

Niveau : TC

MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE



THEME : Fonctions Numériques

DUREE : 06 Heures

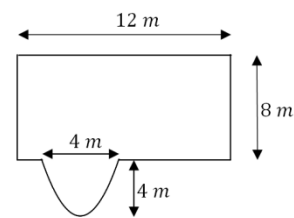
CODE :

Leçon 4 : PRIMITIVES

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Le ministère a entrepris la construction d'une piscine dans l'enceinte d'un lycée d'excellence. L'entreprise chargée de l'ouvrage a affiché une image accompagnée d'un schéma de ce que sera cette piscine (voir image ci-contre).

Rimon élève de TA1 et amateur de natation, veut comparer la taille de la piscine de son lycée à celle du lycée professionnel de la ville. Il tente de calculer son aire mais n'y arrive pas. Il pose le problème à ses camarades de classe qui décident de l'aider à déterminer l'aire totale de la piscine en construction.



B. CONTENU DE LA LEÇON

I. Notion de primitive

1. Définition

f est une fonction définie sur un intervalle I . On appelle **primitive** de f sur I , toute fonction F dérivable sur I telle que f soit la dérivée de F .

Remarque

A partir de la définition, on peut écrire : **pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.**

Exemple

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 3x^2 + 1$.

Une primitive de f sur \mathbb{R} est la fonction F telle que : $F(x) = x^3 + x - 9$,

En effet : F est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 3x^2 + 1 = f(x)$.

EXERCICE DE FIXATION

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x + 5$.

On donne les fonctions F, G, H dérivables sur \mathbb{R} , la fonction P dérivable sur \mathbb{R}^* et définies respectivement par :

$$F(x) = x^2; \quad G(x) = x^2 + 5x - 7; \quad H(x) = x^2 + 5x; \quad P(x) = x^2 + 5x + \frac{1}{x}$$

Parmi les fonctions F, G, H et P , cite celles qui sont des primitives de f sur \mathbb{R}

Solution

On vérifie que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = f(x)$ et $H'(x) = f(x)$.

Donc G et H sont des primitives de f sur \mathbb{R} .

2 . Propriétés

Propriété1 : Condition d'existence d'une primitive

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I .

EXERCICE DE FIXATION

Soient f, g, h et u les fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définies respectivement par :

$$f(x) = x^3 - 1; \quad g(x) = \frac{1}{x}; \quad h(x) = \sqrt{x}; \quad u(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Entoure celles qui admettent des primitives sur \mathbb{R} .

Solution

On entoure f et u , car ces deux fonctions sont continues sur \mathbb{R} .

Propriété2 : Ensemble des primitives d'une fonction

Soit une fonction f continue, admettant une primitive F sur un intervalle I .

Toute primitive de f sur I est de la forme : $x \mapsto F(x) + c$, où c est un élément de \mathbb{R} .

Conséquence : toute fonction continue admet une infinité de primitives.

EXERCICES DE FIXATION

Exercice1

Soient f et F les fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} et définies par : $f(x) = x^2 - x$ et $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$

Vérifie que F est une primitive de f sur \mathbb{R} , puis trouve deux autres primitives G et H de f sur \mathbb{R} .

Solution

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$. Donc, F est une primitive de f sur \mathbb{R} .

Toutes les primitives de f sont de la forme : $x \mapsto F(x) + c$, avec $c \in \mathbb{R}$

Deux autres primitives de f sur \mathbb{R} sont les fonctions G et H définies respectivement par :

$$G(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 29 \quad \text{et} \quad H(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 546.$$

Exercice2

Détermine les primitives sur $]0; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Solution

Les primitives sur $]0; +\infty[$ de f sont les fonctions : $x \mapsto \frac{1}{x} + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

Propriété3 : La primitive d'une fonction vérifiant une condition initiale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , x_0 un élément de I et y_0 un nombre réel .

Il existe une primitive de f sur I et une seule qui prend la valeur y_0 en x_0 .

EXERCICE DE FIXATION

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = 2x - 1$.

On suppose que la fonction G définie par $G(x) = x^2 - x$ est une primitive de g sur \mathbb{R}

. Détermine la primitive H de g qui prend la valeur 5 en -1

Solution

La primitive cherchée H est de la forme $H(x) = G(x) + c = x^2 - x + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

Cherchons c :

$$H(-1) = 5 \Leftrightarrow (-1)^2 - (-1) + c = 5 . \text{ D'où : } c = 3$$

$$\text{Donc : } H(x) = x^2 - x + 3.$$

II. Détermination d'une primitive

1. Primitives de fonctions usuelles

Fonction f	Primitives de f ($c \in \mathbb{R}$)	Sur l'intervalle
$x \mapsto a$ ($a \in \mathbb{R}$)	$x \mapsto ax + c$	\mathbb{R}
$x \mapsto x^r$ ($r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$)	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$	$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*$ ou \mathbb{R}_-^*
$x \mapsto \frac{1}{x^r}$ ($r \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$)	$x \mapsto \frac{-1}{(r-1)x^{r-1}} + c$	\mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^*
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$	\mathbb{R}_+^*
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c$	\mathbb{R}
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + c$	\mathbb{R}

$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \mapsto \tan x + c$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cotan^2 x$	$x \mapsto -\cotan x + c$	$]k\pi; \pi + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$

EXERCICE DE FIXATION

Dans chacun des cas suivants, détermine toutes les primitives sur $]0; +\infty[$ de la fonction f

a. $f(x) = x^3$ b. $f(x) = \frac{1}{x^5}$ c. $f(x) = x^{2/3}$

Solution

a. $x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + c$ ($c \in \mathbb{R}$) b. $x \mapsto -\frac{1}{4x^4} + c$ ($c \in \mathbb{R}$) c. $x \mapsto -3x^{-\frac{1}{3}} + c$ ($c \in \mathbb{R}$)

2. Opérations et compositions

Propriété 1

Soient u et v deux fonctions admettant respectivement pour primitives sur un intervalle I les fonctions U et V. k est un nombre réel.

- $U + V$ est une primitive sur I de la fonction $u + v$.
- kU est une primitive sur I de la fonction ku .

EXERCICE DE FIXATION

Dans chacun des cas suivants, détermine toutes les primitives sur \mathbb{R} de la fonction f.

a. $f(x) = x + \sin x$ b. $f(x) = \sin x + \cos x$ c. $f(x) = 8x^2 + 5x - 9$

Solution

a. $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \cos x + c$ ($c \in \mathbb{R}$)
b. $x \mapsto -\cos x + \sin x + c$ ($c \in \mathbb{R}$)
c. $x \mapsto \frac{8}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 9x + c$ ($c \in \mathbb{R}$)

Propriété 2

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle contenant u(I).

Une primitive sur I de la fonction $u' \times (v' \circ u)$ est la fonction $v \circ u$.

On en déduit le tableau suivant :

Fonction f	Une primitive F de f sur I	Conditions
$u^r u'$ ($r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$)	$\frac{1}{r+1} u^{r+1}$	$u > 0$ sur I

$\frac{u'}{u^r} \quad (r \in \mathbb{Q} \setminus \{1\})$	$\frac{-1}{(r-1)u^{r-1}}$	$u > 0 \text{ sur } I$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0 \text{ sur } I$
$u' \cos u$	$\sin u$	
$x \mapsto \cos(ax + b)$	$x \mapsto \frac{1}{a} \sin(ax + b)$	$a \neq 0$
$u' \sin u$	$-\cos u$	
$x \mapsto \sin(ax + b)$	$x \mapsto -\frac{1}{a} \cos(ax + b)$	$a \neq 0$

EXERCICES DE FIXATION

Exercice1

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive F sur $]0; +\infty[$ de la fonction f .

a. $f(x) = 3 \sin 2x$ b. $f(x) = 2\sqrt{2x+1}$; c. $f(x) = \frac{3}{(3x+5)^2}$

Solution

a. $F(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) = -\frac{3}{2} \cos 2x$

b. $f(x) = 2(2x+1)^{\frac{1}{2}}$. Donc $F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (2x+1)^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}}$.

c. $F(x) = -\frac{1}{(2-1)(3x+5)^{2-1}} = -\frac{1}{3x+5}$.

Exercice2

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive H sur \mathbb{R} de la fonction h .

a. $h(x) = (2x+1)(x^2+x+6)^3$ b. $h(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x+3)^4}$ c. $h(x) = \sin x \cos^5 x$

d. $h(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

Solution

a. $h(x) = u'(x) \times (u(x))^3$; avec $u(x) = x^2 + x + 6$, donc $H(x) = \frac{1}{4} (x^2 + x + 6)^4$

b. $h(x) = \frac{u'(x)}{(u(x))^4}$; avec $u(x) = x^2 + 3x + 3$, donc $H(x) = -\frac{1}{3(x^2+3x+3)^3}$

c. $h(x) = -u'(x) \times (u(x))^5$; avec $u(x) = \cos(x)$, donc $H(x) = -\frac{1}{6} \cos^6 x$.

d. $h(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$; avec $u(x) = x^2 + x + 1$, donc $H(x) = 2\sqrt{x^2 + x + 1}$.

C. SITUATION COMPLEXE

Le car loué par le lycée pour sa colonie de vacances doit effectuer un trajet de 1500 km. Lorsque ce car roule à la vitesse moyenne v , exprimée en km/h, la dérivée de sa consommation $C(v)$, exprimée en litres pour 100 km, selon les études d'un expert sur ce type de véhicule, est donnée par la relation : $C'(v) = \frac{-300}{v^2} + \frac{1}{3}$. Une information complémentaire fournie par le chauffeur au moment de la location du car est qu'il consomme 25 litres au 100 pour une vitesse moyenne de 60 km/h.

Le salaire horaire du chauffeur est de 900 F CFA et le litre de gasoil coûte 600 F CFA. Les organisateurs de la colonie veulent déterminer la vitesse moyenne à laquelle le chauffeur doit rouler pour minimiser le coût total du voyage. Ils te sollicitent pour leur venir en aide. Propose - leur une solution argumentée basée sur tes connaissances mathématiques.

Solution

- Pour répondre à la préoccupation des organisateurs du voyage, nous utilisons les primitives.
- Nous allons déterminer le coût total du voyage

Modélisation

• Détermination de C

De la relation $C'(v) = \frac{-300}{v^2} + \frac{1}{3}$, on obtient : $C(v) = \frac{300}{v} + \frac{v}{3} + k$. Le car consomme 25 litres au 100 pour une vitesse moyenne de 60 km/h, d'où : $C(60) = 25$. Or $C(60) = \frac{300}{60} + \frac{60}{3} + k = 25 + k$, donc k est nul. La formule donnant la consommation en litres pour 100 km est : $C(v) = \frac{300}{v} + \frac{v}{3}$.

• Détermination du coût total du voyage.

Ce coût total $P(v)$ dépend de la vitesse v .

La durée du trajet de 1500 km à la vitesse v , est $t = \frac{1500}{v}$.

Le salaire du chauffeur sera donc $900 \times \frac{1500}{v} = \frac{1350000}{v}$.

La consommation en litres pour 1500 km ($1500 = 15 \times 100$) sera de $15C(v) = 15\left(\frac{300}{v} + \frac{v}{3}\right)$

Comme le litre coûte 600FCFA, alors le coût du carburant sera de : $600 \times 15\left(\frac{300}{v} + \frac{v}{3}\right)$

$= 9000\left(\frac{300}{v} + \frac{v}{3}\right)$.

$P(v) = \frac{4050000}{v} + 3000v$.

• Calcul de la vitesse qui minimise le coût total du voyage (résolution du modèle)

Pour minimiser le coût total du trajet, il faut étudier les variations de la fonction P .

Etudier les variations de la fonction P revient à étudier le signe de sa dérivée.

P est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$P'(v) = \frac{-4050000}{v^2} + 3000$$

$$P'(v) = 0 \Leftrightarrow v = \sqrt{1350} \simeq 37, \text{ car } v \geq 0$$

v	0	$\sqrt{1350}$	$+\infty$
$P'(v)$	-	0	+
$P(v)$			

$$m = P(\sqrt{1350}) \simeq 220500$$

➤ **conclusion**

Pour minimiser le coût total du voyage, le chauffeur doit rouler à une vitesse moyenne de 37 km/h. L'organisation de cette colonie leur coûterait alors 220 500 FCFA.

D. EXERCICES

1. Exercices d'application

Exercice1

Réponds par VRAI (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes

N°	AFFIRMATIONS	REPONSES
1.	Une primitive sur \mathbb{R} de la fonction définie par : $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ est la fonction définie par : $F(x) = x^3 - 2x^2 + x - \pi$	
2.	La primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction définie par $p(x) = x - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ qui prend la valeur $-\frac{1}{2}$ en 1 est la fonction définie par $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + 1$	
3.	Une primitive sur un intervalle I de la fonction $u'v + uv'$ est la fonction $u \times v$	

Solution

1. V 2. F 3. V

Exercice2

Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives sur I de la fonction f.

- $f(x) = \frac{1}{(2x+5)^2}$; $I =]-\frac{5}{2}; +\infty[$
- $f(x) = (3x + 2)(3x^2 + 4x + 7)^3$; $I = \mathbb{R}$

$$3. f(x) = \frac{4x^3}{\sqrt{x^4+1}} ; I = \mathbb{R}_+$$

solution

$$1. \forall x \in \left] -\frac{5}{2}; +\infty \right[, f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{(2x+5)^2} .$$

Donc, les primitives sur $\left] -\frac{5}{2}; +\infty \right[$ de f sont de la forme : $x \mapsto -\frac{1}{2(2x+5)} + c$ ($c \in \mathbb{R}$).

$$2. \forall x \in \mathbb{R} , f(x) = \frac{1}{2}(6x+4)(3x^2+4x+7)^3 .$$

Donc, les primitives sur \mathbb{R} de f sont de la forme : $x \mapsto \frac{1}{8}(3x^2+4x+7)^4 + c$ ($c \in \mathbb{R}$).

3. Les primitives sur \mathbb{R}_+ de f sont de la forme : $x \mapsto 2\sqrt{x^4+1} + c$ ($c \in \mathbb{R}$).

Exercice3

On donne les fonctions f et F définies sur $]0; +\infty[$ respectivement, par :

$$f(x) = x(5\sqrt{x} + 4) \text{ et } F(x) = 2x^2(\sqrt{x} + 1)$$

Démontre que F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

Exercice4

Dans chacun des cas suivants détermine les primitives sur I de la fonction f .

$$1. f(x) = \frac{2x^6-3x+8}{2x^4} , I =]0; +\infty[$$

$$2. f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-9}} ; I =]3; +\infty[$$

$$3. f(x) = (x-1)(x^2-2x+5)^3 ; I = \mathbb{R}$$

$$4. f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) , I = \mathbb{R}$$

2. Exercices de renforcement

Exercice5

On considère les fonctions f et F définies sur $\left] -\infty; \frac{3}{2} \right[$ respectivement par :

$$f(x) = x\sqrt{3-2x} \text{ et } F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x} , \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

Détermine a, b et c pour que F soit une primitive de f sur $\left] -\infty; \frac{3}{2} \right[$.

Réponse

On a : $\forall x \in \left] -\infty; \frac{3}{2} \right[, F'(x) = f(x)$.

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow (2ax + b)\sqrt{3-2x} - \frac{ax^2 + bx + c}{\sqrt{3-2x}} = x\sqrt{3-2x}$$

$$\Leftrightarrow -5ax^2 + (6a - 3b)x + 3b - c = -2x^2 + 3x.$$

$$\text{Par identification : } \begin{cases} -5a = -2 \\ 6a - 3b = 3 \\ 3b - c = 0 \end{cases}$$

On obtient : $a = \frac{2}{5}$, $b = -\frac{1}{5}$ et $c = -\frac{3}{5}$.

Exercice6

On donne les fonctions f et h définies sur \mathbb{R} respectivement par :

$$f(x) = \frac{-x^3+2x^2+2}{x^2+1} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{x^4+3x^2-4x}{(x^2+1)^2}$$

1. Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R} , h(x) = -f'(x) - \frac{4x}{(x^2+1)^2}$.
2. Détermine la primitive H de h sur \mathbb{R} , qui prend la valeur 2 en 0.

Réponse

$$1. \quad \forall x \in \mathbb{R} , f'(x) = \frac{-x^4-3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^4-3x^2+4x-4x}{(x^2+1)^2} = -\frac{x^4+3x^2-4x}{(x^2+1)^2} - \frac{4x}{(x^2+1)^2} = -h(x) - \frac{4x}{(x^2+1)^2} .$$

$$\text{Donc : } h(x) = -f'(x) - \frac{4x}{(x^2+1)^2} .$$

$$2. \quad \text{On a : } \forall x \in \mathbb{R} , h(x) = -f'(x) - 2 \times \frac{2x}{(x^2+1)^2} .$$

La primitive cherchée H est de la forme: $H(x) = -f(x) + \frac{2}{x^2+1} + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

$$H(0) = -f(0) + 2 + c = 2. \quad \text{Alors : } c = f(0) = 2.$$

$$\text{Donc : } \forall x \in \mathbb{R} , H(x) = -f(x) + \frac{2}{x^2+1} + 2 .$$

Exercice7

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} , par : $f(x) = x \cos x$.

1. Calcule la dérivée de la fonction g définie sur \mathbb{R} , par : $g(x) = x \sin x$.
2. Déduis-en une primitive de f sur \mathbb{R} .

Exercice8

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

$$1. \quad f(x) = \frac{x \sin x + \cos x}{x^2} \quad 2. \quad f(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2}$$

Exercice9

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive F sur I de la fonction f .

1. $f(x) = \frac{-3x+1}{(3x^2-2x-1)^4}$; $I =]1; +\infty[$
2. $f(x) = \sin 7x \cos^3 7x$; $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = (3 - 2x) \sin(x^2 - 3x + 1)$; $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{5}\right)$, $I = \mathbb{R}$
5. $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$, $I = \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$.
6. $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$, $I =]1; +\infty[$.

Exercice10

Soit la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, par : $f(x) = \frac{1}{1-\sin x}$.

1. Vérifie que : $\frac{1}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$.
2. Déduis-en les primitives de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice11

Sans linéariser l'expression $\cos^3 x \sin^3 x$, détermine une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $f: x \mapsto \cos^3 x \sin^3 x$.

3. Exercices d'approfondissement

Exercice12

1. Linéariser l'expression $\cos^4 x$.
2. Déduis-en les primitives sur \mathbb{R} de la fonction : $x \mapsto \cos^4 x$.

Réponse

1. $\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$
 $\cos^4 x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$
 $\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$
2. Les primitives sur \mathbb{R} de la fonction : $x \mapsto \cos^4 x$ sont les fonctions :
 $x \mapsto \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c \quad (c \in \mathbb{R}).$

Exercice13

Soit f la fonction définie sur $]2; +\infty[$, par : $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 8x + 8}{(x-2)^2}$.

1. Détermine trois nombres réels a, b et c tels que : $\forall x \in]2; +\infty[, f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$.
2. Déduis-en les primitives de f sur $]2; +\infty[$.

Réponse

1. A l'aide d'une division euclidienne, on obtient : $a = 1$, $b = 3$ et $c = -4$.
2. $\forall x \in]2; +\infty[, f(x) = x + 3 - \frac{4}{(x-2)^2}$

Les primitives de f sur $]2; +\infty[$ sont de la forme : $x \mapsto \frac{1}{3}x^2 + 3x + \frac{4}{x-2} + c \quad (c \in \mathbb{R})$.

Exercice14

On considère la fonction f définie sur $]\frac{1}{3}; +\infty[$, par : $f(x) = \sin^3 x - \frac{2}{(3x-1)^2}$.

Détermine les primitives de f sur $]\frac{1}{3}; +\infty[$.

Exercice15

On considère les fonctions h et g définies sur \mathbb{R} , par : $h(x) = \cos^2 x$ et $g(x) = \sin^2 x$.

1. Calcule $h(x) + g(x)$.
Déduis-en la primitive S de $h + g$ sur \mathbb{R} , qui s'annule en 0.

2. Détermine $h(x) - g(x)$.

Déduis-en la primitive D de $h - g$ sur \mathbb{R} , qui s'annule en 0.

3. On désigne par H et G des primitives respectives de h et g sur \mathbb{R} .

Déduis des questions précédentes H et G .

Exercice16

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, par : $h(x) = \frac{x}{(2x+1)^3}$.

1. Détermine les nombres réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}, h(x) = \frac{a}{(2x+1)^2} + \frac{b}{(2x+1)^3}$.

2. Déduis-en une primitive H de h sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.