SECONDAIRE
$T^{le}C$
MATHEMATIQUES

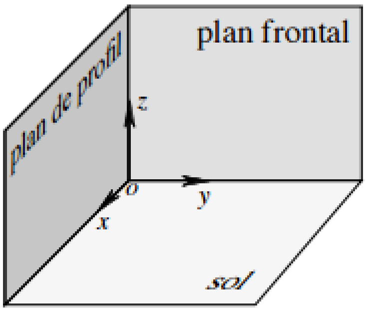
CÔTE D’IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

THEME : GÉOMÉTRIE DE L’ESPACE
Durée : 10 heures **CODE :**

LEÇON 6 : GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DE L’ESPACE

A. SITUATION D’APPRENTISSAGE

Des élèves de terminale du club architecture d'un lycée veulent concevoir la maquette de l’espace d’exposition de leurs travaux de fin d’année. Ils n’arrivent pas à positionner correctement les murs de cette maquette qui s'écroulent à chaque tentative.
Pour qu’elle reste stable, l’un des élèves suggère que les murs soient parallèles ou perpendiculaires. Pour cela, ils décident d'étudier les positions relatives de deux plans dans l'espace.



B. CONTENU DE LA LEÇON

Dans cette leçon, sauf indication contraire, l’espace $\mathcal{E}$ est muni d’un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

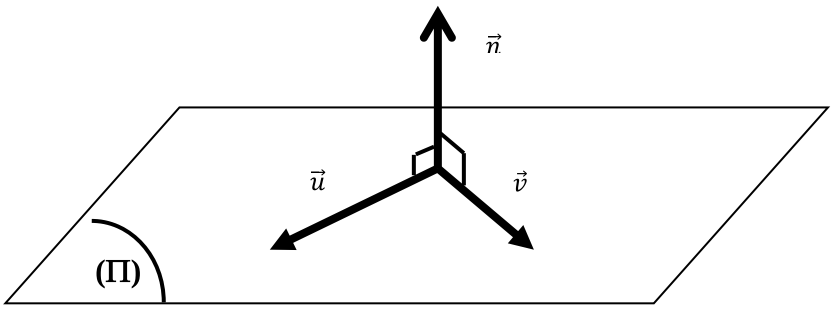
I. ÉQUATIONS CARTESIENNES D’UN PLAN

1. Vecteur normal à un plan

a) Définition

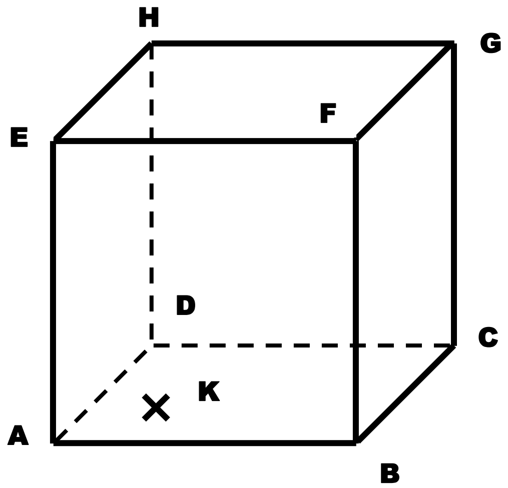
Soit (P) un plan de $\mathcal{E}$, de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

On appelle vecteur normal à (P), tout vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.



Exemple

ABCDEFGH est un cube et K un point du plan (ABC).



Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC}$ forment une base du plan (ABC). Le vecteur $\overrightarrow{DH}$ est orthogonale à $\overrightarrow{AD}$ et à $\overrightarrow{DC}$ donc le vecteur $\overrightarrow{DH}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b) Propriétés

- Soit A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace.
  Il existe un plan et un seul passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$
- Soit (P) un plan, $\vec{n}$ un vecteur normal à (P) et A un point de (P).

Pour tout point M de l'espace, on a : $M \in$ (P)$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$.

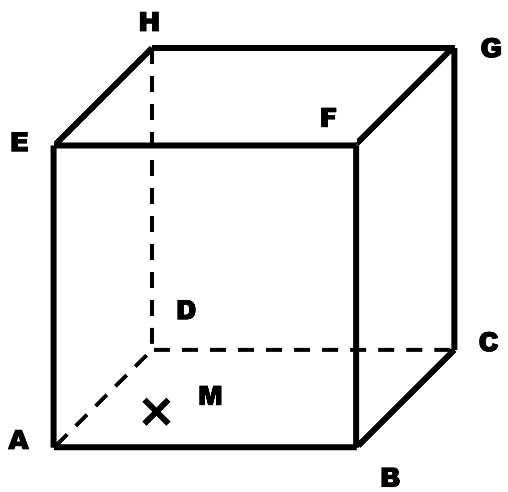
Remarques

Soit (P) et (P') deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ on a :

- (P) et (P') sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$sont colinéaires.
- (P) et (P') sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$sont orthogonaux.

Exercice de fixation

ABCDEFGH est un cube et M un point du plan (ABC).



1. Donne le plan passant par H et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

2. Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont orthogonaux.

Solution

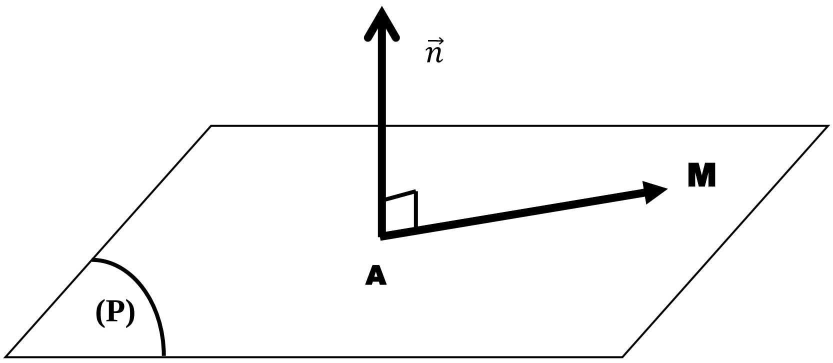
1.Le plan (ADE) est le plan passant par H et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

2.Le vecteur $\overrightarrow{BF}$ est un vecteur normal à (ABC). M $\in (ABC)$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont orthogonaux.

2. <u>Equations cartésiennes du plan</u>

a) Propriété

Soit *a, b, c et d* des nombres réels tels que : $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
Tout plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ a une équation cartésienne de la forme :
$ax + by + cz + d = 0$.
Toute équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne d'un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.



Exercice de fixation

Détermine une équation cartésienne du plan passant par l'origine du repère et de vecteur normal $\vec{n}(1, -2, -3)$.

Solution

Une équation cartésienne du plan est de la forme : $x - 2y - 3z + d = 0$

Comme le plan passe par l'origine du repère, alors $(0) - 2(0) - 3(0) + d = 0$. On en déduis que $d = 0$.

Ainsi, Une équation cartésienne du plan est : $x - 2y - 3z = 0$

Remarques

- Dans n'importe quel repère, même non orthonormé, tout plan admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ et toute équation de cette forme est l'équation cartésienne d'un plan lorsque *a*, *b* et *c* ne sont pas tous nuls. Mais, lorsque le repère n'est pas orthonormé, le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ n'est pas un vecteur normal au plan.
- Si $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne de (P), pour tout nombre réel *k* non nul,
$k(ax + by + cz + d) = 0$ est aussi une équation cartésienne de (P).

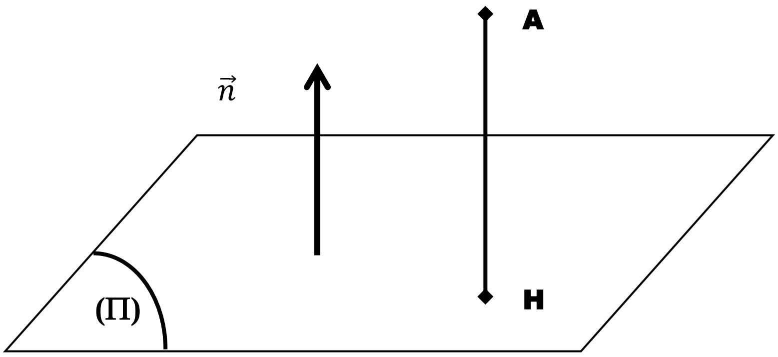
3. Distance d'un point à un plan

Propriété

Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathcal{E}$ et (P) le plan d'équation cartésienne

$ax + by + cz + d = 0.$

La distance du point A au plan (P) est : $d(A; P) = \frac{|ax_0+by_0+cz_{0+d}|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$



Exercice d'application

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit (P) le plan d'équation cartésienne : $2x - y + 3z + 5 = 0$ et $A(3; 2; 1)$ un point de l'espace $\mathcal{E}$

Détermine la distance du point *A* au plan (P).

Solution

La distance du point *A* au plan (P) est : $d(A; P) = \frac{|2\times3-1\times2+3\times1+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}} = \frac{6\sqrt{14}}{7}$.

II. REPRESENTATIONS PARAMETRIQUES D'UNE DROITE

Définition

L'espace est muni du repère$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit (D) la droite passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$.On dit que le système $\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb, \\ z = z_0 + tc \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de (D).

Remarque

Le choix de A et de $\vec{u}$ n'étant pas unique, une droite admet plusieurs représentations paramétriques.

Exercice de fixation

Détermine une représentation paramétrique de la droite (D) passant par : $A(2; 3; 0)$ et vecteur directeur $\vec{u}(-1; -1; 1)$.

Solution

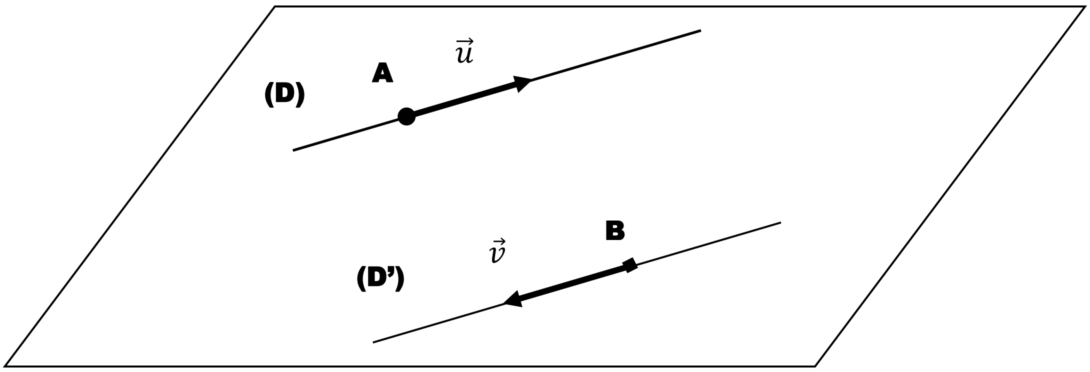
On a $(x_0, y_0, z_0) = (2; 3; 0)$ et $(a; b; c) = (-1; -1; 1)$, donc le système $\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \quad\ \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (D).

III. POSITIONS RELATIVES DE DROITES ET PLANS

1. Positions relatives de deux droites

(D) et (D') sont deux droites de l'espace, de repères respectives $(A, \vec{u})$ et $(B, \vec{v})$

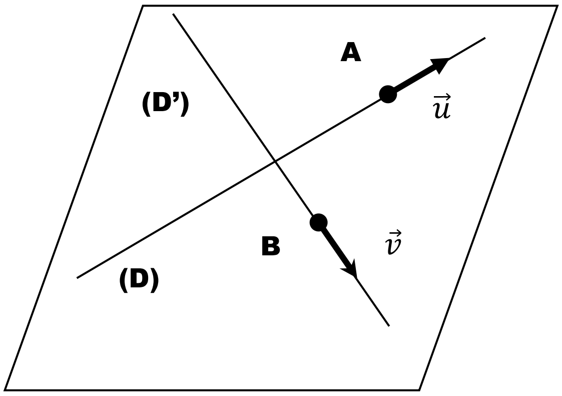
La droite (D) est parallèle à la droite (D') si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.



(D) et (D') sont parallèles

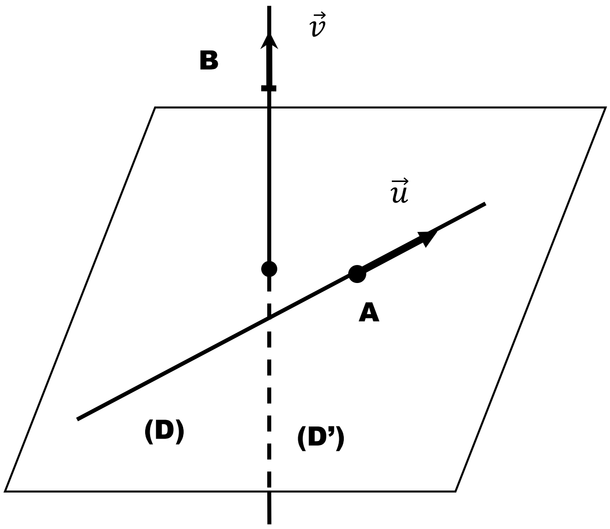
N.B :(D) = (D'), lorsque, de plus, $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires alors les droites (D) et (D') sont sécantes ou non coplanaires.



$\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires

(D) et (D') sont sécantes



$\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non coplanaires

(D) et (D') sont non coplanaires.

Remarque

Si $\vec{u}.\vec{v} = 0$ alors (D) et (D') sont orthogonales.

Exercice de fixation

Soit (*D*), (*D'*), (*D"*) les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R}), \begin{cases} x = 2\mu \\ y = 2 - 4\mu \\ z = 2 - 2\mu \end{cases} (\mu \in \mathbb{R}), \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2v \\ z = -1 + 4v \end{cases} (v \in \mathbb{R})$$

a) Démontre que les droites (*D*) et (*D"*) sont strictement parallèles.
b) Démontre que les droites (*D'*) et (*D"*) sont sécantes en un point A dont on calculera les coordonnées.
c) Démontre que les droites (*D*) et (*D'*) sont non coplanaires mais sont orthogonales.

Solution

a) Les vecteurs $\vec{u}(0;1;-2)$ et $\overrightarrow{u''}(0;-2;4)$ sont des vecteurs directeurs respectifs des droites (*D*) et (*D''*) . On a :$\overrightarrow{u''} = -2\vec{u}$ alors (*D*) et (*D''*) sont confondues ou strictement parallèles.
Or tout point de (*D*) a pour abscisse 3 et tout point de (*D''*) a pour abscisse 1.
Donc les droites (*D*) et (D'') sont strictement parallèles.
NB : Pour justifier que les deux droites ne sont pas confondues, on peut choisir un point de la droite (*D*) et vérifier que ce point n'appartient pas à (*D''*) puis conclure.

b) Les droites (*D'*) et (*D''*) ont pour vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u'}(2;-4;-2)$ et $\overrightarrow{u''}(0;-2;4)$.
Si $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{u''}$ sont colinéaires, alors il existe un nombre réel non nul k tel que : $\overrightarrow{u'} = \text{k}\overrightarrow{u''}$
C'est à dire que : $\begin{cases} 2 = 0 \\ -4 = -2k \\ -2 = 4k \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} 2 = 0 \\ k = 2 \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases}$ (absurde) donc les vecteurs $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{u''}$ ne sont pas colinéaires.
$\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{u''}$ sont non colinéaires, donc (*D'*) et (*D''*) sont sécantes ou non coplanaires.
(*D'*) et (*D''*) ont un point commun si et seulement s'il existe deux nombres réels et μ et v tel que : $\begin{cases} 2\mu = 1 \\ 2 - 4\mu = 1 - 2v \\ 2 - 2\mu = -1 + 4v \end{cases}$ Ce système admet un couple solution : $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$; Donc les droites sont sécantes en $\text{A}(1;0;1)$

c) Les droites (*D*) et (*D'*) ont pour vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u'}(2;-4;-2)$ et $\vec{u}(0;1;-2)$.

Ces vecteurs sont non colinéaires, donc (*D*) et (*D'*) sont sécantes ou non coplanaires.

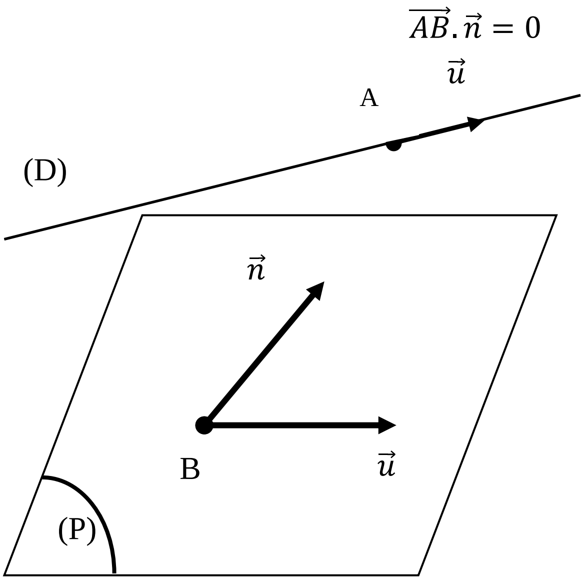
(D) et (D') ont un point commun si et seulement s'il existe deux nombres réels λ et μ tel que

$:\begin{cases} 3 = 2\mu \\ 1+\lambda = 2-4\mu \\ -2\lambda = 2-2\mu \end{cases}$. Ce système n'admet pas de solution, donc (D) et (D') sont non coplanaires.

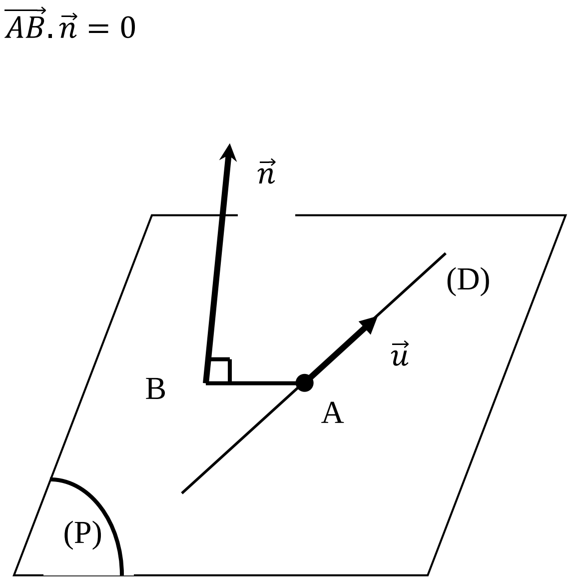
2. Positions relatives d'une droite et d'un plan

Soit (D) est une droite de repère$(A;\vec{u})$ et (P) un plan passant par B, de vecteur normal $\vec{n}$.

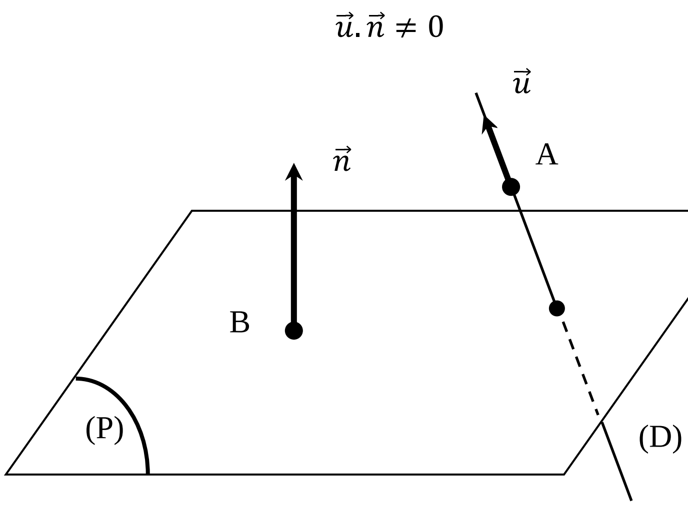
- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux alors la droite (D) est parallèle au plan (P).
- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux alors la droite (D) est sécante au plan (P).



(D) et (P) sont strictement parallèles



(D) est incluse dans (P)



(D) et (P) sont sécants

Remarque : Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, alors (D) et (P) sont orthogonaux.

Exercice de fixation

Soit (*D*) et (*D'*) les droites de représentations paramétriques respectives :

$\begin{cases} x = 2 - 2\,\lambda \\ y = \quad\quad 2\lambda \\ z = 2 - 3\,\lambda \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R}),\quad \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 2 - 2\mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases} (\,\mu \in \mathbb{R}),$

Soit (*P*) le plan d'équation cartésienne : $2x + y + 2z - 4 = 0$

a) Démontre que la droite (*D*) et la plan (P) sont sécants en un point A dont on déterminera les coordonnées.
b) Démontre que la droite (D') et le plan (P) sont strictement parallèles.

Solution

a) $\vec{u}(-2; 2; -3)$ est un vecteur directeur de la droite (D) et $\vec{n}(2; 1; 2)$ est un vecteur normal au plan (P). On a : $\vec{u}.\vec{n} \neq 0$; donc, (D) et (P) sont sécants.

   Les coordonnées de leur point d'intersection vérifient les équations de (*D*) et de (P)

   On a donc : $2(2 - 2\,\lambda) + (2\,\lambda) + 2(2 - 3\,\lambda) - 4 = 0$. Ce qui donne $\lambda = \frac{1}{2}$

   Donc (D) et (P) sont sécants en $A(1; 1; \frac{1}{2})$.

b) La droite (*D*') a pour repère$(B, \overrightarrow{u'})$ avec $B(1; 2; 1)$ et $\overrightarrow{u'}(-1; -2; 2)$

   On a : $\overrightarrow{u'}.\vec{n} = 0$; donc (*D*') et (P) sont confondus ou strictement parallèles.

   Or les coordonnées de *B* ne vérifient pas l'équation de (P); donc $B \notin (P)$

   Par conséquent (*D'*) et (P) sont strictement parallèles.

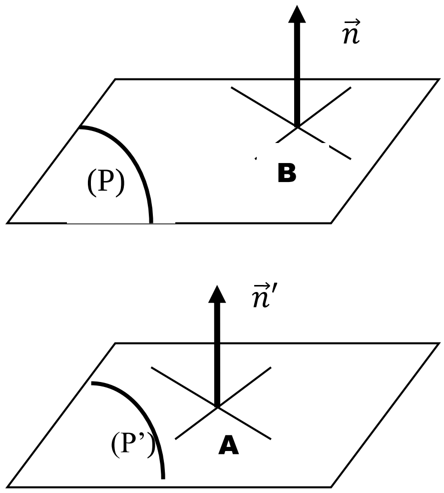
3. Positions relatives de deux plans

(P) est un plan passant par A, de vecteur normal $\vec{n}$ et (P') un plan passant par B, de vecteur normal $\overrightarrow{n'}$.

- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires alors les plans (P) et (P') sont parallèles.
- Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires alors les plans (P) et (P') sont sécants.

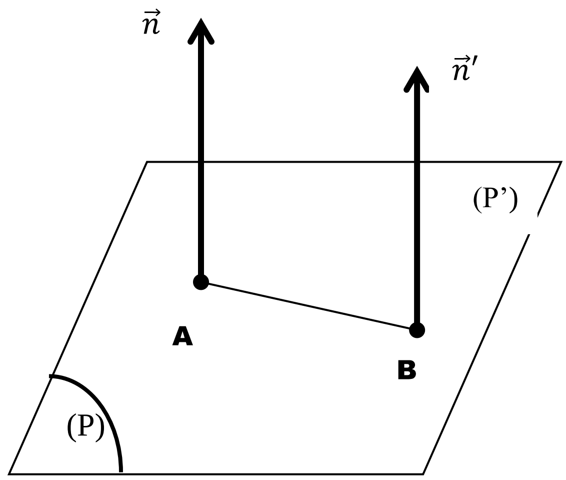
$\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ colinéaires

$\overrightarrow{AB}.\vec{n} \neq 0$ et ($\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n'} \neq 0$)



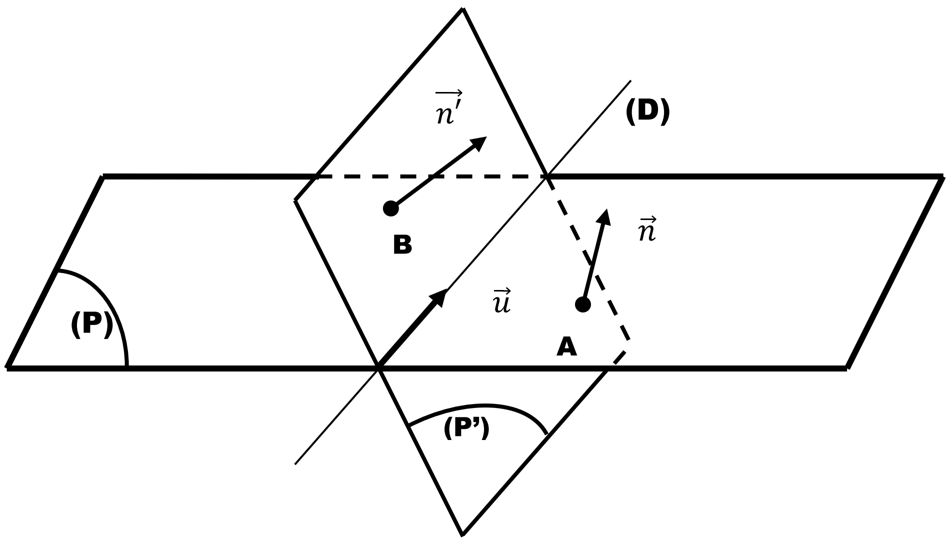
(P) et (P') sont strictement parallèles

$\overrightarrow{AB}.\vec{n}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n'} = 0$



(P) et (P')sont confondus

$\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ non colinéaires



(P) et (P') sont sécants.

Exercice de fixation

Soit (P) et (P') les plans d'équations cartésiennes respectives
$2x + y + 2z - 6 = 0$ et $2x - 2y - z + 3 = 0$

1. Démontre que les plans (P) et (P') sont sécants et détermine une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (Δ).
2. Démontrons que les plans (P) et (P') sont perpendiculaires.

Solution

1. Les plans (P) et (P') ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}(2; 1; 2)$ et $\overrightarrow{n'}(2; -2; -1)$

On vérifie que ces vecteurs ne sont pas colinéaires car : $\frac{2}{2} \neq \frac{1}{-2}$, donc les plans (P) et (P') sont sécants suivant une droite (Δ) .

Tous les points de la droite d'intersection (Δ) ont leur coordonnées qui vérifie le système : $\begin{cases} 2x + y + 2z - 6 = 0 \\ 2x - 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$

Pour déterminer une représentation paramétrique de cette droite, on peut poser $z = \lambda$ dans le système précédent et exprimer *x* et *y* en fonction de λ

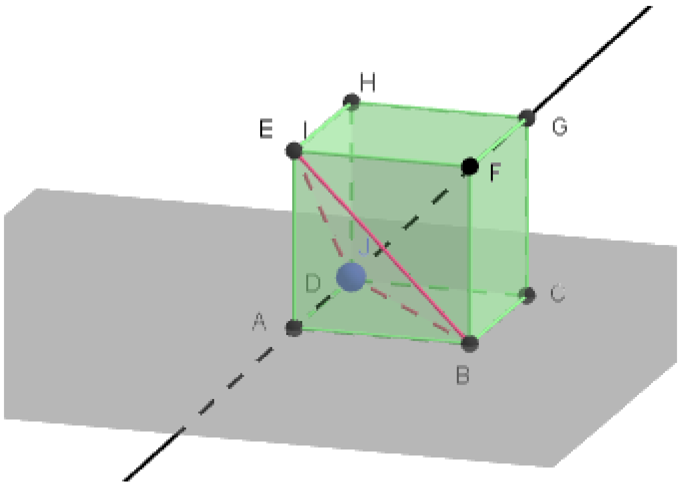
On obtient : $\begin{cases} 2x + y = 6 - 2\lambda \\ 2x - 2y = -3 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ puis : $\begin{cases} x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Donc, une représentation paramétrique de (Δ) est : $\begin{cases} x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ avec λ un réel

2. On a : $\vec{n}.\overrightarrow{n'} = 0$; donc, les plans (P) et (P') sont perpendiculaires.

C. SITUATION COMPLEXE

M. Yéo est un artiste sculpteur qui dessine ses œuvres avant de les réaliser en se basant sur des figures géométriques. La figure ci-dessous est le dessin de l'une des œuvres qu'il compte réaliser.



Elle est constituée d'une base BDE qui a la forme d'un triangle équilatéral inscrit dans un cube et d'une barre de fer (AG). Yeo affirme que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (BDE) qui assure la stabilité de l'œuvre.

Son jeune frère Koffi, élève de ta classe de terminale C fasciné par cette œuvre n'est pas d'accord avec l'affirmation de son grand frère, il cherche à le vérifier en te sollicitant.

En utilisant tes connaissances mathématiques justifie que la droite (AG) est effectivement orthogonale au plan (BDE).

.

Solution

- Pour répondre à la préoccupation de Koffi, je vais utiliser la géométrie analytique de l'espace.
- Dans un repère orthonormé bien choisi, je vais déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG}$ puis vérifier si $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (BDE).
- Je considère le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{\mathrm{AB}}; \overrightarrow{\mathrm{AD}}; \overrightarrow{\mathrm{AE}})$ qui est un repère orthonormé de l'espace.

-Je détermine dans le repère $(A, \overrightarrow{\mathrm{AB}}; \overrightarrow{\mathrm{AD}}; \overrightarrow{\mathrm{AE}})$, les coordonnées de chacun des points A, B, D, E et G.

On a : A (0 ;0 ;0), B (1 ;0 ;0), D (0 ;1 ;0), E (0 ;0 ;1) et G (1 ;1 ;1).

- Je détermine un vecteur normal au plan (BDE).
  $\overrightarrow{BD}(0-1; 1-0; 0)$; $\overrightarrow{BD}(-1; 1; 0)$
  $\overrightarrow{ED}(0; 1-0; 0-1)$; $\overrightarrow{ED}(0; 1; -1)$
  Soit $\vec{n}(a; b; c)$ un vecteur normal à (BDE), on a : $\overrightarrow{BD} \perp \vec{n}$ et $\overrightarrow{ED} \perp \vec{n}$ donc $\overrightarrow{BD}.\vec{n} = 0$ et $\overrightarrow{ED}.\vec{n} = 0$
  $\begin{cases} -a+b=0 \\ b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ b=c \end{cases}$. Si $a = 1$ alors $b = 1$ et $c = 1$ Donc $\vec{n}(1; 1; 1)$ un vecteur normal à (BDE).
- Je détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG}$.
  $$\overrightarrow{AG}(1; 1; 1)$$
  On a : $\overrightarrow{AG} = \vec{n}$, alors $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal à (BDE) donc la droite (AG) est orthogonal à (BDE).
- La barre de fer est effectivement orthogonale au plan (BDE).

D. EXERCICES

1. EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit $E\ (4;\ 2;\ -1)$ et (Q) le plan d'équation cartésienne $3x - 4y + 6 = 0$.

Calculer la distance du point E au plan (Q).

Solution

La distance du point *E* au plan (Q)est : $\mathrm{d}(\mathrm{E}; (\mathrm{Q})) = \frac{|3\times4-4\times2+6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{2}{5}$.

Exercice 2

On considère les points $A\ (5;\ 2;\ 3)$, $B\ (4;\ -2; 1)$ et$C\ (2; 4;\ -5)$

Détermine une équation cartésienne du plan passant par le point C et orthogonal à la droite(AB).

Solution

(AB) est orthogonal au plan donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal du plan.

On a : $\overrightarrow{AB}(1; -4; -2)$donc une équation du plan est de la forme $x - 4y - 2z + d = 0$

C appartient au plan donc on a : $2 - 4(4) - 2(-5) + d = 0$, donc $d = 4$

une équation cartésienne du plan passant par le point C et orthogonal à la droite(AB) est :

$x - 4y - 2z + 4 = 0$

2– <u>EXERCICES DE RENFORCEMENT</u>

Exercice 1

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit $A\ (-2;\ 0;\ 0)$, $B\ (0;\ 3; 0)$, $C\ (0; 0;\ -4)$

1. Détermine une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Détermine une équation du plan (P) passant par A et orthogonal à (ABC).

Solution

1. Soit $\vec{n}(a; b; c)$ un vecteur normal à (ABC)

   On a : $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$

   $\overrightarrow{AB}(2; 3; 0)$ et $\overrightarrow{AC}(2; 0; -4)$

   $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$ donc $\begin{cases} 2a + 3b = 0 \\ 2a - 4c = 0 \end{cases}$, d'où pour $a = 6, b = -4$ et $c = 3$.

   $\vec{n}(6; -4; 3)$ est un vecteur normal à (ABC)

   Une équation cartésienne de (ABC) est de la forme : $6x - 4y + 3z + d = 0$

   Les coordonnées de A vérifié l'équation donc $d = 12$.

   Une équation cartésienne de (ABC) est : $6x - 4y + 3z + 12 = 0$
2. (P) est orthogonal à (ABC) donc si $\overrightarrow{n'}(a'; b'; c')$ est un vecteur normal à (P) alors $\vec{n} \perp \overrightarrow{n'}$.

   On a donc $\vec{n}.\overrightarrow{n'} = 0$ alors $6a' - 4b' + 3c' = 0$ d'où $\overrightarrow{n'}(0; 3; 4)$

   Une équation cartésienne de (P) est de la forme : $3y + 4z + d = 0$

   Les coordonnées de A vérifié l'équation donc $d = 0$

   Une équation cartésienne de (ABC) est : $3y + 4z = 0$

Exercice 2

Soit (P) le plan d'équation $x - y + 3 = 0$ et (D) la droite intersection des plans (Q) et (Q')
d'équation cartésienne respectives $x - z - 2 = 0$ et $2x + y - 3z + 1 = 0$

1. Démontre que (D) est parallèle à (P).
2. Détermine une équation cartésienne du plan (Π) contenant (D) et perpendiculaire à (P).

Solution

1. Déterminons une représentation paramétrique de (D).

(D) est l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que : $\begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ 2x + y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$

Posons $z = t, (t \in \mathbb{R})$. on a : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t - 5 \end{cases}$

Une représentation paramétrique de (D) est donc : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -5 + t \quad ; \ t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

$\vec{u}(1; 1; 1)$ est un vecteur directeur de (D) et $\vec{n}(1; -1; 0)$ est un vecteur normal à(P).

$\vec{n}.\vec{u} = 0$ alors $\vec{n} \perp \vec{u}$, donc (D) est parallèle à (P).

2. (Π) contient (D) et est perpendiculaire à (P) donc si $\overrightarrow{n'}(a'; b'; c')$ est un vecteur normal à (Π), alors $\overrightarrow{n'} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{n'}$.

On a donc : $\begin{cases} a' + b' + c' = 0 \\ a' - b' = 0 \end{cases}$, ainsi $a = 1, b = 1$ et $c = -2$.

$$\overrightarrow{n'}(1; 1; -2)$$

Une équation cartésienne de (Π) est de la forme : $x + y - 2z + d = 0$

Le point $E(2; -5; 0)$ de la droite (D)appartient à (Π)donc $d = 3$

Une équation cartésienne de (Π)est : $x + y - 2z + 3 = 0$.

3-<u>EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT</u>

Exercice

Soit *a* et *b* deux nombres réels.

1. On considère les plans (P) et (Q) d'équation cartésienne respectives $x + y + z = 0$ et $ax + y + z + b = 0$

   Pour quelles valeurs de *a*les deux plans (P) et (Q) sont sécants.
2. Cette condition étant réalisée, on désigne par (*D*) la droite d'intersection des plans (P) et (Q) et on considère la droite (*D'*) de représentation paramétrique :

   $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 + b\lambda \, Avec\ \lambda\ un\ nombre\ réel. \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$

   Pour quelles valeurs de *a* et *b* les droites (*D*) et (*D'*) sont-elles orthogonales ?

Solution

1. $\vec{n}(1;1;1)$ est un vecteur normal à (P) et $\overrightarrow{n'}(a;1;1)$ est normal à (Q).
   (P) et (Q) sont sécants si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires.
   $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires s'il existe $k \in \mathbb{R}^*$, tel que $\vec{n} = k\overrightarrow{n'}$, c'est à dire si $a = 1$.
   Donc (P) et (Q) sont sécants si $a \neq 1$.

2. Déterminons une représentation paramétrique de (D).

(D) est l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que : $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + y + z + b = 0 \end{cases}$

Posons $z = t, (t \in \mathbb{R})$. on a : $\begin{cases} x = -\frac{b}{a-1} \\ y = -t + \frac{b}{a-1} \end{cases}$

Une représentation paramétrique de (D) est donc : $\begin{cases} x = -\frac{b}{a-1} \\ y = -t + \frac{b}{a-1} \\ z = t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

$\vec{u}(0;-1;1)$ et $\overrightarrow{u'}(0;b;1)$ sont deux vecteurs directeurs respectivement à (D) et (D').
(D) et (D') sont orthogonaux si $\vec{u}.\overrightarrow{u'} = 0$ donc si $b = 1$.
(D) et (D') sont orthogonaux si $a \neq 1$ et $b = 1$.

DOCUMENTS

Collection Inter Africain de Mathématiques (CIAM) TERMINALE SM