THEME 1 : GEOMETRIE DU PLAN

LEÇON 07 : CONIQUES

A - SITUATION D'APPRENTISSAGE

Des élèves de terminale C passionnés d'astronomie découvrent lors de leur lecture que l'orbite d'un satellite peut être circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique.

L'un d'eux pense qu'on peut déterminer une équation mathématique pour chacune de ces figures.

Les autres étant sceptiques, ils décident ensemble d'en savoir plus en s'informant auprès de leur professeur.

B - CONTENU DE LA LEÇON

1- ETUDE GÉNÉRALE DES CONIQUES

1) Conique définie par foyer et directrice

a) Définition

Définition : Soit $(\mathcal{D})$ une droite, F un point n'appartenant pas à $(\mathcal{D})$ et e un nombre réel strictement positif.

On appelle conique de foyer F, de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité e, l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$ où H est le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$.

Si $e = 1$ alors (Γ) est une parabole.

Si $0 < e < 1$ alors (Γ) est une ellipse.

Si $e > 1$ alors (Γ) est une hyperbole.

Exemples

Soit $(\mathcal{D})$ une droite du plan.

- l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = 1$ où H est le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$ est la parabole de foyer F, de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité 1.
- l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = \frac{1}{3}$ où H est le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$ est l'ellipse de foyer F, de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité $\frac{1}{3}$.
- l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = 2$ où H est le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$ est l'hyperbole de foyer F, de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité 2.

b) Propriétés

Propriété 1 : Soit (Γ) une conique de foyer F et de directrice $(\mathcal{D})$.

La droite (Δ) passant par F et perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ est un axe de symétrie de (Γ) .

(Δ) est appelée l'axe focal de la conique (Γ).

Exercice de fixation

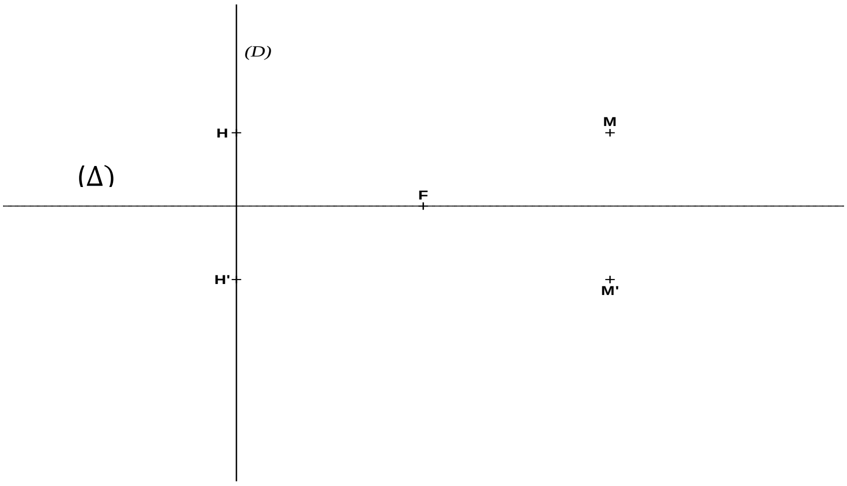
Soit (Γ) une conique de foyer F, de directrice $(\mathcal{D})$.

On note (Δ) la droite passant par F et perpendiculaire à $(\mathcal{D})$.

Soit M un point de (Γ). On note M' l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

Justifie que $M' \in (\Gamma)$.

Solution



$M \in (\Gamma)$ et $S_{(\Delta)}(M) = M'$, comme est (Δ) est un axe de symétrie de (Γ) alors $M' \in (\Gamma)$.

<u>Propriété 2</u>

Soit (Γ) une conique d'excentricité e et d'axe focal (Δ).

- Si $e = 1$, alors (Γ) coupe (Δ) en un point S. Le point S est appelé sommet de la parabole.

- Si $e \neq 1$, alors (Γ) coupe (Δ) en deux points A et A'. Les points A et A' sont les sommets de la conique situés sur l'axe focal.

Remarque

Soit K est le projeté orthogonal de F sur $(\mathcal{D})$.

- Si $e = 1$, alors S est le milieu de $[FK]$.
- Si $e \neq 1$, alors $A = bar\{(F, 1); (K, e)\}$ et $A' = bar\{(F, 1); (K, -e)\}$.

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

On donne le point $F(2; 3)$ et la droite (D) d'équation $x = -4$.

Soit (Γ) une conique de foyer F, de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité $\frac{1}{3}$.

1. Donne une équation de l'axe focal de (Γ).
2. Détermine les coordonnées des points A et A', les sommets de la conique situés sur l'axe focal.

Solution

1. L'axe focal (Δ) est la droite passant par F et perpendiculaire à (D), donc une équation de (Δ) est : $y = 3$.
2. K est le projeté orthogonal de F sur (D) donc $K(-4;3)$.
   - $A = bar\left\{(F,1);(K,\frac{1}{3})\right\}$ donc $A = bar\{(F,3);(K,1)\}$.

   $A(\frac{3\times2+1\times(-4)}{4};\frac{3\times3+1\times3}{4})$; $A(\frac{1}{2};3)$
   - $A' = bar\left\{(F,1);(K,-\frac{1}{3})\right\}$ donc $A' = bar\{(F,3);(K,-1)\}$.

   $A'(\frac{3\times2-1\times(-4)}{2};\frac{3\times3-1\times3}{2})$; $A'(5;3)$

2) Régionnement du plan par une conique

Définition

Soit (Γ) une conique de foyer F, de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité e.

Pour tout point M du plan dont le projeté orthogonal sur $(\mathcal{D})$ est H, on a :

- M est intérieur à (Γ) si $MF < eMH$.

- M est extérieur à (Γ) si $MF > eMH$.

Remarque :

- Le foyer F d'une conique est intérieur à cette conique.

- Tout point de la directrice $(\mathcal{D})$ d'une conique est extérieur à cette conique.

II- EQUATION REDUITE D'UNE CONIQUE

1) Equation réduite d'une parabole

Propriété et définition :

Soit $(\mathcal{P})$ une parabole de foyer F, de directrice $(\mathcal{D})$ et de sommet S.

Dans le repère orthonormé $(S,\vec{\imath};\vec{\jmath})$ avec $\vec{\imath} = \frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$, $(\mathcal{P})$ est la courbe d'équation $y^2 = 2px$ avec $p = KF$, K etant le projeté orthogonal de F sur $(\mathcal{D})$.

- Cette équation est appelée équation réduite de la parabole $(\mathcal{P})$.

- Le nombre réel strictement positif p est appelé paramètre de la parabole $(\mathcal{P})$.

- L'axe focal est $(S,\vec{\imath})$; le foyer est $F(\frac{p}{2};0)$ et la directrice est $(\mathcal{D}): x = -\frac{p}{2}$.

Remarque :

- En échangeant les droites $(S,\vec{\imath})$ et $(S,\vec{\jmath})$, on obtient une équation réduite de la forme $x^2 = 2py$, l'axe focal devient la droite $(S,\vec{\jmath})$, le foyer est $F(0;\frac{p}{2})$ et la directrice est la droite $(\mathcal{D}): y = -\frac{p}{2}$.

- Dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe d'équation $y^2 = 2ax$ avec $a \neq 0$ est une parabole de sommet O, d'axe focal $(O, \vec{\imath})$, de paramètre $|a|$, de foyer $F(\frac{a}{2}; 0)$ et de directrice $(\mathcal{D}): x = -\frac{a}{2}$.

Exercice de fixation

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

On considère la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation : $y^2 + 4x = 0$.

Détermine l'axe focal, les coordonnées du foyer F et une équation de la directrice $(\mathcal{D})$.

Solution

On a : $y^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow y^2 = -4x$

$(\mathcal{P})$ est la parabole de sommet O, d'axe focal $(O, \vec{\imath})$, de foyer $F(-1; 0)$ et de directrice $(\mathcal{D}): x = 1$

2. <u>Equation réduite d'une conique à centre</u>

Propriété

Soit (Γ) une conique de foyer F, de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité e avec $e \neq 1$.

On désigne par A et A' les sommets de (Γ) situés sur l'axe focal.

Dans le repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que O soit le milieu du segment $[AA']$ et $\vec{\imath} = \frac{1}{OA}\overrightarrow{OA}$.

Une équation de la courbe (Γ) est : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$ où $a = OA$ et $c = OF$.

Cette équation est appelée équation réduite de la conique (Γ).

<u>Remarque</u>

- Si on échange les axes $(O, \vec{\imath})$ et $(O, \vec{\jmath})$, on obtient une équation de la forme $\frac{x^2}{b^2-c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

l'axe focal est $(O, \vec{\jmath})$, le foyer est $F(0; c)$, la directrice est $(\mathcal{D}): y = \frac{b^2}{c}$, les sommets situés sur l'axe focal sont $B(0; b)$et $B'(0; -b)$.

- Dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$ avec $a > 0; c > 0$ et $a \neq c$ est une conique de foyer $F(c; 0)$, de directrice $(\mathcal{D}): x = \frac{a^2}{c}$ et d'excentricité $e = \frac{c}{a}$.

- si $0 < e < 1$, alors $c < a$. On pose : $b^2 = a^2 - c^2$ et l'équation réduite de l'ellipse est:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- si $e > 1$, alors $c > a$. On pose : $b^2 = c^2 - a^2$ et l'équation réduite de l'hyperbole est :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

<u>Conséquences</u>

Soit (Γ) une conique d'excentricité e avec $e \neq 1$ et d'axe focal (Δ).

On désigne par A et A'les sommets de (Γ) situés sur l'axe focal.

- La médiatrice du segment $[AA']$ est un axe de symétrie de la conique (Γ).

- Le milieu O du segment $[AA']$ est le centre de symétrie de la conique (Γ).

De telles coniques sont appelés coniques à centre ; le centre de symétrie est appelé le centre de la conique

Remarque

Le point F' et la droite $(\mathcal{D}')$, symétriques respectifs de F et $(\mathcal{D})$ par rapport à O, sont également un foyer et une directrice de la conique (Γ).

La conique (Γ) est parfaitement déterminée par la donnée de F'; $(\mathcal{D}')$ et e.

On a : $FF' = 2c$; FF' est appelé distance focale de la conique à centre.

Exercice de fixation

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Dans chacun des cas suivants, donne la nature de (Γ), son axe focal, son centre, son excentricité, ses foyers F et F', ses directrices (D) et (D'), ses sommets A et A'situés sur l'axe focal.

1. Soit (Γ) la courbe d'équation : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.
2. Soit (Γ) la courbe d'équation : $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

Solution

1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, on a : $a = 5$ et $b = 3$ donc $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$

   Nature : (Γ) est une ellipse.
   Axe focal : l'axe $(O, \vec{\imath})$
   Centre : le point O
   Excentricité : $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$
   Foyers : $F(4; 0)$ et $F'(-4\,; 0)$
   Directrices : $(D) : x = \frac{25}{4}$ et $(D') : x = -\frac{25}{4}$
   Sommets situés sur l'axe focal : $A(5; 0)$et $A'(-5; 0)$.

2. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, on a : $a = 2$ et $b = 1$ donc $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$

   Nature : (Γ) est une hyperbole

   Axe focal : l'axe $(O, \vec{\imath})$
   Centre : le point O
   Excentricité : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$
   Foyers : $F(\sqrt{5}; 0)$ et $F'(-\sqrt{5}\,; 0)$
   Directrices : $(D) : x = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$ et $(D') : x = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$
   Sommets situés sur l'axe focal : $A(2; 0)$ et $A'(-2; 0)$.

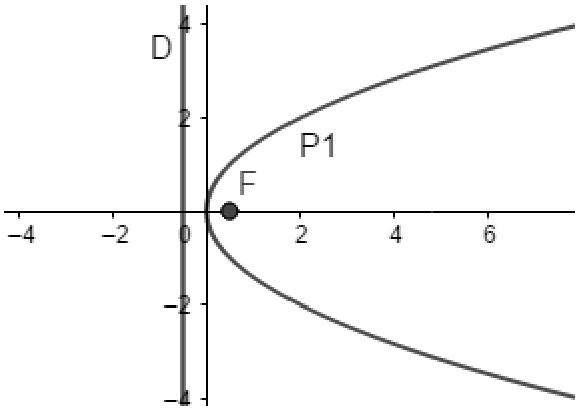
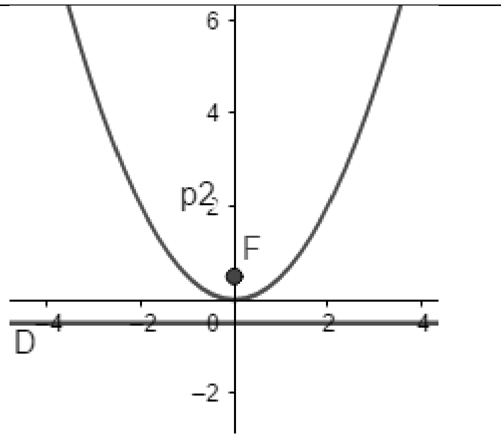
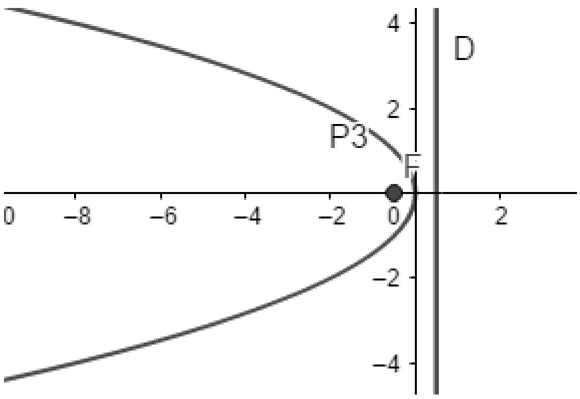
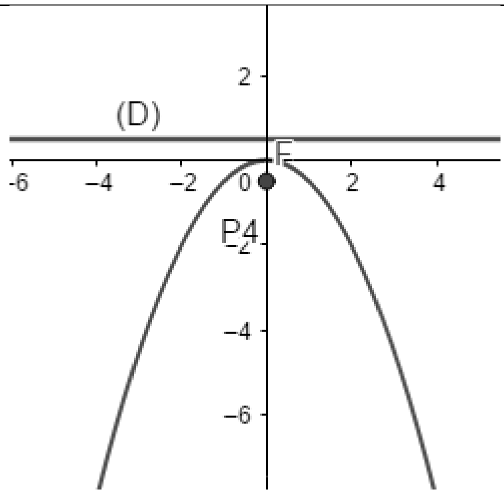
III- ELEMENTS CARACTERISTIQUES DES CONIQUES

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) <u>Eléments caractéristiques de la parabole</u>

TABLEAU RECAPITULATIF DONNANT LES ELEMENTS CARACTERISTIQUES D'UNE PARABOLE

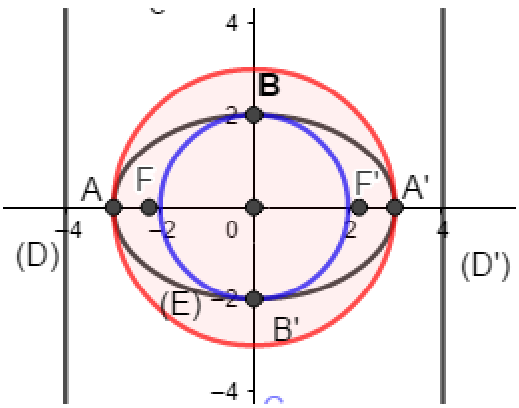
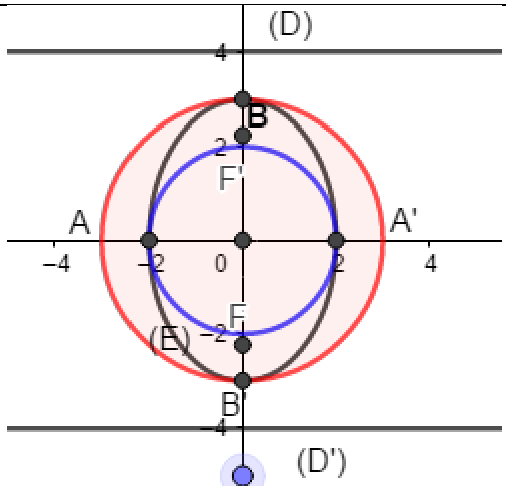
Lorsque le sommet est l'origine du repère on a le tableau ci-dessous :

équation	$\boldsymbol{y^2 = 2ax}$	$x^2 = 2ay$
paramètre	$\boldsymbol{\lvert a \rvert}$	$\lvert a \rvert$
sommet	$\boldsymbol{O}$	$\boldsymbol{O}$
Axe focal	$\boldsymbol{(O, \vec{\imath})}$	$\boldsymbol{(O, \vec{\jmath})}$
foyer	$\boldsymbol{F(\frac{a}{2}; 0)}$	$\boldsymbol{F(0; \frac{a}{2})}$
directrice	$\boldsymbol{(\mathcal{D}): x = -\frac{a}{2}}$	$\boldsymbol{(\mathcal{D}): y = -\frac{a}{2}}$
courbe	 **a > 0**	 a > 0
	 **a < 0**	 a < 0

2) Eléments caractéristiques de l’ellipse

TABLEAU RECAPITULATIF DONNANT LES ELEMENTS CARACTERISTIQUES D’UNE ELLIPSE

Lorsque le centre est l’origine du repère on a le tableau ci-dessous :

Cas	$\boldsymbol{a > b}$	$\boldsymbol{a < b}$
équation	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
Demi - distance focale	$c=\sqrt{a^2-b^2}$	$c=\sqrt{b^2-a^2}$
excentricité	$e=\frac{c}{a}$	$e=\frac{c}{b}$
sommets	$A(a;0); A'(-a;0); B(0;b); B'(0;-b)$	*Ce sont les mêmes*
axes	Axe focal $AA')$ Grand axe (AA') Petit axe (BB')	Axe focal (BB') Grand axe (BB') Petit axe (AA')
foyers	$F(c:0);\ \ F'(-c;0)$	$F(0;c);\ \ F'(0;-c)$
directrices	$(\mathcal{D}): x=\frac{a^2}{c};\ \ (\mathcal{D}'): x=-\frac{a^2}{c}$	$(\mathcal{D}): y=\frac{b^2}{c}; (\mathcal{D}): y=-\frac{b^2}{c}$
Courbes remarquables	Cercle principal $\mathcal{C}(O;a)$ Cercle secondaire $\mathcal{C}(O;b)$	Cercle principal $\mathcal{C}(O;b)$ Cercle secondaire $\mathcal{C}(O;a)$
courbes		

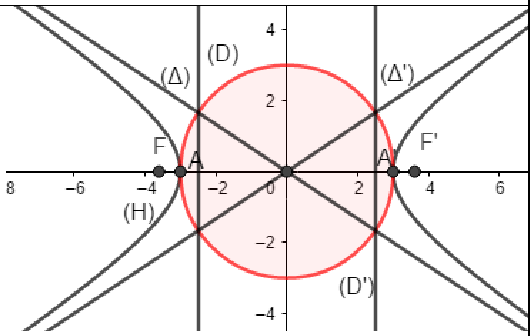
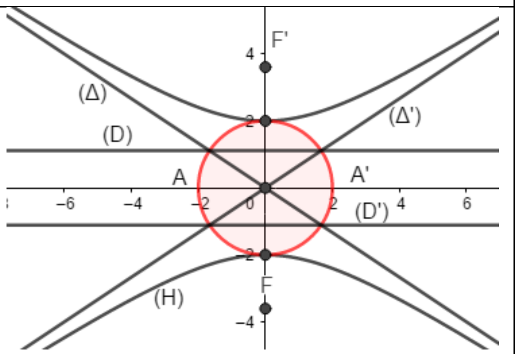
Remarque

Lorsque $a=b$, l’ellipse (Γ) est le cercle de centre O et de rayon a.

3) Eléments caractéristiques de l’hyperbole

TABLEAU RECAPITULATIF DONNANT LES ELEMENTS CARACTERISTIQUES D'UNE HYPERBOLE

Lorsque le centre est l'origine du repère on a le tableau ci-dessous :

Equation réduite	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Demi-distance focale	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
excentricité	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{b}$
sommets	$A(a;0); A'(-a;0)$	$B(0;b); B'(0;-b)$
Axe focal	(AA')	(BB')
foyers	$F(c;0);\quad F'(-c;0)$	$F(0;c);\quad F'(0;-c)$
directrice	$(\mathcal{D}): x = \frac{a^2}{c};\ (\mathcal{D}'): x = -\frac{a^2}{c}$	$(\mathcal{D}): y = \frac{b^2}{c}; (\mathcal{D}'): y = -\frac{b^2}{c}$
asymptote	$(\Delta): y = \frac{b}{a}x; (\Delta'): \mathrm{y} = -\frac{b}{a}x$	Ce sont les mêmes
courbes		

Remarque

Si $a = b$ alors l'hyperbole est dite équilatère.

C - SITUATION COMPLEXE

Monsieur Coulibaly veut construire une piscine près du mur de son jardin non loin d'une pompe à eau. Par soucis d'espace, il veut que la distance de chaque position du bord de la piscine à la pompe soit la moitié de la distance de ce bord au mur de la maison.

Il parle de son projet à un ami, professeur de mathématiques, qui décide de lui donner un coup de main.

Ce dernier, après observation de l'espace, définit un repère orthonormé (O, I, J), d'unité 2 m dans le jardin, considère la position de la pompe à eau comme un point F et le mur comme une droite (D). Après quelques calculs il réalise que les coordonnées des points du bord de la piscine vérifie la relation suivante: $3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0$.

Etant appelé à la maison pour une urgence, il remet le résultat de ses analyses à monsieur Coulibaly. Ne pouvant pas rendre opérationnel cette aide, Monsieur Coulibaly demande à son fils qui est en terminale C de le faire.

Le fils te sollicite pour représenter avec lui la piscine de son père.

Utilise les outils mathématiques au programme pour aider le fils de monsieur Coulibaly à réaliser ce schéma.

Solution

- Nous allons utiliser les coniques pour réaliser ce schéma.
- Nous allons déterminer une équation réduite de la conique d'équation: $3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0$, dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique :$2cm$.

On a : $3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow 3(x+1)^2 + 4y^2 = 12 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ est l'équation réduite d'une ellipse.

- Nous allons déterminer dans le repère (O, I, J) les coordonnées du centre Ω de l'ellipse, les foyers F et F', les sommets A et A'situés sur l'axe focal, B et B' les autres sommets.

On a : $\begin{cases} x+1=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$ donc $\Omega(-1; 0)$

$a^2 = 4$ et $b^2 = 3$ donc $a = 2, b = \sqrt{3}$ $c = \sqrt{4-3} = 1$

L'axe focal est (ΩI) car $a > b$.

Dans le repère (Ω, I, J), on : $F(1; 0)$, $F'(-1; 0)$, $A(2; 0)$, $A'(-2; 0)$, $B(0; \sqrt{3})$ et $B'(0; -\sqrt{3})$.

Soit $M(X; Y)$ dans (Ω, I, J) et $M(x; y)$ dans (O, I, J), on a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$, alors $\begin{cases} x = -1 + X \\ y = Y \end{cases}$

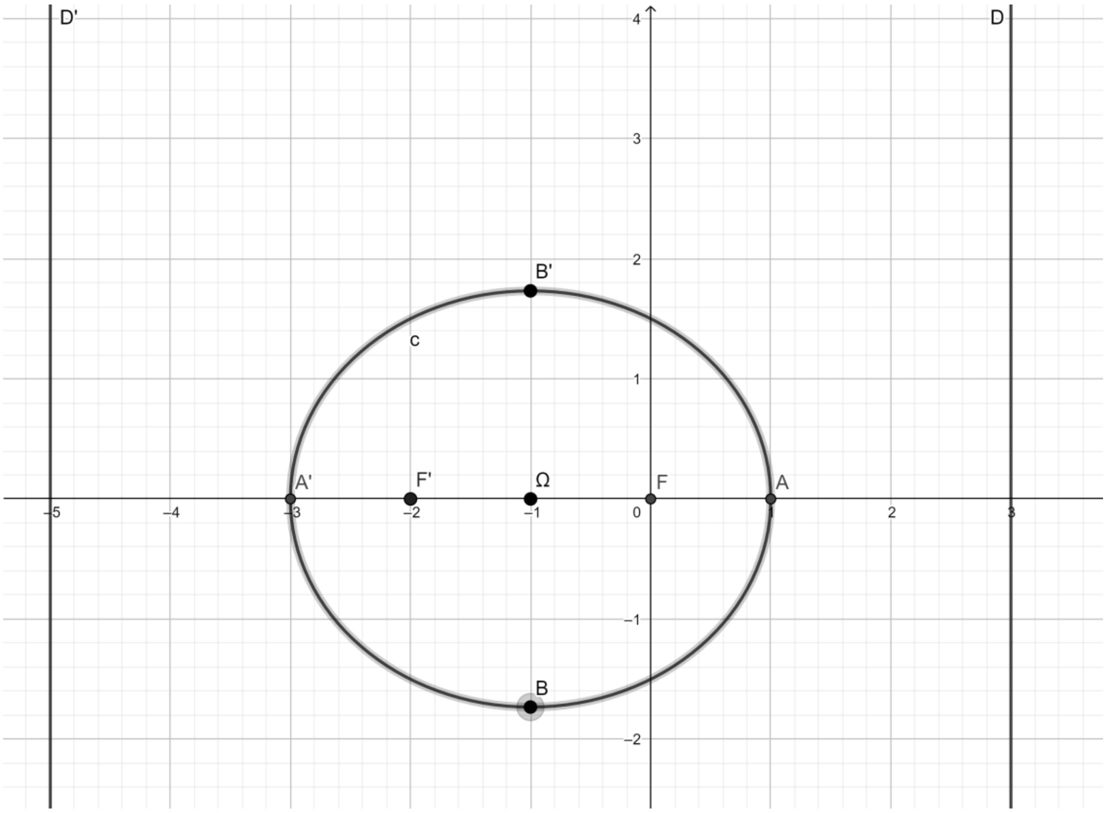
Donc dans (O, I, J), $A(1; 0)$; $A'(-3; 0)$; $B(-1; \sqrt{3})$; $B'(-1; -\sqrt{3})$; $F(0; 0)$ et $F'(-2; 0)$

- Nous allons déterminer une équation des droites (D) et (D').

Dans le repère (Ω, I, J), on : $(D): x = 4$ et $(D'): x = -4$

Dans le repère (O, I, J), on : $(D): x = 3$ et $(D'): x = -5$

- le schéma du bord de la piscine à l'échelle $\frac{1}{100}$ est réalisé par la construction de l'ellipse d'équation réduite : $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ dans un repère orthonormé(O, I, J). Unité graphique : $2cm$.



D - EXERCICES

1. EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

Le plan est muni du repère$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Dans chacun des cas suivants, détermine le sommet, l'axe focal et le foyer de la parabole d'équation :

1) $2y^2 + 3x = 0$
2) $x^2 - 2x = -3y - 1$

Solution

1) $2y^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow y^2 = -\frac{3}{2}x$, avec $a = -\frac{3}{4}$

   Le sommet de la parabole est O, l'axe focal est l'axe $(O,\vec{\imath})$ et le foyer est $F(-\frac{3}{8},0)$

2) $x^2 - 2x = -3y - 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = -3y$, avec $a = -\frac{3}{2}$

   Le sommet de la parabole est $S(1;0)$, l'axe focal est l'axe $(S,\vec{\jmath})$.

   Dans le repère $(S,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on a : le foyer des $F(0;-\frac{3}{4})$

   Soit $M(X;Y)$ dans $(S,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $M(x;y)$ dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$, alors $\begin{cases} x = 1 + X \\ y = Y \end{cases}$

   En remplaçant X par 0 et Y par $-\frac{3}{4}$ on obtient dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $F(1;-\frac{3}{4})$.

Exercice 2

Le plan est muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Dans chacun des cas suivants, donne la nature de la conique (Γ), le centre, l'axe focal et les foyers de la conique d'équation :

1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$
2) $-\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

Solution

1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

   (Γ) est une ellipse de centre O.

   $a = 3$ et $b = 4$, comme a<b alors l'axe focal est $(O, \vec{\jmath})$.

   $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{7}$ donc les foyers sont : $F(0; \sqrt{7})$et $F'(0; -\sqrt{7})$

2) $-\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

   (Γ) est une hyperbole de centre $\Omega(1; -2)$, d'axe focal l'axe $(\Omega, \vec{\jmath})$.

   $a = 2$ et $b = 3$, donc $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$.

   Dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a : les foyers $F(0; \sqrt{13})$ et $F'(0; -\sqrt{13})$

   Soit $M(X; Y)$ dans $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $M(x; y)$ dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$, alors

   $\begin{cases} x = 1 + X \\ y = -2 + Y \end{cases}$

   En remplaçant X par 0 et Y par $\sqrt{13}$, on obtient dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $F(1; -2 + \sqrt{3})$.

   En remplaçant X par 0 et Y par $-\sqrt{13}$, on obtient dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $F'(1; -2 - \sqrt{3})$.

2. <u>EXERCICES DE RENFORCEMENT</u>

Exercice 3

Le plan est muni du repère$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Détermine une équation de la parabole (Γ) dans chacun des cas suivants :
1) De foyer $F(3; 2)$ et de directrice la droite (D) d'équation $x = 1$.
2) De foyer $F(1; 4)$ et de directrice la droite (D) d'équation $y = 2$

Solution

1) Soit K le projeté orthogonal de F sur (D).
   On a : $K(1; 2)$ et $KF = 2 = a$.
   $S(2; 2)$ le milieu de $[FK]$ est le sommet de la parabole.
   Dans le repère $(S, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, une équation de la parabole est : $Y^2 = 2 \times aX$ d'où $Y^2 = 4X$

Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, une équation de la parabole est : $(y-2)^2 = 4(x-2)$

2) Soit K le projeté orthogonal de F sur (D).
On a : $K(1;2)$ et $KF = 2 = a$.
$S(1;3)$ le milieu de $[FK]$ est le sommet de la parabole.
Dans le repère $(S, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, une équation de la parabole est : $X^2 = 2 \times aY$ d'où $X^2 = 4Y$
Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, une équation de la parabole est : $(x-1)^2 = 4(y-3)$

Exercice 4

Le plan est muni du repère$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

(Γ) est une conique à centre de foyer F de directrice associée (D) et d'excentricité e:

Dans chacun des cas suivants, détermine une équation de (Γ).
1) $F(1;0)$; (D) : $x = 10$; $e = \frac{4}{5}$

2) $F(4;-1)$ (D) : y = 0 ; $e = 3$.

Solution

1) $F(1;0)$; (D) : $x = 10$; $e = \frac{4}{5}$

$e < 1$ donc (Γ) est une ellipse.

L'axe focal a pour direction l'axe $(O, \vec{\imath})$

Soit K le projeté orthogonal de F sur (D).

On a : $K(10;0)$.

$A = bar\left\{(F,1);(K,\frac{4}{5})\right\} = bar\{(F,5);(K,4)\}$; donc $A(5;0)$

$A' = bar\left\{(F,1);(K,-\frac{4}{5})\right\} = bar\{(F,5);(K,-4)\}$; donc $A'(-35;0)$

$AA' = 20 = 2a$ donc $a = 10$.

$S(-15;0)$ le milieu de $[AA']$ est le centre de l'ellipse.

L'axe focale est l'axe $(S, \vec{\imath})$ alors $e = \frac{c}{a}$ donc $c = ae = 8$

$c^2 = a^2 - b^2$ donc $b^2 = a^2 - c^2 = 36$.

Dans le repère$(S, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, une équation de l'ellipse est : $\frac{(X)^2}{100} + \frac{Y^2}{36} = 1$.

Dans le repère$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, une équation de l'ellipse est : $\frac{(x+15)^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$.

2) $F(4;-1)$ (D) : y = 0 ; $e = 3$

$e > 1$ donc (Γ) est une hyperbole.

L'axe focal a pour direction l'axe $(O, \vec{\jmath})$

Soit K le projeté orthogonal de F sur (D).

On a : $K(4;0)$.

$B = bar\{(F,1);(K,3)\}$; donc $B(4;-\frac{1}{4})$

$B' = bar\{(F,1);(K,-3)\}$; donc $B'(4;\frac{1}{2})$

$BB' = \frac{3}{4} = 2b$ donc $b = \frac{3}{8}$.

$S(4;\frac{1}{8})$ le milieu de $[BB']$ est le centre de l'hyperbole

L'axe focale est l'axe $(S, \vec{j})$ alors $e = \frac{c}{b}$ donc $c = be = \frac{9}{8}$

$c^2 = a^2 + b^2$ donc $a^2 = c^2 - b^2 = \frac{9}{8}$

Dans le repère $(S, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, une équation de l'hyperbole est : $-\frac{(X)^2}{\frac{9}{8}} + \frac{Y^2}{\frac{9}{64}} = 1$

Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, une équation de l'hyperbole est :$-\frac{(x-4)^2}{\frac{9}{8}} + \frac{(y-\frac{1}{8})^2}{\frac{9}{64}} = 1$

3. EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 5

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{H})$ d'équation : $3x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0$
2) a) Démontrer que les points $A; M$ et M' d'affixes respectives 1 ; z et z^4 sont alignés si et seulement si $1 + z + z^2 + z^3$ est un nombre réel

   b) En déduire l'ensemble points tels que $M(x;y)$

Solution

1) $3x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow -\frac{(x+\frac{1}{3})^2}{\frac{2}{9}} + \frac{y^2}{\frac{2}{3}} = 1$

$(\mathcal{H})$ est une hyperbole de centre $\Omega(-\frac{1}{3};0)$, d'axe focal $(\Omega, \vec{e}_2)$

on a : $a^2 = \frac{2}{9}$ et $b^2 = \frac{2}{3}$ donc $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{8}{9}$

l'excentricité $e = \frac{c}{b} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

<u>Dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$</u> :

Sommets situés sur l'axe focal : $B(0;\sqrt{\frac{2}{3}})$et $B'(0;-\sqrt{\frac{2}{3}})$

Foyers : $F(0;\frac{\sqrt{8}}{3})$ et $F'(0;-\frac{\sqrt{8}}{3})$

Directrices : $(D) : Y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $(D') : Y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Asymptote : $(\Delta) : Y = \sqrt{3}X$ et $(\Delta') : Y = -\sqrt{3}X$

Dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}})$:

Sommets situés sur l'axe focal : $B(-\frac{1}{3}; \sqrt{\frac{2}{3}})$ et $B'(-\frac{1}{3}; -\sqrt{\frac{2}{3}})$

Foyers : $F(-\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{8}}{3})$ et $F'(-\frac{1}{3}; -\frac{\sqrt{8}}{3})$

Directrices : $(D) : y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $(D') : y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Asymptote : $(\Delta) : y = \sqrt{3}(x + \frac{1}{3})$ et $(\Delta') : y = -\sqrt{3}(x + \frac{1}{3})$

2) a) $A; M$ et M' sont alignés $\Leftrightarrow \frac{z^4-1}{z-1}$ est un nombre réel$\Leftrightarrow 1 + z + z^2 + z^3$ est un nombre réel

b) L'ensemble de tels points M

on pose $z = x + iy$

On a : $1 + z + z^2 + z^3 = 1 + x + yi + (x + yi)^2 + (x + yi)^3$

$$= (1 + x + x^2 - y + x^3 - 3xy^2) + y(3x^2 - y^2 + 2x + 1)i$$

$1 + z + z^2 + z^3$ est un nombre réel$\Leftrightarrow y(3x^2 - y^2 + 2x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } 3x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0$$

L'ensemble de tels points M est la réunion de l'axe $(O, \vec{e}_1)$ et de l'hyperbole $(\mathcal{H})$

E -DOCUMENTS

Collection Inter Africain de Mathématiques (CIAM) TERMINALE SM