MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ECOLE A LA MAISON

SECONDAIRE

$1^{ère}$C
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 9 heures   Code :

Compétence 1 **Traiter des situations relatives aux calculs algébriques et aux fonctions**

Thème 2 **Fonctions**

LEÇON 15 : SUITES NUMERIQUES

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Une coopérative scolaire veut monter un projet de construction de ferme. Pour ce fait le président encourage ses 45 membres à cotiser une somme de 1000 F par mois pendant 9 mois. Au bout de la première année, il compte ouvrir un compte et déposer cet argent dans une banque qui accorde un intérêt de 5% chaque année, sur tout montant resté immobilisé sur ce compte. Le budget primitif du projet s'élève à 623 000F.
Le président de la coopérative, en classe de première est curieux de savoir si pendant 4 années la coopérative pourra réunir ce montant grâce à la banque. Il recherche un procédé efficace pour effectuer les calculs nécessaires.

B-CONTENU DU COURS

I- GENERALITES

1- Définition

On appelle suite numérique toute fonction de ℕ vers IR. U : ℕ ⟶ IR $n \longmapsto U(n)$. L'image $U(n)$ de n est généralement notée U_n. La suite numérique ainsi définie est notée $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplement (U_n). U_n est appelé terme d'indice n ou terme général de la suite (U_n).

Exemple

Parmi les fonctions suivantes, seule la fonction de la colonne C est une suite numérique

A	B	C
f : $\boldsymbol{IR} \longrightarrow$ IR $n \longmapsto 2n - 1$	g :$IR \longrightarrow$ IR $n \longmapsto \frac{2n-1}{n+3}$	g :ℕ ⟶ IR $n \longmapsto \frac{2n-1}{n}$

2- Différentes présentations d'une suite

Une suite peut être définie par une formule explicite ou par une formule de récurrence.

a- Suite définie par une formule explicite

Soit f une fonction définie dans IR+, pour tout n∈ ℕ, la suite (Un) de terme général Un = f(n) est dite définie par une formule explicite.

Exemples :

- $U_n = 3n + 5$ et $V_n = \frac{2n^2+1}{n}$ sont des suites définies par des formules explicites.

- Soit la suite suivante : $W_n = -6(\frac{1}{2})^n + 10$. On a :

$W_0 = -6(\frac{1}{2})^0 + 10 = 4$; $W_5 = -6(\frac{1}{2})^5 + 10 = \frac{157}{12}$; $W_{10} = -6(\frac{1}{2})^{10} + 10 = \frac{5117}{512}$

b- Suite définie par une formule de récurrence

La suite (U_n) définie par la donnée : - d'un terme (en général le 1er terme) - et d'une relation du type : ∀ n∈ ℕ, $U_{n+1} = f(U_n)$ est dite suite définie par une formule de récurrence.

Exemple 1 : $\begin{cases} P_1 = 3500 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = P_n + 25 \end{cases}$ est une suite définie par une formule de récurrence.

Soit la suite (V_n) définie par la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} V_0 = 7 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = 2V_n - 5 \end{cases}$$

On a :

$V_1 = 2V_0 - 5 = 9$;

$V_4 = 2V_3 - 5$. Il nous faut calculer V_3.

$V_3 = 2V_2 - 5$; il nous faut calculer V_2 .

$V_2 = 2V_1 - 5$. On a donc $V_2 = 14$; $V_3 = 23$ et enfin $V_4 = 41$.

3- Représentation graphique d'une suite

a- Suite définie par une formule explicite

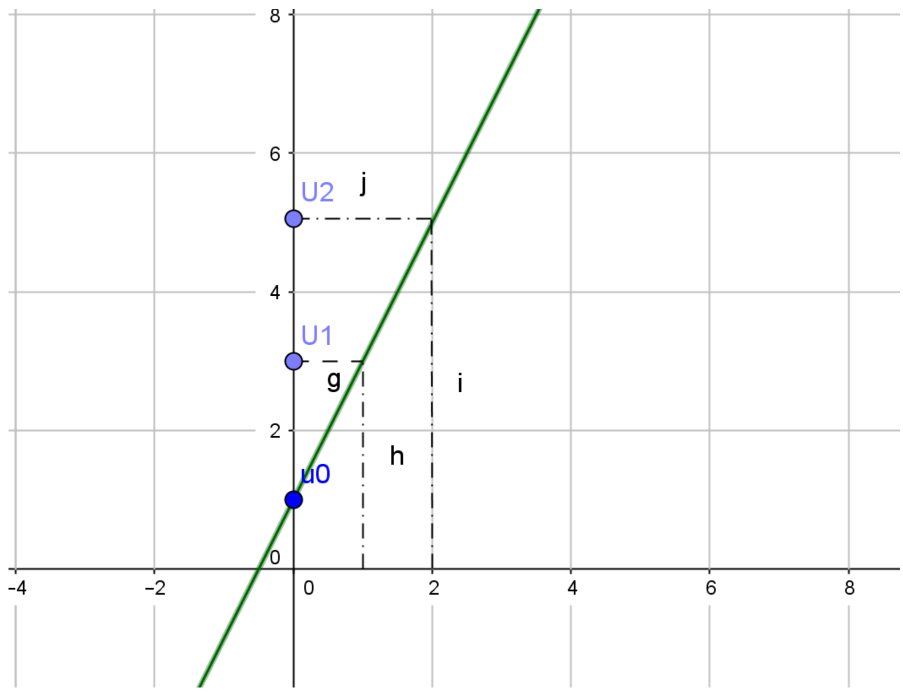
$U_n = f(n)$.

Méthode :

- On représente (Cf), la courbe de la fonction f associée à la suite (U_n).
- On détermine graphiquement $U_0 = f(0)$; $U_1 = f(1)$; $U_2 = f(2)$; $U_3 = f(3)$ etc.

Exemple

Représentation graphique des 3 premiers termes de la suite définie par : $U_n = 2n+1$.



b- Suite définie par une formule de récurrence : $U_{n+1}=f(U_n)$

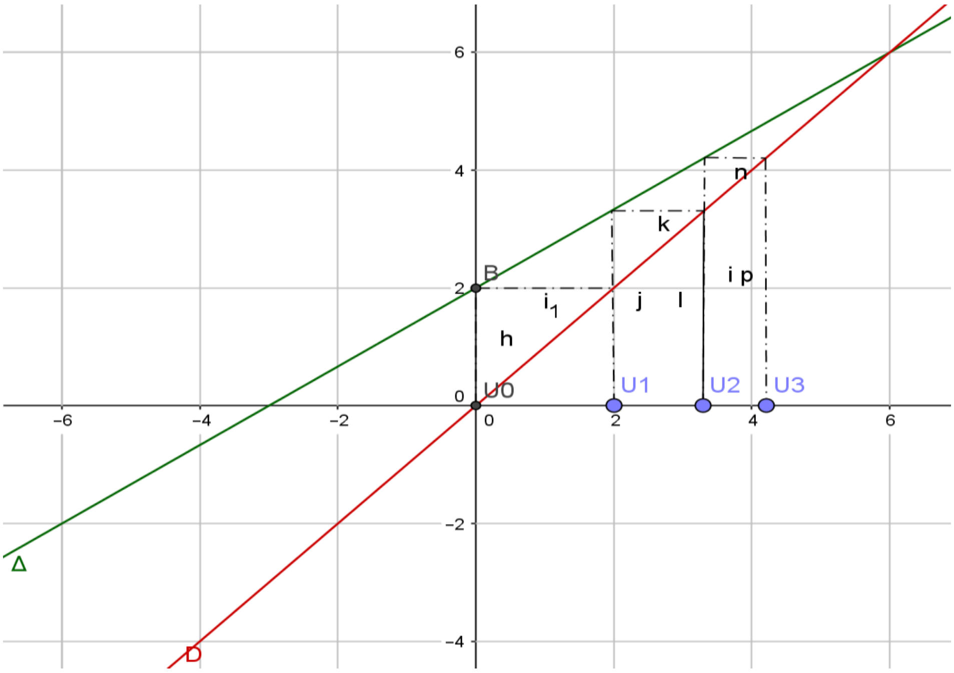
Méthode :

- On représente (Cf), la courbe de la fonction f associée à la suite (U_n).
- On trace la droite (Δ) d'équation : y = x (la première bissectrice)
- On marque U_0 sur l'axe des abscisses (OI).
- On Projette le point obtenu verticalement sur (Cf), on projette ce nouveau point horizontalement sur (Δ) et enfin on projette ce dernier point obtenu verticalement sur (OI), on obtient U_1.
-Refaire ce même processus avec U_1 pour obtenir U_2.
- Et ainsi de suite…

<u>Exemple</u>

Représentation graphique des 3 premiers termes de la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 2 \end{cases}$$



II- SUITES ARITHMETIQUES, SUITES GEOMETRIQUES

1- Suites arithmétiques

a- Définition

Soit (U_n) une suite numérique.
(U_n) est arithmétique s'il existe un nombre réel **r** tel que :
$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + r$.

*** r** est appelé la **raison** de la suite (U_n)

<u>Exemples</u> :

- Voici des exemples de suite arithmétique :

$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + 3$; 3 est la raison et U_0 le premier terme.

$\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}^*$, $V_{n+1} = V_n - \frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$ est la raison et V_1 le premier terme.

- On considère la suite (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{1}{2}n - 3$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1) - 3 = \frac{1}{2}n - 3 + \frac{1}{2}$. Donc $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2}$. Il en résulte que la suite (U_n) est arithmétique. Sa raison est $\frac{1}{2}$ et son premier terme est : $U_0 = -3$.

b-Détermination du terme général

Propriété

Soit n et k des entiers naturels ; (U_n) une suite arithmétique de raison r, on a : $U_n = U_k + (n-k)r$ Cette forme est appelée terme général de (U_n)

Cas particuliers:

$U_n = U_0 + n\,r$ $U_n = U_1 + (n-1)r$

Exercice de fixation

Soit (U_n) la suite arithmétique de raison -4 et de premier terme $U_0 = 5$.
Exprime U_n en fonction de n.

Solution

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 + (-4)n$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 5 - 4n$.

c- Somme des termes consécutifs

Propriété

La somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit par n de la demi-somme des termes extrêmes

Conséquences :

• Si $S = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$ une somme de termes consécutifs de la suite arithmétique (U_n) alors $S = n \times \frac{(U_1+U_n)}{2}$ • Si $S = U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \ldots + U_j$ une somme de termes consécutifs de la suite arithmétique (U_n) , alors $S = (j - k + 1) \times \frac{(U_k+U_j)}{2}$

Exemples

- $S = 1+2+3+\ldots\ldots+ 2020 = 2020 \times \frac{(1+2020)}{2} = 2\,041\,210$

- S= 2+4+6+.........+2n $= n \times \frac{2+2n}{2} = n(n+1)$
- S= 1+3+5+ ....+ (2n+1) $=(n+1) \times (n+1) = (n+1)^2$

- Soit (U_n) la suite arithmétique de raison 9 et de premier terme $U_0 = -2$.

Alors : Si on pose

1) $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1}$. De 0 à $n-1$, on additionne n termes.

Donc $S = \frac{n}{2}(U_0 + U_{n-1})$. Soit donc $S = \frac{n(9n-13)}{2}$

2) $T = U_3 + U_4 + \cdots + U_{77}$; de 3 à 77, on additionne $77 - 3 + 1 = 75$ termes.

Donc $T = \frac{75}{2}(U_3 + U_{77})$ soit $T = 26\,850$.

2- Suites géométriques

a- Définition

Soit (U_n) une suite numérique.
(U_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = q\, U_n$
* q est appelé la raison de la suite (U_n)

Exemple :

- Soit la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n \end{cases}$$ est une suite géométrique.

- On considère la suite (V_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = 3(\frac{1}{4})^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = 3(\frac{1}{4})^{n+1} = \frac{1}{4}\left[3(\frac{1}{4})^n\right]$. Il en résulte que $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = \frac{1}{4}V_n$.

Donc la suite (V_n) est une géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $V_0 = 3$.

b-Détermination du terme général

Propriété

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et k un entier naturel inférieur à n.
On a : $\mathbf{U_n = q^{(n-k)} U_k}$

Cas particuliers :

- $U_n = q^n U_0$
- $U_n = q^{n-1} U_1$

Exercice de fixation

Soit (V_n) la suite géométrique de raison 3 et de premier terme $V_1 = 3$.
Exprime V_n en fonction de n.

Solution

$\forall n \geq 1, V_n = V_1 3^{n-1}$. Donc $\forall n \geq 1, V_n = 3^n$

c-**Somme de termes consécutifs**

Propriété

La somme S des n termes consécutifs d'une suite géométrique de 1er terme a et de raison q est :

Si $q \neq 1$ alors : $S = U_1 + U_2 + U_3 + \dots\dots + U_n = U_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$

- Si $q = 1$ alors $S = U_1 + U_2 + U_3 + \dots\dots + U_n =$ (nombre de termes) $\times$ (1er terme) ; $S = n \times U_1$
- De façon générale : $U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \dots\dots + U_{k+p} = U_k \times \frac{1-q^{p+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$

$U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \dots\dots + U_{k+p} = U_k \times (p+1)$ si $q = 1$

Exercice de fixation

Soit (V_n) la suite géométrique définie par : $V_n = (\frac{1}{3})^n$.

Calcule la somme T suivante: $T = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^7}$.

Solution

$T = V_1 + V_2 + \cdots + V_7$; d'après une formule du cours, $T = \frac{1}{3}(\frac{1-(\frac{1}{3})^7}{1-\frac{1}{3}})$; soit $T = \frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{3})^7)$

$T = \frac{1093}{2187}$

C-SITUATION COMPLEXE

Chaque année, depuis 2010 la production d'un article de l'usine citoyenne O.B.V en Côte d'Ivoire subit une baisse par rapport à la production de l'année précédente d'environ 3%. Au cours de l'année 2010, la production a été de 65 000 articles.
Une étude de marché a montré que la production de cet article n'est plus rentable dès que la production annuelle devient inférieure à 56 000 articles
Les premiers responsables de cette usine désirent savoir à partir de quelle année la production de cet article ne sera plus rentable.
Elève en classe de 1C, Ton professeur de mathématiques a son épouse qui travaille dans cette usine. Il présente la situation à la classe puis accorde un bonus de deux à chacun des trois premiers élèves qui trouveront la solution. Tu désires obtenir ce bonus.
Propose une solution argumentée à ce problème.

Proposition de solution

Pour aider à résoudre ce problème, je vais utiliser les suites numériques.
Je vais schématiser ce problème sous la forme d'une suite géométrique.
Je vais au fur et à mesure donner des valeurs à n afin de trouver une valeur inférieure à 56000.
La valeur qui me permettra de trouver une valeur inférieure à 56000 me permettra de trouver l'année et conclure.
Chaque année, la production subit une baisse par rapport à la production de l'année précédente d'environ 3%. Au cours de l'année 2010, la production a été de 65 000 articles.
Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la une suite associée à ce problème. Alors le terme général de cette suite est :

$$U_{n+1} = U_n - \frac{3}{100}U_n = \frac{97}{100}U_n$$

Alors $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{97}{100}$ et de premier terme $V_0 = 65000$.
On a alors : $U_n = U_0 \times q^n = 65000 \times (\frac{97}{100})^n$
En 2011, la production sera :
$U_1 = 65000 \times \frac{97}{100} = 63050$
En 2012, la production sera :
$U_2 = 65000 \times (\frac{97}{100})^2 = 61158{,}5$ Soit 61159
En 2013, la production sera :
$U_3 = 65000 \times (\frac{97}{100})^3 = 59323{,}7$ Soit 59324
En 2014, la production sera :
$U_4 = 65000 \times (\frac{97}{100})^4 = 57544$
En 2015, la production sera :
$U_5 = 65000 \times (\frac{97}{100})^5 = 55817{,}7$ Soit 55818

$55818 < 56000$ Alors la production ne sera plus rentable à partie de 2015.

D- EXERCICES

Exercice 1

Réponds par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes :

1- La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, r_n = -2n + 7$ est une suite arithmétique.
2- La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{2}{n} + 1$ est une suite arithmétique.
3- La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 3(2^n) - 1$ est une suite géométrique.
4- La suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 6^n$ est une suite géométrique.

Correction de l'exercice 1

1- Vrai
2- Faux
3- Faux
4- Vrai

Exercice 2

Soit (V_n) la suite géométrique définie par : $\begin{cases} V_1 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ V_{n+1} = -5V_n \end{cases}$

Exprime V_n en fonction de n.

Correction de l'exercice 2

$V_n = V_1 \times q^{n-1} = -2 \times (-5)^{n-1}$

Exercice 3

Soit (U_n) la suite de terme général : $U_n = -5n + n^2$ avec $n \in \mathbb{N}$

Calcule les 5 premiers termes de cette suite.

Correction de l'exercice 3

$U_0 = -5 \times 0 + 0^2 = 0$; $U_1 = -5 \times 1 + 1^2 = -4$; $U_2 = -5 \times 2 + 2^2 = -6$;
$U_3 = -5 \times 3 + 3^2 = -6$; $U_4 = -5 \times 4 + 4^2 = -4$

Exercice 4

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique définie par : $\begin{cases} U_2 = 5 \\ \forall n \geq 2, U_{n+1} = U_n - 3 \end{cases}$

Exprime U_n en fonction de n.

Correction de l'exercice 4

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme $U_2 = 5$ et de raison r=-3, alors :

$$U_n = U_2 + (n-2) \times (-3) = 5 + (n-2) \times (-3) = -3n + 11$$

Exercice 5

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r telle que : $U_6 = -3$ et $U_9 = -6$.

Détermine la valeur de r.

Correction de l'exercice 5

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite arithmétique, on a :$U_{n+1} = U_n + r$.

Par conséquent : $U_7 = U_6 + r$; $U_8 = U_7 + r$, en remplaçant U_7 par sa valeur, on obtient ; $U_8 = U_6 + 2r$ et donc ; $U_9 = U_6 + 3r = -3 + 3r = -6$ d'où $r = -1$.

Exercice 6

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q telle que : $V_1 = -\frac{3}{2}$ et $V_3 = -\frac{27}{2}$.

Détermine les valeurs possibles de q.

Correction de l'exercice 6

$(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, alors $V_{n+1} = q \times V_n$ d'où $V_2 = q \times V_1$,

$V_3 = q \times V_2 = q^2 \times V_1$ par conséquent, on a $-\frac{27}{2} = q^2 \times (-\frac{3}{2})$; $q^2 = 9$. Conclusion $q = 3 \; ou \; q = -3$.

Exercice 7

Soit la suite (U_n) définie par : $U_n = 2n + 1$

1) Calcule les quatre premiers termes de cette suite.
2) Démontre que (U_n) est une suite arithmétique.
3) Déduis-en le calcul de la somme des cents premiers nombres impaires.

Correction de l'exercice 7

1) $U_0 = 2 \times 0 + 1 = 1$; $U_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$; $U_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$; $U_3 = 2 \times 3 + 1 = 7$
2) $U_{n+1} = 2(n+1) + 1 = 2n + 2 + 1 = 2n + 1 + 2 = U_n + 2$ alors (U_n) est une suite arithmétique.
3) $S = \frac{(U_0 + U_{99})}{2} \times 100$. $U_{99} = 2 \times 99 + 1 = 199$; alors S=10000.

Exercice 8

Soit (V_n) la suite définie par : $\begin{cases} V_1 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \; V_{n+1} = \frac{V_n}{1 - V_n} \end{cases}$

Calcule les 3 premiers termes de cette suite.

Correction de l'exercice 8

$V_1 = -2$; $V_2 = \frac{V_1}{1 - V_1} = -\frac{2}{3}$; $V_3 = -\frac{2}{5}$

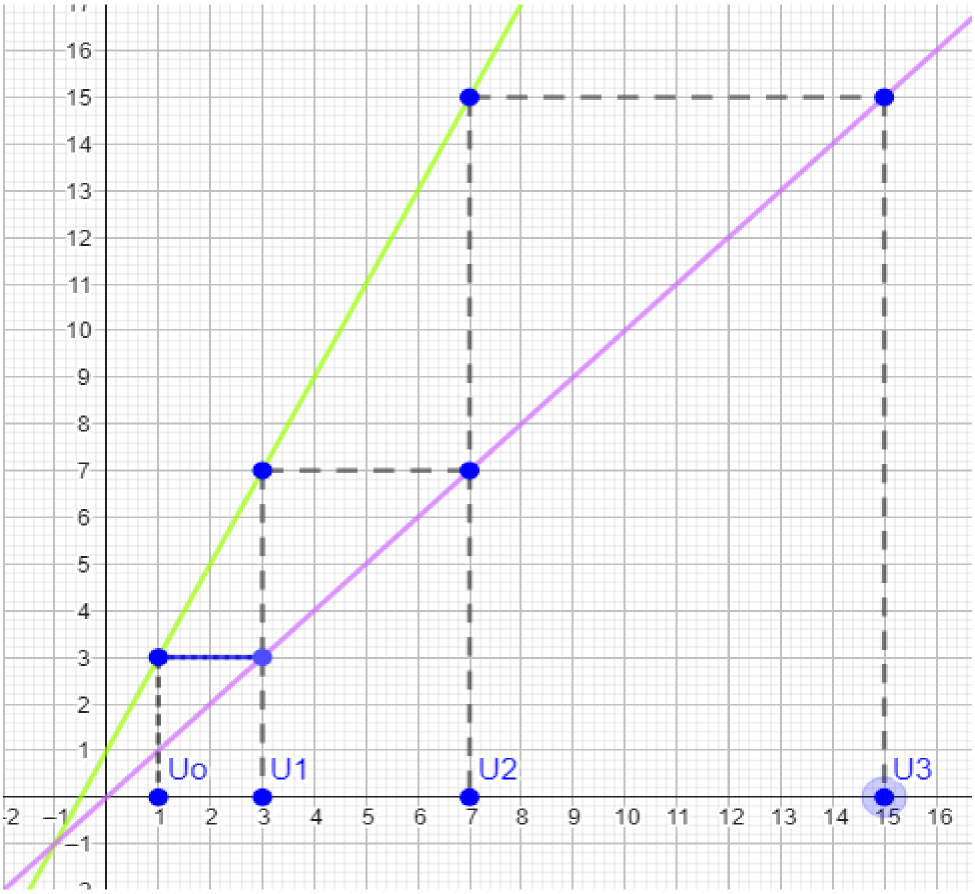
Exercice 9

Le plan est muni du repère orthonormé (O; I, J).

Soit (U_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \; U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$

Représente sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite

Correction de l'exercice 9



Exercice 10

Soit (t_n) la suite de terme général $t_n = -6n + 3$

Démontre que : $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.

Correction de l'exercice 10

$t_{n+1} = -6(n+1) + 3 = -6n - 6 + 3 = -6n + 3 - 6 = t_n - 6$, alors : $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison -6 et de premier terme $t_1 = -6 \times 1 + 3 = -3$.

Exercice 11

Soit (P_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} P_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, 2P_{n+1} = 2P_n - 5 \end{cases}$

Démontre que : $(P_n)n \in \mathbb{N}^*$ est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison

Correction de l'exercice 11

$2P_{n+1} = 2P_n - 5$ alors $P_{n+1} = P_n - \frac{5}{2}$; par conséquent $(P_n)n \in \mathbb{N}^*$ est une suite arithmétique de raison $\frac{5}{2}$ et de premier terme $P_1 = P_0 - \frac{5}{2} = -\frac{9}{2}$

Exercice 12

Soit (U_n) la suite numérique définie par: $U_n = 7 \times 2^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

Démontre que : $(U_n)n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique puis précise le premier terme et la raison.

Correction de l'exercice 12

$U_{n+1} = 7 \times 2^{n+1} = 7 \times 2^n \times 2 = 2U_n$; alors $(U_n)n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $U_0 = 7$.

Exercice 13

Soit (V_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} V_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, 2V_{n+1} + 5V_n = 0 \end{cases}$

Démontre que : $(V_n)n \in \mathbb{N}^*$ est une suite géométrique et précise le premier terme et la raison

Correction de l'exercice 14

$2V_{n+1} + 5V_n = 0$ *alors* $2V_{n+1} = -5V_n$ d'où $V_{n+1} = -\frac{5}{2}V_n$ par conséquent $(V_n)n \in \mathbb{N}^*$ est une suite géométrique de raison $-\frac{5}{2}$ et de premier terme $V_1 = -\frac{5}{2}V_0 = -5$.

Exercice 14

Soit (U_n) une suite arithmétique telle que : $U_8 = 4$ et $U_{20} = 28$

1- Détermine la raison de cette suite
2- Calcule U_{18} puis en déduis U_{19}

Correction de l'exercice 14

1- (U_n) est une suite arithmétique, en utilisant la formule : $U_n = U_p + (n-p)r$ on a :

$U_{20} = U_8 + (20-8)r; \quad r = \frac{U_{20}-U_8}{(20-8)} = 2$

2- $U_{18} = U_{20} + (18-20)2 = 24$. En utilisant la formule $U_{n+1} = U_n + r$ on en déduis que : $U_{19} = U_{18} + 2 = 24 + 2 = 26$

Exercice 15

Soit (U_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} U_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{4U_n - 9}{U_n - 2} \end{cases}$ et $V_n = \frac{1}{U_n - 3}$

1- Calcule U_1 , U_2 puis V_0, V_1 et V_2
2- a) Démontre que $(V_n)n \in \mathbb{N}$ est une suite arithmétique de raison r = 1 et de premier terme $V_0 = 1$
b) Déduis-en V_n puis U_n en fonction de n
3- On pose $T_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$
Exprime T_n en fonction de n

Correction de l'exercice 15

1- $U_1 = \frac{4U_0-9}{U_0-2} = \frac{4\times4-9}{4-2} = \frac{7}{2}$; $U_2 = \frac{4U_1-9}{U_1-2} = \frac{10}{3}$; $V_0 = \frac{1}{U_0-3} = 1$; $V_1 = \frac{1}{U_1-3} = 2$;

$$V_2 = \frac{1}{U_2 - 3} = 3$$

2- a) $V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}-3} = \frac{1}{\frac{4U_n-9}{U_n-2}-3} = \frac{U_n-2}{U_n-3} = \frac{U_n-3+1}{U_n-3} = 1 + \frac{1}{U_n-3} = 1 + V_n$; alors $(V_n)n \in \mathbb{N}$ est une suite arithmétique de raison r = 1 et de premier terme $V_0 = 1$.

b) $V_n = V_0 + nr = 1 + n$; $V_n = \frac{1}{U_n-3}$ alors $U_n = \frac{1}{V_n} + 3 = \frac{1}{1+n} + 3 = \frac{4+3n}{1+n}$

3- $(V_n)n \in \mathbb{N}$ est une suite arithmétique alors : $T_n = \frac{(V_1+V_n)\times n}{2} = \frac{(2+1+n)\times n}{2} = \frac{n^2+3n}{2}$

Exercice 16

Soit (U_n) la suite numérique définie par: $\begin{cases} U_0 = 9 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$ et $V_n = U_n - 3$

1- Calcule U_1 , U_2 puis V_0, V_1 et V_2

2- a) Démontre que $(V_n)n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $V_0 = 6$

b) Déduis-en V_n puis U_n en fonction de n

3- On pose $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ et $T_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

Exprime T_n puis S_n en fonction de n.

Correction de l'exercice 16

1- $U_1 = \frac{1}{3}U_0 + 2 = 5$; $U_2 = \frac{1}{3}U_1 + 2 = \frac{11}{3}$; $V_0 = U_0 - 3 = 6$; $V_1 = U_1 - 3 = 2$;

$$V_2 = U_2 - 3 = \frac{2}{3}$$

2- a) $V_{n+1} = U_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}U_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}U_n - 1 = \frac{1}{3}(U_n - 3) = \frac{1}{3}U_n$

Alors $(V_n)n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $V_0 = 6$.

b) $(V_n)n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $V_0 = 6$, alors

$$V_n = 6 \times (\frac{1}{3})^n$$

$V_n = U_n - 3$ alors $U_n = V_n + 3 = 6 \times (\frac{1}{3})^n + 3$

3- $T_n = \frac{1-q^n}{1-q} \times V_0 = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} \times 6 = 9\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ on a $V_n = U_n - 3$ $alors$ $U_n = V_n + 3$

$S_n = T_n + 3n = 9\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 3n$