et de partie imaginaire 5 , $z = 5i$ est un complexe imaginaire pur.

b- **<u>Opérations dans $\mathbb{C}$</u>**

Soient $z = a + ib \ \ et\ z' = a' + ib'$ deux nombres complexes donnés.

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$;
- $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.
- Pour tout nombre complexe non nul, $(a; b) \neq (0; 0)$ et $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$.
- Soient $z\ et\ z'$ deux nombres complexes tels que $z \neq 0$; $\frac{z'}{z} = z' \times \frac{1}{z}$.

<u>Exercice de fixation</u>

Donne la forme algébrique de chaque nombre complexe z :

1) $z = (2 + 4i) + (-5 + i)$; 2) $z = (2 - i)(3 + 2i)$; 3) $z = \frac{2}{1-3i}$.

Solution

1) $z = (2 + 4i) + (-5 + i) = (2 - 5) + (4 + 1)i = -3 + 5i$.

2) $z = (2 - i)(3 + 2i) = \big(2 \times 3 - (-1 \times 2)\big) + \big(2 \times 2 + 3 \times (-1)\big)i = 8 + i$.

3) $z = \frac{2}{1-3i} = 2 \times \frac{1}{1-3i} = 2\left(\frac{1}{1^2+(-3)^2} - i\frac{(-3)}{1^2+(-3)^2}\right) = 2\left(\frac{1}{10} + i\frac{3}{10}\right) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$.

c) Propriété

Soit z et z' deux nombres complexes.

$z = z' \Leftrightarrow \mathcal{R}e(z) = \mathcal{R}e(z')$ et $\mathcal{I}m(z) = \mathcal{I}m(z')$.

$z = 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}e(z) = 0$ et $\mathcal{I}m(z) = 0$.

Exercice de fixation
Soit $z = a + 2 + i(b + 5)$ et $z' = -1 + 3i$ deux nombres complexes.
Détermine les réels a et b pour que z et z' soient égaux.

$z = z' \Leftrightarrow \mathcal{R}e(z) = \mathcal{R}e(z')$ et $\mathcal{I}m(z) = \mathcal{I}m(z')$
on a donc $\begin{cases} a + 2 = -1 \\ b + 5 = 3 \end{cases}$, soit $\begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \end{cases}$
$z\ et\ z'$ sont égaux lorsque $a = -3$ et $b = -2$.

Remarque :

Pour tout nombre entier naturel n, on a : $i^{4n} = 1$; $i^{4n+1} = i$; $i^{4n+2} = -1$; $i^{4n+3} = -i$

Exercice de fixation 1

Calcule i^{2019} et $i^{1000000000}$

Solution

$i^{2019} = i^{4\times504+3} = -i$; $i^{1000000000} = i^{4\times250000000} = 1$

Exercice de fixation 2
Détermine la forme algébrique du nombre complexe : $(1 - 2i)^5$

Solution
$(1 - 2i)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k 1^{5-k}(-2i)^k$

$$(1 - 2i)^5 = C_5^0 1^5(-2i)^0 + C_5^1 1^4(-2i) + C_5^2 1^3(-2i)^2 + C_5^3 1^2(-2i)^3 + C_5^4 1(-2i)^2 + C_5^5 1^0(-2i)^5$$

$$(1 - 2i)^5 = 1^5(-2i)^0 + 5 \times 1^4(-2i) + 10 \times 1^3(-2i)^2 + 10 \times 1^2(-2i)^3 + 5 \times 1(-2i)^4 + 1 \times 1^0(-2i)^5$$

$(1 - 2i)^5 = 1 - 10i - 40 + 80i + 80 - 32i = 41 + 38i$.

2. <u>Conjugué d'un nombre complexe</u>

Définition

Soit un nombre complexe z tel que $z = a + ib$ où $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. Le nombre complexe conjugué de z est le nombre complexe noté $\overline{z}$ tel que $\overline{z} = a - ib$.

<u>Exemples :</u>

1)$z = 1$; $\overline{z} = 1$; 2) $z = i$; $\overline{z} = -i$; 3) $z = 1 + 3i$; $\overline{z} = 1 - 3i$;
4) $z = 2i - 3$; $\overline{z} = -3 - 2i$.

Propriété 1

Soit $(z; z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$

(i). $\overline{\overline{z}} = z$.

(ii). $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}; z + \overline{z} = 2\mathcal{R}e(z)$; $z - \overline{z} = 2i\mathcal{I}m(z)$.

(iii). $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$; $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

(iv). pour $z \neq 0$, $\overline{(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\overline{z}}$; $\overline{(\frac{z'}{z})} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.

(v). Pour $z = a + ib$, $z \times \overline{z} = a^2 + b^2$

Exercice de fixation 1
1)Soit $z = 1 - 3i$ un nombre complexe
Calcule : $z \times \bar{z}$, $z + \bar{z}$ et $z - \bar{z}$.
2) Détermine le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

$z = i(\sqrt{2} - 3i)$ et $z' = (4 + 3i) + (-5i - 1)$.

Solution
1)
$z \times \bar{z} = (\mathcal{R}e(z))^2 + (\mathcal{I}m(z))^2 = 1^2 + (-3)^2 = 10$.

$z + \bar{z} = 2\mathcal{R}e(z) = 2 \times 1 = 2$.

$z - \bar{z} = 2i\mathcal{I}m(z) = 2i(-3) = -6i$.

2)

$\overline{z} = \overline{i(\sqrt{2} - 3i)} = \overline{i}\overline{(\sqrt{2} - 3i)} = -i(\sqrt{2} + 3i) = 3 - i\sqrt{2}$.
$\overline{z'} = \overline{4 + 3i} + \overline{-5i - 1} = 4 - 3i + 5i - 1 = 3 + 2i$.
<u>*Conséquences :*</u>

Pour tout $(\boldsymbol{z}; \boldsymbol{z'}) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$; $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z}} = \frac{\overline{\boldsymbol{z}}}{\boldsymbol{z} \times \overline{\boldsymbol{z}}} = \frac{\overline{\boldsymbol{z}}}{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}$; $\frac{\boldsymbol{z'}}{\boldsymbol{z}} = \frac{\boldsymbol{z'} \times \overline{\boldsymbol{z}}}{\boldsymbol{z} \times \overline{\boldsymbol{z}}} = \frac{\boldsymbol{z'} \times \overline{\boldsymbol{z}}}{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}$

Propriété 2

Soit $z \in \mathbb{C}^*$;

(i)- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{I}m(z) = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = z$

(ii)- $z \in i.\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}e(z)=0 \Leftrightarrow \overline{z} = -z$

Exercice de fixation

Soit le nombre complexe $z = \frac{2-3i}{x+i}; x \in \mathbb{R}$. Détermine le nombre réel x tel que z soit :

1) Un nombre réel ;

2) Un nombre imaginaire pur.

Solution

Comme $x \in \mathbb{R}$ alors le nombre complexe z est bien défini.

$z = \frac{2-3i}{x+i} = \frac{(2-3i)(x-i)}{x^2+1^2} = \frac{2x-3}{x^2+1} - i\frac{3x+2}{x^2+1}$.

1) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x+2}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$. z est donc réel lorsque $x = -\frac{2}{3}$.

2) z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\mathcal{Re}(z)$=0 $\Leftrightarrow \frac{2x-3}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. z est donc imaginaire pur lorsque $x = \frac{3}{2}$.

3. Module d'un nombre complexe

Définition

Le module du nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre réel positif noté $|z|$ tel que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$|z| = \sqrt{z \times \bar{z}}$.

Exemple

$|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

$|i| = 1$.

Propriétés

Soit $(z; z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$:

(i). Si $z = a, a \in IR\ alors\ |z| = |a|$.

(ii). Si $z = ib\ , b \in IR\ \ alors\ |z| = |b|$.

(iii). $|\overline{z}| = |-z| = |z|;\ |z \times z'| = |z|.|z'|;\ |z^n| = |z|^n$.

(iv). Pour $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$; $\left|\frac{z\prime}{z}\right| = \frac{|z\prime|}{|z|}$.

(v). $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

(vi). $|z|^2 = z \times \overline{z} = (\mathcal{R}e(z))^2 + (\mathcal{I}m(z))^2$

Exercice de fixation

Détermine le module du nombre complexe z chacun des cas suivants :

1) $z = (3 - i)(3i - 2)$; 2) $z = (2 + i) + (8 - i)$; 3) $z = \frac{3-i}{4-i\sqrt{2}}$; 4) $z = (3 + i)^3$.

Solution

1) $|z| = |(3 - i)(3i - 2)| = |3 - i| \times |3i - 2| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} \times \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{130}$.

2) $|z| = |(2 + i) + (8 - i)| = |(2 + 8) + i(1 - 1)| = |\ 10\ | = 10$.

3) $|z| = \left|\frac{3-i}{4-i\sqrt{2}}\right| = \frac{|3-i|}{|4-i\sqrt{2}|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

4) $|z| = |(3 + i)^3| = |3 + i|^3 = (\sqrt{10}\,)^3 = 10\sqrt{10}$

II- <u>Représentation géométrique d'un nombre complexe</u>

Dans la suite de ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$; on l'appelle aussi plan complexe.

- A tout nombre complexe $z = x + iy$ on associe le point $M(x; y)$ du plan. Réciproquement à tout point $A(a; b)$ du plan on associe le nombre complexe $z_0 = a + ib$.

On établit ainsi une bijection entre $\mathbb{C}\ et\ \mathcal{P}$ (plan).

Le nombre complexe $z = x + iy$ est appelé affixe du point M. On note z_M.

Le point $M(x; y)$ est le point image du nombre complexe $z = x + iy$. On note M(z) .

- On associe également à chaque vecteur $\vec{w}(a; b)$ du plan le nombre complexe $z = a + ib$ appelé affixe du vecteur $\vec{w}$. On note $z_{\vec{w}} = a + bi$.
  Le vecteur $\vec{w}(a; b)$ est le vecteur image du nombre complexe $a + ib$.
- $(O, \vec{u})$ est appelé l'axe réel ;
- $(O, \vec{v})$ est l'axe imaginaire.

Soit $\vec{w}$, $\overrightarrow{w'}$ deux vecteurs du plan, $M\ et\ M'$ deux points du plan et $k \in \mathbb{R}$.

$z_{\vec{w}+\vec{w'}} = z_{\vec{w}} + z_{\vec{w'}}$; $z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{M'} - z_M$ et $z_{k.\vec{w}} = k \times z_{\vec{w}}$.

Exemple

Soit $A(2 + i)$ et $B(-4 + 7i)$ deux points du plan complexe.

On a : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -4 + 7i - 2 - i = -6 + 6i$ et
$z_{3.\overrightarrow{AB}} = 3 \times z_{\overrightarrow{AB}} = 3(-6 + 6i) = -18 + 18i$.

Interprétation géométrique du module d'un nombre complexe.

z est un nombre complexe de point image M. Le point M et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ ont le même affixe

$\|\overrightarrow{OM}\| = OM = |z|$, on en déduit que le module d'un nombre complexe z d'image M est la distance entre les points $O\ \ et\ M$.

$|z_{\overrightarrow{MM'}}| = |z_{M'} - z_M| = MM'$.

III. FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL.

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\vec{v})$.

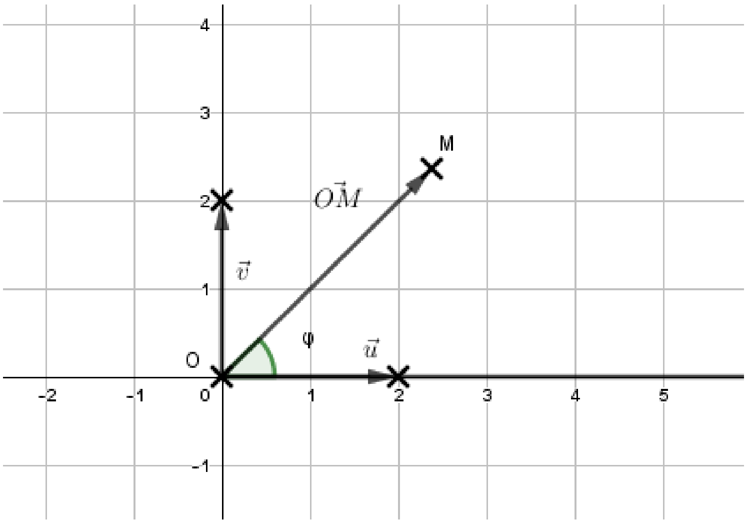
1. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

a. Argument d'un nombre complexe non nul

Définition

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\vec{v})$, soit $z \in \mathbb{C}^*$ d'image M.

Un argument du nombre complexe z est une mesure en radian de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}})$.



Si φ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}})$ alors $\arg(z) = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Si $z = a + ib, (a; b) \neq (0; 0)$ et $\varphi = \arg(z)$ alors on a : $\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{a}{a^2+b^2} \\ \sin(\varphi) = \frac{b}{a^2+b^2} \end{cases}$.

Si $a \neq 0$ $alors$ $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$.

Remarque

Tout nombre complexe non nul z admet un unique argument appartenant à l'intervalle $]-\pi;\ \pi]$ appelé argument principal et noté $Arg(z)$.

Exemples

(i). Pour $z = a\ , a \in \mathbb{R}^*; \arg(z) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

(ii). Pour $z = ib, b \in \mathbb{R}^*; \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exercice de fixation :

Détermine un argument du nombre complexe z dans chacun des cas suivants:

1) $z = \sqrt{3} + i$; 2) $z = 1 - i\sqrt{3}$; 3) $z = 1 + i$.

1) $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. Soit φ un argument de z .

$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{1}{2} \end{cases}$, on en déduit qu'un argument de z est $\frac{\pi}{6}$ et tout argument de z est de la forme :
$\arg(z) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ , k \in \mathbb{Z}$.

2) $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. Soit φ un argument de z .

$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{1}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, on en déduit qu'un argument de z est $-\frac{\pi}{3}$ et tout argument de z est de la forme : $\arg(z) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ , k \in \mathbb{Z}$.

3) $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Soit φ un argument de z .

$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, on en déduit qu'un argument de z est $\frac{\pi}{4}$ et tout argument de z est de la forme :
$\arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ , k \in \mathbb{Z}$.

Propriétés

Soient $(z; z') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*, n \in \mathbb{N}$:

- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(\overline{z}) = -\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

- $\arg(z^n) = n.arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exercice de fixation

Détermine un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$z = \left(-\sqrt{3} + i\right)(1 - i)$; 2) $z = \frac{1-\mathrm{i}}{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}$; 3) $z = (1 - i)^3(-\sqrt{3} + i)^2$.

Solution

Posons $\boldsymbol{z_1 = -\sqrt{3} + i}$ **et** $\boldsymbol{z_2 = 1 - i}$**.**

$|z_1| = \sqrt{(-\sqrt{\mathbf{3}})^2 + \mathbf{1}^2} = \sqrt{\mathbf{4}} = \mathbf{2}$ **;** Soit φ un argument de z_1**,** $\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{1}{2} \end{cases}$

on en déduit qu'un argument de z est $\frac{5\pi}{6}$ et tout argument de z est de la forme :
$\varphi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi , k \in \mathbb{Z}$.

$|\boldsymbol{z_2}| = \sqrt{\mathbf{1}^2 + (-\mathbf{1})^2} = \sqrt{\mathbf{2}}$ **;** Soit θ un argument de $\boldsymbol{z_2}$, $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

on en déduit qu'un argument de z est $-\frac{\pi}{4}$ et tout argument de z est de la forme :
$\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi , k \in z$.

1) $z = \boldsymbol{z_1} \times \boldsymbol{z_2}$ **, donc**

$\boldsymbol{arg}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{arg}(\boldsymbol{z_1}) + \boldsymbol{arg}(\boldsymbol{z_2}) + \mathbf{2}\boldsymbol{k}\pi = \frac{5\pi}{6} + \frac{-\pi}{4} + 2k\pi = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi , k \in \mathbb{Z}$.

2) $z = \frac{z_2}{z_1}$, donc

$$\boldsymbol{arg}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{arg}(\boldsymbol{z_2}) - \boldsymbol{arg}(\boldsymbol{z_1}) + \mathbf{2}\boldsymbol{k}\pi = -\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{6} + 2k\pi = -\frac{13\pi}{12} + 2k\pi$$
$$= \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

3) $z = \boldsymbol{z_1}^{\mathbf{2}} \times \boldsymbol{z_2}^{\mathbf{3}}$**, donc**

$$\boldsymbol{arg}(\boldsymbol{z}) = \mathbf{2}\boldsymbol{arg}(\boldsymbol{z_1}) + \mathbf{3}\boldsymbol{arg}(\boldsymbol{z_2}) + \mathbf{2}\boldsymbol{k}\pi = 2 \times \frac{5\pi}{6} + 3 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Remarque

Si z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{w}$ alors arg (z) est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u} , \overrightarrow{w}})$

Si z_A et z_B sont les affixes des points A et B alors arg $(z_B - z_A)$ est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}})$

b. <u>Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul</u>

Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul ; $r = |z|\ \ et\ \theta$ un argument de z.

z s'écrit de façon unique sous la forme :

$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

Cette écriture est appelée la forme trigonométrique du nombre complexe z.

Exemples

$2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + isin(\frac{\pi}{4}))$; $4i = 4(\cos(\frac{\pi}{2}) + isin(\frac{\pi}{2}))$; $5 = 5(\cos(0) + isin(0))$.

Exercice de fixation :

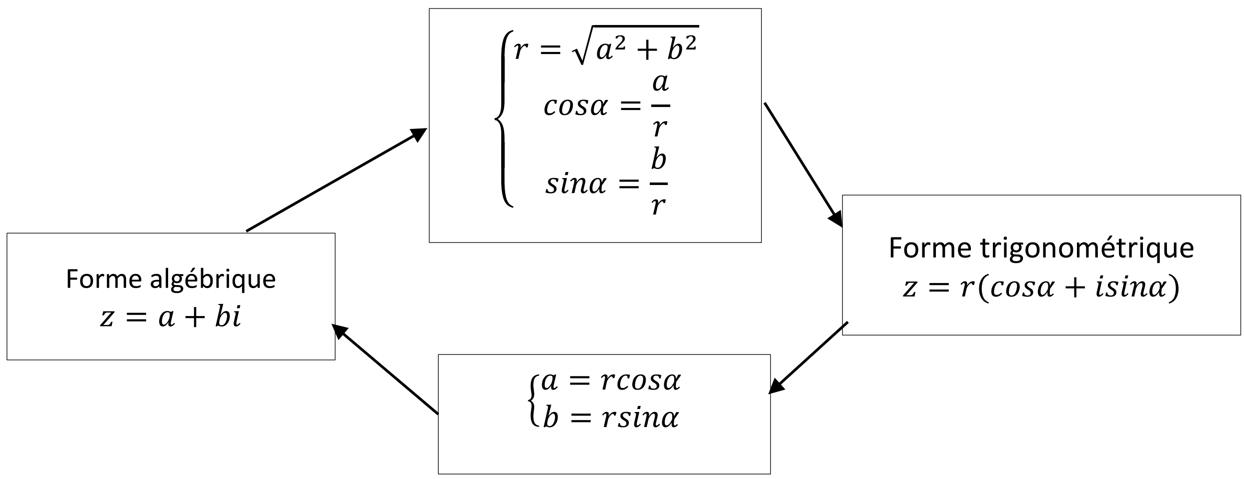
Détermine la forme trigonométrique du nombre complexe $\boldsymbol{z = -\sqrt{3} + i}$.

Solution

$$|\boldsymbol{z}| = \sqrt{(-\sqrt{\boldsymbol{3}})^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{1}^{\boldsymbol{2}}} = \sqrt{\boldsymbol{4}} = \boldsymbol{2}\ \textbf{;}\ \text{Soit } \varphi \text{ un argument de } z, \begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

on en déduit qu'un argument de z est $\frac{5\pi}{6}$ et la forme trigonométrique de z est :
$z = 2(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}))$.

Passage d'une forme à l'autre :



c. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul.

On pose $\boldsymbol{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$.

Définition

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument $\boldsymbol{\theta}$ **.**

On appelle forme exponentielle de z l'écriture $z = re^{i\boldsymbol{\theta}}$.

Exemples

$2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; $4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$; $5 = 5e^{i0}$.

Exercice de fixation

Détermine la forme exponentielle de chacun des nombres complexes z suivants.

1) $z = 1 + i$; 2) $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Solution

1) $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Soit φ un argument de z .

$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, on en déduit qu'un argument de z est: $\frac{\pi}{4}$. L'écriture exponentielle de z est:

$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2) 3) $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Soit φ un argument de z .

$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{1}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, on en déduit qu'un argument de z est: $\frac{\pi}{3}$. L'écriture exponentielle de z est:

$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Remarques :

- Pour déterminer la forme trigonométrique d'un nombre complexe on calcule d'abord le module de z puis un argument de z.
- La forme trigonométrique d'un complexe est bien indiquée pour déterminer les produits, les quotients ou les puissances d'un nombre complexe.

Propriété

Soient $z = r\boldsymbol{e}^{i\boldsymbol{\theta}}$ et $z' = r'\boldsymbol{e}^{i\boldsymbol{\varphi}}$ deux nombres complexes non nuls.

(i) $z' = z \Leftrightarrow \begin{cases} r' = r \\ \varphi = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

(ii) $\overline{z} = r\boldsymbol{e}^{-i\theta}$; $\boldsymbol{\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.}$

(iii) $z' \times z = rr'e^{i(\theta+\varphi)}$.

(iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, , $z^n = r^n\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{in\theta}}$.

(v) $\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r} \boldsymbol{e^{i(\varphi-\theta)}}$

Exercice de fixation

Détermine la forme exponentielle de $z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$.

Solution

$z = \frac{z_1}{z_2}$ avec $z_1 = 1 + i \ \ et \ \ z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

$z_1 = \sqrt{2} \times e^{i\frac{\pi}{4}} \ \ et \ z_2 = 2 \times e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2} \times e^{i\frac{\pi}{4}}}{2 \times e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

Remarque

$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + 2k\pi$.

2. <u>Formule de MOIVRE et applications</u>

<u>a- Formule de Moivre</u>

Propriété

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{et}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On a :$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

On appelle cette propriété la **formule de Moivre.**

Exercice de fixation

Soit $\boldsymbol{z} = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{300}$.

En utilisant la formule de Moivre justifie que : $z = 1$.

Solution

$z = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{300} = (\cos(\frac{\pi}{3}) + isin(\frac{\pi}{3}))^{300} = \cos(\frac{300\pi}{3}) + isin(\frac{300\pi}{3})$

$z = \cos(100\pi) + isin(100\pi) = 1$.

b. <u>Formules d'EULER</u>

Propriété

Soit $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{et}\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$;

$\cos(\boldsymbol{\theta}) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\boldsymbol{\theta}) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

En général : $\cos(n\boldsymbol{\theta}) = \frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}$ et $\sin(n\boldsymbol{\theta}) = \frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}$.

Remarque

Les formules d'Euler permettent de linéariser des expressions du type $cos^n(x) ou\ sin^n(x)$.

Exercice de fixation

Soit α un nombre réel et n un nombre entier relatif.

Exprime $cos^4(\alpha)$ en fonction cos $n\alpha$ et sin $n\alpha$.

Solution

$cos^4(\alpha) = (\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2})^4$

$$cos^4(\alpha) = \frac{1}{16}(C_4^0(e^{i\alpha})^4(e^{-i\alpha})^0 + C_4^1(e^{i\alpha})^3(e^{-i\alpha}) + C_4^2(e^{i\alpha})^2(e^{-i\alpha})^2 + \quad C_4^3(e^{i\alpha})^1(e^{-i\alpha})^3 + C_4^4(e^{i\alpha})^0(e^{-i\alpha})^4$$

$$cos^4(\alpha) = \frac{1}{16}(e^{i4\alpha} + 4e^{i3\alpha}e^{-i\alpha} + 6e^{i2\alpha}e^{-i2\alpha} + 4e^{i\alpha}e^{-i3\alpha} + e^{-i4\alpha})$$

$$cos^4(\alpha) = \frac{1}{16}(e^{i4\alpha} + 4e^{i2\alpha} + 6 + 4e^{-i2\alpha} + e^{-i4\alpha})$$

$$cos^4(\alpha) = \frac{1}{16}(e^{i4\alpha} + e^{-i4\alpha} + 4(e^{i2\alpha} + e^{-i2\alpha}) + 6)$$

$$cos^4(\alpha) = \frac{1}{16}(2\cos(4\alpha) + 8\cos(2\alpha) + 6)$$

$$cos^4(\alpha) = \frac{1}{8}\cos(4\alpha) + \frac{1}{2}\cos(2\alpha) + \frac{3}{8}.$$

III- EQUATIONS DANS $\mathbb{C}$

1.Résolutions d'équations dans $\mathbb{C}$

1°) Racines carrées d'un nombre complexe.

a- Définition

Soit un nombre complexe z_0, on appelle racine carrée du complexe, z_0 tout nombre complexe z tel que : $z^2 = z_0$.

Méthode

Soit $z = x + iy$; $z^2 = z_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |z_0| \quad (1) \\ x^2 - y^2 = \mathcal{R}e(z_0) \ (2) \\ 2xy = \mathcal{I}m(z_0) \ (3) \end{cases}$

b- Remarques :

- Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.
- Si $z_0 \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{avec}$ $z_0 > 0$ alors les racines carrées de z_0 sont : $-\sqrt{z_0}$ et $\sqrt{z_0}$.
- Si $z_0 \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{avec}$ $z_0 < 0$ alors les racines carrées de Z_0 sont $-i\sqrt{-z_0}\, et\, i\sqrt{-z_0}$.

Exercice de fixation.

Détermine les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants :

1)$Z_0 = 8 - 6i$.

2) $z_0 = -5$

Solution

1)

$|Z_0| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$.

Soit $z = x + iy$ une racine carrée de z_0. On a : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \ (1) \\ x^2 - y^2 = 8 \ (2) \\ 2xy = -6 \ (3) \end{cases}$

. (1) + (2) entraine $2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 3$

En remplaçant x par 3 dans (3) on a $y = -1$.

Donc les racines carrées de $Z_0 = 8 - 6i$ sont $3 - i$ et $-3 + i$.

2) $(i\sqrt{5})^2 = -5i$, donc les racines carrés de $z_0 = -5$ sont $-i\sqrt{5}$ et $i\sqrt{5}$.

2. Equations du second degré.

Propriété

Soit a, b et c sont des nombres complexes avec $a \neq 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si δ est une racine carrée de Δ, alors les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont :

$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.

Exercice de fixation

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

1) (E_1): $z^2 + 5z - 14 = 0$.

2) (E_2): $z^2 - 2iz - 1 = 0$.

3) (E_3): $z^2 + 2iz + 3 = 0$.

4) (E_4): $z^2 - (1+i)z + 2 - i = 0$.

Solution

1)

(E_1): $z^2 + 5z - 14 = 0$.

$\Delta = 81$. On obtient $S = \{-7 : -2\}$.

2)

(E_2): $z^2 - 2iz - 1 = 0$.

$\Delta = 0$. On obtient $S = \{i\}$.

3)

(E_3): $z^2 + 2iz + 3 = 0$.

$\Delta = -16 = 16i^2 = (4i)^2$. Une racines carrée de -16 est $4i$.

On obtient $S = \{-3i ; i\}$.

4)

(E_4): $z^2 - (1+i)z + 2 - i = 0$.

$\Delta = -8 + 6i$. Soit $\delta = x + iy$ une racine carrée de Δ.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 & (1) \\ x^2 + y^2 = 10 & (2) \\ 2xy = 6 & (3) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Longrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.

En remplaçant x par 1 dans (3) on a $\delta = 1 + 3i$.

$z_1 = \frac{-(-1-i)-(1+3i)}{2\times 1} = \frac{1+i-1-3i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$.

$z_2 = \frac{-(-1-i)+(1+3i)}{2\times 1} = \frac{1+i+1+3i}{2} = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i$.

On obtient $S = \{-i; 1+2i\}$.

Remarques :

- Si $a, b\ et\ c\ des\ réels\ avec\ a \neq 0\ et\ \Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions complexes conjuguées.
- Pour résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$**, on a pas besoin de déterminer les deux racines carrées de** Δ**.**

3°) Racine n-ième d'un nombre complexe.

a. Racine n-ième d'un nombre complexe.

Définition

Soit un nombre complexe $Z_0 \neq 0\ et\ n \in \mathbb{N}\ \boldsymbol{avec}\ \boldsymbol{n} \geq \mathbf{2}$ **. On appelle** racine n-ième de Z_0 tout nombre complexe z tel que $z^n = Z_0$.

Propriété 1

Soit $Z_0 = Re^{i\theta}$; les racines n-ième de Z_0 sont $z_k = \sqrt[n]{R} \times e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}\ \ avec\ k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$.

Propriété 2

Les racines n-ième d'un nombre complexe sont les affixes des sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans un cercle de rayon $\sqrt[n]{R}$.

Exercice de fixation

Soit : $Z = 8(1 + i\sqrt{3})$.

Détermine les racines 4-ième de Z.

Solution

On a: $Z = 16\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$.

Soit $z = \rho(cosx + isinx)$, $\rho > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors $z^4 = \rho^4(cos4x + isin4x)$.

$z^4 = Z \iff \begin{cases} \rho^4 = 16 \\ 4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ D'où: $\begin{cases} \rho = 2 \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \ k \in \{0; 1; 2; 3\} \end{cases}$

- Pour $k = 0$, $x = \frac{\pi}{12}$, $z_0 = 2\left(cos\frac{\pi}{12} + isin\frac{\pi}{12}\right)$

- Pour $k = 1$, $x = \frac{7\pi}{12}$, $z_1 = 2\left(cos\frac{7\pi}{12} + isin\frac{7\pi}{12}\right)$
- Pour $k = 2$, $x = \frac{13\pi}{12}$, $z_2 = 2\left(cos\frac{13\pi}{12} + isin\frac{13\pi}{12}\right)$
- Pour $k = 3$, $x = \frac{19\pi}{12}$, $z_3 = 2\left(cos\frac{19\pi}{12} + isin\frac{19\pi}{12}\right)$.

Les racines 4-ième de Z sont z_0 ; z_1 ; z_2 et z_3.

b. Racine n-ième de l'unité.

Définition :

Une racine n-ième de l'unité est une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^n = 1$.

Les racines n-ième de l'unité sont :

$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \cos(\frac{2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{2k\pi}{n})$ $avec\ k \in \{0; 1; \ldots; n-1\}$.

Exercice de fixation :

Détermine les racines n-ième de l'unité dans chacun des cas suivants.

1) $n = 2$; 2) $n = 3$; 3) $n = 4$; 4) $n = 5$.

Solution

- ✓ Pour n=2 ; $z^2 = 1$.

  Les solutions : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{2}}, k \in \{0; 1\}$; soit $z_0 = 1\ et\ z_1 = -1$.

- ✓ Pour n=3 ; $z^3 = 1$.

  Les solutions : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}, k \in \{0; 1; 3\}$

  $z_0 = 1;\ z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ et\ z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

  On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, on a : $j^2 = \overline{j}\ \ et\ j^2 + j + 1 = 0$.

- ✓ Pour n=4 ; $z^4 = 1$.

  Les solutions : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{4}}, k \in \{0; 1; 2; 3\}$; soit
  $z_0 = 1;\ z_1 = i;\ z_2 = -1\ ;\ z_3 = -i$.

- ✓ Pour n=5 ; $z^5 = 1$.

  Les solutions : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{5}}\ , k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Remarques :

- Les images des racines n-ième de l'unité sont les sommets d'un n-polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.
- Si $z_k \neq 1$ est une racine n-ième de l'unité alors $\overline{z_k} = z_{n-k}$.
- Si $z_0 \neq 1$ est une racine n-ième de l'unité alors les racines n-ième de l'unité sont : $z_k = {z_0}^k \ avec \ k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$.
- Si $z_k, k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$ sont les racines n-ième de l'unité alors.$\sum_{k=0}^{n} z_k = 0$.

Si z_0 est une racine n-ième de Z_0 alors les racines n-ième de Z_0 sont $z_k = z_0 \times e^{i\frac{2k\pi}{n}} \ avec \ k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$.

C- SITUATION COMPLEXE

Des élèves d'une classe de terminale scientifique découvrent en préparant un exposé sur les ensembles de nombres dans la bibliothèque de leur Lycée, la propriété suivante :

« On dit qu'un entier naturel A est la somme de deux carrés, s'il existe deux entiers naturels $x \ et \ y \ tels \ que \ A = x^2 + y^2$. Si A est la somme de deux carrés, alors A^n est aussi la somme de deux carrés pour pour tout entier $n \geq 1$ » .

Un élève ne faisant pas partie du groupe chargé de l'exposé ne comprend pas cette information. Il sollicite ses camarades pour l'aider.

Ils informent leur professeur de mathématique, qui leur dit d'utiliser leur connaissance sur les nombres pour vérifier cette information.

Demontre cette proprieté pour ton ami.

Solution

- Pour confirmer cette information, je vais utiliser les nombres complexes.
- J'utilise un nombre complexe bien choisi.
- Le carré du module de ce nombre complexe est le nombre que je choisis.
- Développement :
- Soit $A = x^2 + y^2$. Posons $z = x + iy \ avec \ x \in \mathbb{Z} \ et \ y \in \mathbb{Z}$.

  On a:$A = |z|^2$.

  Soit $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$.

  - En utilisant un raisonnement par récurrence, je justifie que pour tout $n \geq 1, z^n = x_n + iy_n \ avec \ x_n \in \mathbb{Z} \ et \ y_n \in \mathbb{Z}$.

    $z^1 = z = x + iy \ avec \ x \in \mathbb{Z} \ et \ y \in \mathbb{Z}$. La propriété est vraie au rang 1.

    Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$;

    Supposons que $z^n = x_n + iy_n \ avec \ x_n \in \mathbb{Z} \ et \ y_n \in \mathbb{Z}$ (R);

Démontrons que $z^{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}\ \ avec\ x_{n+1} \in \mathbb{Z}\ \ et\ y_{n+1} \in \mathbb{Z}$
$z^{n+1} = z \times z^n = (x+iy)(x_n + iy_n)$ d'après (R).
$z^{n+1} = (xx_n - yy_n) + i(yx_n + xy_n)$

$z^{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}\ \ avec\ \ x_{n+1} = (xx_n - yy_n) \in \mathbb{Z}\ et\ y_{n+1} = (yx_n + xy_n) \in \mathbb{Z}$.

La propriété est vraie au rang n+1.
Conclusion : pour tout $n \geq 1, z^n = x_n + iy_n\ \ avec\ x_n \in \mathbb{Z}\ \ et\ y_n \in \mathbb{Z}$.
Si $z = x + iy\ \ avec\ x \in \mathbb{Z}\ et\ y \in \mathbb{Z}$ alors

- Soit $A = x^2 + y^2$.
  On a:$A = |z|^2$.
  Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
  $A^n = (|z|^2)^n = (|z^n|)^2 = {x_n}^2 + {y_n}^2$.

➢ Conclusion : si A est la somme de deux carrés, alors A^n est aussi la somme de deux carrés.

D- EXERCICES

1. EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

Ecris sous forme algébrique les nombres complexes suivants :$z = (1+i)(\sqrt{3}+i)$ et $z' = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$

Solution

$$z = (1+i)(\sqrt{3}+i) = \sqrt{3} + i + i\sqrt{3} + i^2 = \sqrt{3} - 1 + i(1+\sqrt{3})$$

$$z' = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{(\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)}{4} = \frac{(\sqrt{3}+1)}{4} + i\frac{(\sqrt{3}-1)}{4}$$

Exercice 2

Ecris chacun des nombres complexes $1 + i$ et $\sqrt{3} + i$ sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle :

Solution

- $|1+i| = \sqrt{2}$
  Soit $\propto = \arg(1+i)$
  On a :$\begin{cases} cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

Donc $1 + i = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

- $|\sqrt{3}+i| = 2$
  Soit $\theta = \arg(1+i)$
  On a : $\begin{cases} cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

Donc $\sqrt{3}+i = 2\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

2. EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice3

On donne : $Z = (1+i)(\sqrt{3}+i)$

1. Ecris le nombre complexe Z sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.
2. Déduis-en les valeurs exactes de $cos\frac{5\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12}$.

Exercice4

Résous dans $\mathbb{C}$l'équation suivante

$$(-2+i)z^2 + (4-5i)z + 3 - i = 0$$

3. EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 5

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Unité graphique : $2cm$

1) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $8-6i$

2) On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^3 + (-1+i)z^2 + (2+2i)z + 8i$

   a) Démontrer que $P(z)$ admet une unique racine imaginaire pure αi qu'on déterminera

   b) Déterminer les complexes $a; b$ et c tels que $P(z) = (z-\alpha i)(az^2 + bz + c)$

   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

3) On considère les points $A; B$ et C d'affixes respectives $-1-i; 2-2i$ et $2i$

   a) Placer les points $A; B$ et C

   b) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse

c) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme

4) On considère le point E d'affixe $2+2i$

a) Placer le point E

b) Démontrer que les points $A; B; C$ et E sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon

Solution

1) Déterminons les racines carrées de $8-6i$

Posons : $Z=8-6i$. $|Z|=10$
Soit : $z=x+iy \quad (x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R})$

$$z^2=Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2-y^2=8 \\ 2xy=-6 \end{cases}$$

$$2x^2=18$$

$x^2=9$, d'où $x=3$ ou $x=-3$.

Pour $x=3$, $2\times 3y=-6$. D'où $y=-1$

Pour $x=-3$, $2\times(-3)y=-6$. D'où $y=1$

Donc, les racines carrées de $8-6i$ sont : $3-i$ et $-3+i$.

2) $P(z)=z^3+(-1+i)z^2+(2+2i)z+8i$

a) Démontrons que $P(z)$ admet une unique racine imaginaire pure αi

αiest une racine imaginaire pure de $P(z)$signifie que :

$$(\alpha i)^3+(-1+i)\times(\alpha i)^2+(2+2i)\times\alpha i+8i=0$$

$$-i\propto^3+\alpha^2-i\alpha^2+2i\alpha-2\alpha+8i=0$$

$$\alpha^2-2\alpha+i(-\propto^3-\alpha^2+2\alpha+8)=0$$

On obtient le système : $\begin{cases} \alpha^2-2\alpha=0 \\ -\propto^3-\alpha^2+2\alpha+8=0 \end{cases}$

$$\alpha^2-2\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ ou } \alpha=2$$

On a : $-0^3-0^2+2\times 0+8=8$, $8\neq 0$

$$-2^3-2^2+2\times 2+8=-8-4+4+8=-12+12=0$$

Donc, la racine imaginaire pure de $P(z)$ est $2i$.

b) Déterminer les complexes $a; b$ et c tels que $P(z) = (z - \alpha i)(az^2 + bz + c)$

On a : $P(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - 2iaz^2 - 2ibz - 2ic$

$$= az^3 + (b - 2ia)z^2 + (c - 2ib)z - 2ic$$

Par identification : $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2ia = -1 + i \\ c - 2ib = 2 + 2i \\ -2ic = 8i \end{cases}$

On en déduit que : $a = 1$, $b = -1 + 3i$, $c = -4$

D'où : $P(z) = (z - 2i)[z^2 + (-1 + 3i)z - 4]$

c) Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z - 2i = 0 \text{ ou} z^2 + (-1 + 3i)z - 4 = 0$$

$$z = 2i \Delta = (-1 + 3i)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 8 - 6i$$

D'après la question 1, les racines carrées de Δ sont : $3 - i$ et $-3 + i$.

$z_1 = \frac{1-3i+3-i}{2} = 2 - 2i$ et $z_2 = \frac{1-3i-3+i}{2} = -1 - i$

Donc $S_{\mathbb{C}} = \{2i\,; 2 - 2i\,;\ -1 - i\}$.

3) a) Plaçons les points A , B et C (Voir graphique)

b) Nature du triangle ABC

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{2 - 2i + 1 + i}{2i + 1 + i} = \frac{3 - i}{1 + 3i} = \frac{-i(1 + 3i)}{1 + 3i} = -i$$

Donc, le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

c) Déterminons l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme

Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme il faut : $z_{\overrightarrow{CD}} = z_{\overrightarrow{BA}}$

$$z_D - z_C = z_A - z_B$$

$z_D - 2i = -1 - i - 2 + 2i$. D'où : $z_D = -3 + 3i$

4) a) Plaçons le point E d'affixe $2 + 2i$ (Voir graphique)

b) Démontrer que les points $A; B; C$ et E sont situés sur un même cercle.

- Le triangle ABC étant rectangle en A, donc il est inscrit dans le cercle de diamètre $[BC]$.
- $\frac{z_C - z_E}{z_B - z_E} = \frac{2i-2-2i}{2-2i-2-2i} = \frac{-2}{-4i} = -\frac{1}{2}i$.

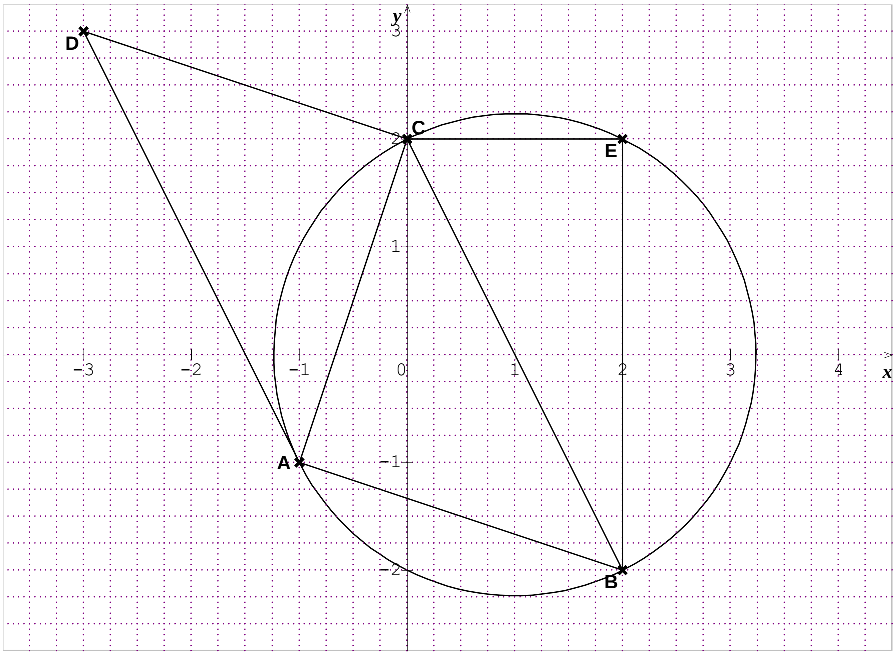
$-\frac{1}{2}i \in i\mathbb{R}^*$, alors le triangle BCE est rectangle en E.

Donc, il est inscrit dans le cercle de diamètre $[BC]$.

Ainsi, les points $A; B; C$ et E sont situés sur le cercle de diamètre $[BC]$.

Son centre est le milieu de $[BC]$. Son affixe est $\frac{z_B+z_C}{2} = 1$, donc c'est le point I.

Son rayon est $= IC = |z_C - z_I| = |-1+2i| = \sqrt{5}$.



Exercice 6

1) Détermine le module, un argument, la partie imaginaire et la partie réelle des racines quatrièmes de $-i$
2) Place dans le plan complexe les points images de ces racines
3) Calcule la somme et le produit de ces racines

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ d'unité 1 cm.

On considère dans C l'équation (E) : $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$.

1) Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on précisera.

2) Déterminer les nombres complexes a et b tels que :

$$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z - z_0)(z^2 + az + b)$$

3) Résoudre l'équation (E).

4) Soit A , B et C les points d'affixes respectives $4 + i$, $4 - i$ et $-i$.

a) Placer ces points dans le repère $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$

b) Ω est le point d'affixe 2. Calculer l'affixe du point S tel que ΩAS soit un triangle isocèle et rectangle en Ω de sens direct.

c) Démontrer que les points B, A, S et C appartiennent à un même cercle (Γ) dont on précisera le centre et le rayon.

V-DOCUMENTS

Collection Inter Africain de Mathématiques (CIAM) TERMINALE SM