MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ECOLE A LA MAISON

SECONDAIRE

$1^{ère}$C
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 10 heures   Code :

Compétence 3 — **Traiter des situations relatives à la géométrie du plan, à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan**

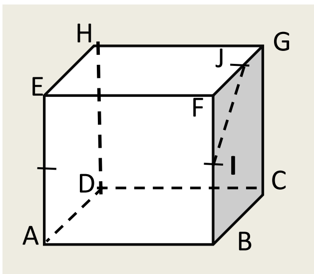
Thème 2 — **Géométrie de l'espace**

Leçon12 : ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Hermann, un élève en classe $1^{ère}$ C ne comprend pas pourquoi son frère aîné affirme que dans le cube ABCDEFGH ci-contre, les droites (HG) et (IJ) sont orthogonales ; avec I et J milieux respectifs de $[FB]$ et $[FG]$.
Afin de comprendre cette affirmation, Son professeur de mathématiques lui demande de faire des recherches sur les propriétés de l'orthogonalité dans l'espace.



B- CONTENU DE LA LEÇON

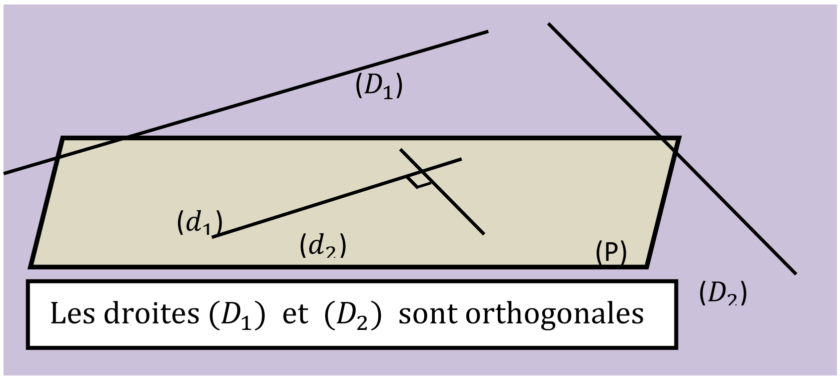
1. DROITES ORTHOGONALES DE L'ESPACE

a) **Définition**

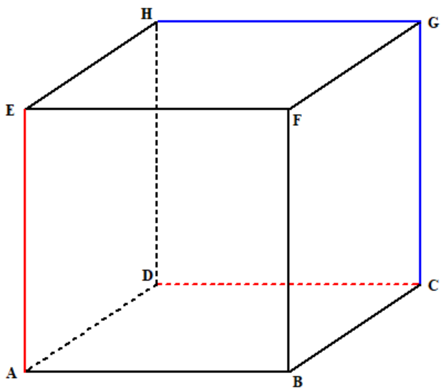
Dans l'espace (ε), deux droites (D_1) et (D_2) sont dites orthogonales lorsqu'il existe deux droites perpendiculaires (L_1) et (L_2) telles que (D_1) est parallèle à (L_1) et (D_2) est parallèle à (L_2).

La droite (D_1) est orthogonale à la droite (D_2) se note : $(D_1) \perp (D_2)$

$$\begin{cases} (L_1) \text{ et } (L_2) \text{ perpendiculaires} \\ (D_1) \parallel (L_1) \\ (D_2) \parallel (L_2) \end{cases} \Longrightarrow (D_1) \perp (D_2)$$



Exemple :



Dans le cube ABCDEFGH, les droites (AE) et (DC) sont orthogonales. En effet, (GH) est perpendiculaire à (CG). De plus (GH) // (DC) et (CG) // (AE).

Remarque : le terme perpendiculaire ne s'utilise que lorsque les droites sont orthogonales et sécantes. Autrement dit, deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement sécantes.

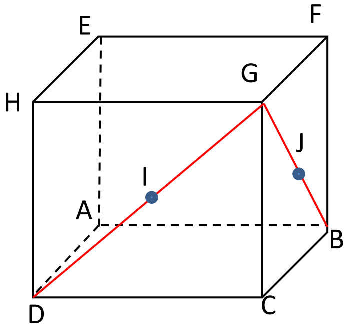
b) **Propriétés**

Propriété 1 :

Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

Propriété 2 :

Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.



Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre :
ABCDEFGH est un cube, I est le milieu de [DG] et
J est le milieu de [BG].
Démontre que les droites (IJ) et (AC) sont orthogonales.

Solution

Dans le triangle BDG, I est le milieu de [DG] et J est le milieu de [BG],
D'après le théorème des milieux (IJ) et (DB) sont parallèles.
Comme ABCD est un carré, alors ses diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires.
Puisque (IJ) et (BD) sont parallèles et (AC) est orthogonale à (BD), alors (AC) est orthogonale à (IJ).

Remarque :

Dans l'espace, deux droites orthogonales à une même troisième ne sont pas nécessairement parallèles.

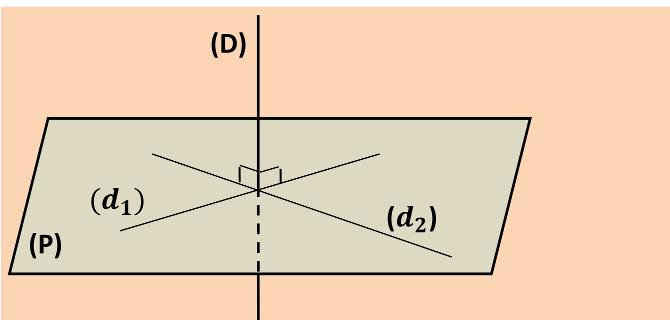
2. DROITES ET PLANS ORTHOGONAUX

a) Définition

Dans l'espace, on dit qu'une droite (D) est perpendiculaire à un plan (P) lorsque (D) est orthogonale à deux droites sécantes contenues dans (P).

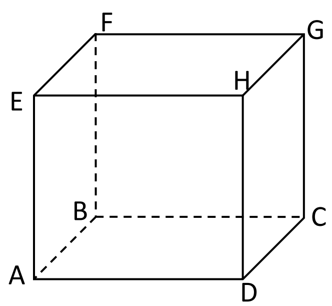
La droite (D) est perpendiculaire au plan (P) se note : $(D) \perp (P)$

$$\begin{cases} (d_1) \text{ et } (d_2) \text{ sécantes dans } (P) \\ (D) \perp (d_1) \\ (D) \perp (d_2) \end{cases} \Longrightarrow \quad (D) \perp (P)$$



Le plan (P) et la droite (D) sont perpendiculaires

Exemple



On donne la figure ci-contre : ABCDEFGH est un cube.

(DH) est perpendiculaire au plan (EGH). En effet, (DH) ⊥ (HE)

et (DH) ⊥ (HG). La droite (DH) est orthogonale à deux droites sécantes en H incluses du plan (EGH), alors (DH) est perpendiculaire au plan (EGH).

b) <u>Propriétés</u>

<u>Propriété 1</u> (propriété fondamentale) :

Si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite incluse dans ce plan.

<u>Exercice de fixation</u>

Avec l'énoncé précédent, justifie que les droites (DH) et (EG) sont orthogonales.

Solution : Comme (DH) est perpendiculaire au plan (EGH), Or (EG) $\subset$ (EGH), donc (DH) $\perp$ (EG).

<u>Propriété 2</u> :

Il existe une unique droite passant par un point donné et perpendiculaire à un plan donné.

<u>Exercice de fixation</u>

Avec l'énoncé précédent, combien y a-t-il de droites passant par le point B et perpendiculaire au plan GCD ?

Solution : Il existe une seule droite passant par le point B et perpendiculaire au plan (GCD), c'est la droite (BC).

<u>Propriété 3</u> :

Il existe un unique plan passant par un point donné et perpendiculaire à une droite donnée.

<u>Exercice de fixation</u>

Avec l'énoncé précédent, combien y a-t-il de plans passant par le point A et perpendiculaire à la droite (AD) ?

Solution : Il existe un seul plan passant par le point A et perpendiculaire à la droite (AD) c'est le plan (ABE).

<u>Propriété 4</u> :

Si deux droites sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

<u>Exercice de fixation</u>

Justifie que la droite (AE) est perpendiculaire au plan (FGH).

Solution : la droite (AE) est parallèle à la droite (DH) et (DH) est perpendiculaire au plan (FGH). Alors (AE) est perpendiculaire au plan (FGH).

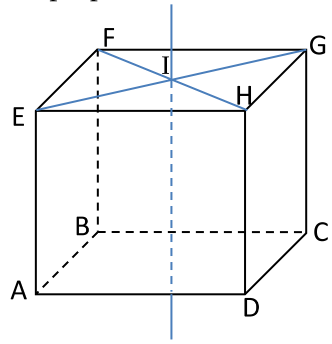
Propriété 5 :
Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, alors elles sont parallèles.

Exercice de fixation
Justifie que les droites (DH) et (BF) sont parallèles.

Solution : la droite (DH) est perpendiculaire au plan (FGH). De même, on montre que (BF) est perpendiculaire au plan (FGH). Alors les droites (DH) et (BF) sont parallèles.

Propriété 6 :
Si deux plans sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

Exercice de fixation



Sur la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube, la droite (D) est perpendiculaire aux droites (FH) et (EG) en I.
Justifie que (D) est perpendiculaire au plan (ABD).

Solution
La droite (D) étant perpendiculaire aux droites (FH) et (EG), alors elle est perpendiculaire au plan (FGH). Or les plans (ABD) et (FGH) sont parallèles. Donc la droite (D) est perpendiculaire au plan (ABD).

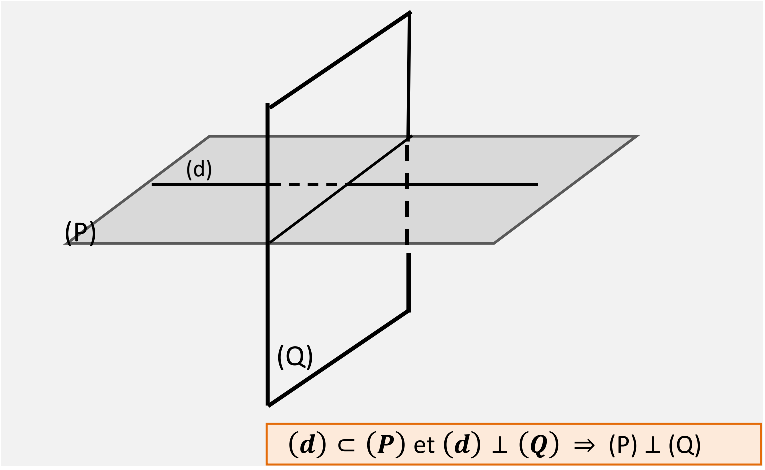
Propriété 7 :
Si deux plans sont perpendiculaires à une même droite, alors ils sont parallèles.

3. PLANS PERPENDICULAIRES DE L'ESPACE

a) Définition
Dans l'espace, deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un d'ε
orthogonale à l'autre plan.

Le plan (P) est perpendiculaire au plan (Q) se note : $(P) \perp (Q)$

$$\begin{cases} (d) \text{ est une droite du plan } (P) \\ (Q) \perp (d) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q)$$

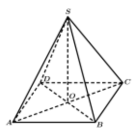


Exemple

On donne la pyramide régulière SABCD ci-dessous de hauteur $[SO]$

Démontrons que les plans (SDB) et (ABD) sont perpendiculaires.

(AO) est une droite incluse dans le plan (ADB)
(AO) est perpendiculaire au plan (SDB) donc les plans (SDB) et (ABD) sont perpendiculaires.



Conséquences

* Si une droite (D) est perpendiculaire à un plan (P), alors tout plan parallèle à (D) est perpendiculaire à (P).
* Si deux plans sont perpendiculaires, alors toute droite perpendiculaire à l'un est parallèle à l'autre.

b) Propriétés

Propriété 1

Si deux plans sont perpendiculaires, alors tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.

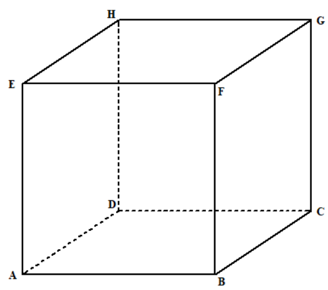
Propriété 2

Un plan est perpendiculaire à deux plans sécants si et seulement s'il est perpendiculaire à leur droite d'intersection.

Exercices de fixation

Sur la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube.

Démontre que les plans (ACE) et (DEH) sont perpendiculaires au plan (ABC).



Solution

Les plans (ACE) et (DEH) sont sécants et leur droite d'intersection est la droite (AE).
(AE) $\perp$ (AD) et (AE) $\perp$ (AB). Comme (AD) et (AB) sont incluses (ABC), donc (AE) $\perp$ (ABC).
Par conséquent, les plans (ACE) et (DEH) sont perpendiculaires au plan (ABC).

4. PROJECTIONS ORTHOGONALES SUR UN PLAN, SUR UNE DROITE DE L'ESPACE

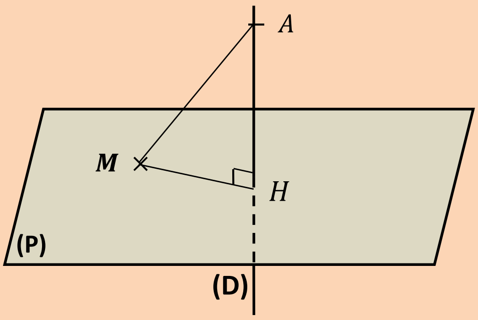
Définitions

- Soit A un point et (P) un plan de l'espace. Soit (D) l'unique droite passant par A et perpendiculaire à (P) en H.

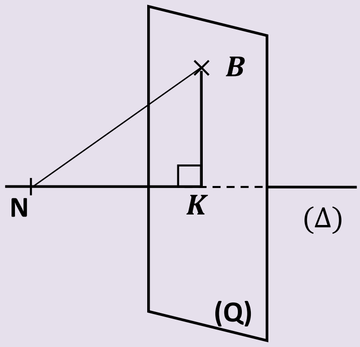
Alors le point H est appelé le **projeté orthogonal** du point A sur le plan (P)
La distance AH est appelée **la distance du point A au plan (P)**

- Soit B un point et (Δ) une droite de l'espace. Soit (Q) l'unique plan passant par B et perpendiculaire à (Δ) en K.

Alors le point K est appelé le **projeté orthogonal** du point B sur la droite (Δ).
La distance BK est appelée **la distance du point B à la droite** (Δ).



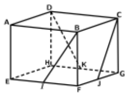
M $\in$ (P), H est le projeté orthogonal de A sur le plan (P) ; $AH < AM$



N $\in$ (Δ), K est le projeté orthogonal de B sur la droite (Δ) ; $BK < BN$

Exemple

Sur la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un cube. I, J et K sont des points respectifs des arrêtes $[EF]$, $[FG]$ et $[GH]$. p est la projection orthogonale sur le plan (EHD)



Complétons le tableau ci-dessous.

M	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K
p(M)	A	A	D	D	E	E	H	H	E	H

b -Propriétés

Propriété 1

Par une projection orthogonale sur un plan $(\mathcal{P})$, **l'image d'une droite** (D) est :

- un **singleton** si (D) est **perpendiculaire** à $(\mathcal{P})$.
- une **droite** si (D) n'est **pas perpendiculaire** à $(\mathcal{P})$.

Propriété 2

Par une projection orthogonale sur un plan $(\mathcal{P})$, **l'image d'un segment** [AB] est :

- un **singleton** si la droite (AB) est **perpendiculaire** à $(\mathcal{P})$.
- un **segment** si la droite (AB) n'est **pas perpendiculaire** à $(\mathcal{P})$.

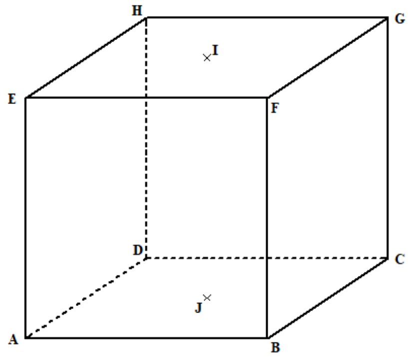
Propriété 3 (Projeté orthogonal du milieu d'un segment)

Par une projection orthogonale sur un plan (P), l'image du milieu d'un segment [AB] est le milieu de l'image du segment [AB] si (AB) n'est pas perpendiculaire à (P).

Exercices de fixation

Sur la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube. J est le centre du carré ABCD et I le centre du carré EFGH.

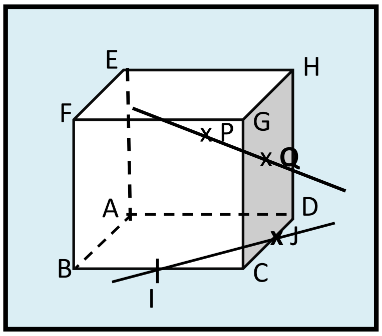
Détermine le projeté orthogonal du point I sur le plan (ABC). Justifie ta réponse.



Corrigé

Soit I le milieu du segment [HF].
Le projeté orthogonal de [HF] sur le plan (ABC) est le segment [DB].
Par conséquent, le projeté orthogonal de I sur le plan (ABC) est le milieu de [DB] donc le point J.

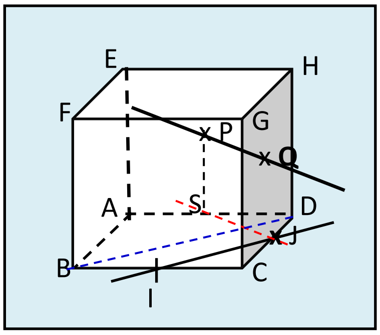
C. SITUATION COMPLEXE

Soit ABCDEFGH un cube. I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[BC]$ et $[CD]$. P et Q sont les centres respectifs des faces AEHD et CDHG. Lors du cours le professeur de Mathématiques d'une classe de 1ere C affirme que : « les droites (PQ) et (IJ) sur la figure ci-contre sont orthogonales non sécantes». Il donne la démonstration à faire en exercice en classe et accorde trois points en bonus au premier élève qui aura fait une démonstration correcte. Etant élève de cette classe et désireux d'obtenir les points bonus, justifie cette affirmation du professeur de Mathématiques	

Solution

Pour répondre à la question, nous allons nos connaissances sur la leçon orthogonalité dans l'espace. Pour ce faire, nous allons :

- Justifier que les deux droites sont non sécantes
- Justifier que les deux droites sont orthogonales



Montrons que les droites (IJ) et (PQ) sont non sécantes

Soit (Π) le plan médiateur de l'arête [AE].
$(IJ) \subset (ABC)$ et $(PQ) \subset (\Pi)$ or , $(ABC) // (\Pi)$ (disjoints) les droites (IJ) et (PQ) sont disjointes car appartenant à des plans disjoints. Elles ne sont pas sécantes.

Montrons que les droites (IJ) et (PQ) sont orthogonales. Pour cela nous allons utiliser la définition de droites orthogonales.

Soit J est le projeté orthogonal de Q sur le plan (ABC). Soit S le projeté orthogonal de P sur le plan (ABC). Alors les droites (SJ) et (PQ) sont parallèles car $(ABC) // (\Pi)$.

I milieu de [BC] et J milieu de [CD] ; d'après la propriété de la droite des milieux dans le triangle BCD, $(IJ) // (BD)$. Par conséquent, $(SJ) \perp (BD)$.

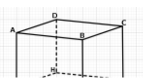
Dns le triangle ACD, S milieu de [AD] et J milieu de [CD] ; d'après la propriété de la droite des milieux dans le triangle ACD, $(SJ) // (AC)$. Or (AC) perpendiculaire à (BD), par conséquent, $(SJ) \perp (BD)$.

En définitive, (SJ) *perpendiculaire à* (BD) ; $(SJ) // (PQ)$, $(BD) // (IJ)$ et donc (PQ) ⊥ (IJ).

D-EXERCICES

1. **EXERCICES DE FIXATION**

Exercice 1



Sur la figure ci-dessous $ABCDEFGH$ est un cube.

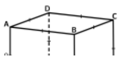
Justifie que la droite (EF) est orthogonale au plan (BFG).

Corrigé

(BF) et (GF) sont deux droites sécantes du plan (BFG) or (EF) est orthogonale aux deux droites (BF) et (GF) ; on en déduit que la droite (EF) est perpendiculaire au plan (BFG).

Exercice 2

La figure ci-dessous représente un cube. Les points Q et R désignent les milieux respectifs des arêtes $[AE]$ et $[BF]$



1) Justifie que les droites (AE) et (DC) sont orthogonales.

2) Justifie que les droites (AR) et (HG) ne sont pas orthogonales.

CORRIGÉ

1) $(AE)//(BF)$ et $(DC)//(AB)$ or (BF) et (AB) sont perpendiculaires en B, donc (AE) et (DC) sont orthogonales.

2) $(AR)//(QF)$ et $(HG)//(EF)$ or (QF) et (EF) ne sont pas perpendiculaires, donc (AR) et (HG) ne sont pas orthogonales.

Exercices 3

Réponds par vrai (V) ou faux (F)

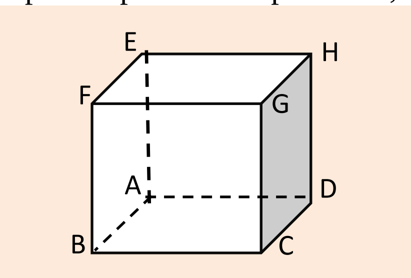
	Affirmations	V ou F
1	Deux droites perpendiculaires sont orthogonales	
2	Deux droites orthogonales sont perpendiculaires	
3	Deux plans perpendiculaires à un même plan sont parallèles	
4	Deux droites orthogonales à une même troisième sont parallèles	
5	Toute droite orthogonale à deux droites parallèles d'un plan (P), est orthogonale à ce plan (P).	
6	Par un point donné, il passe une unique droite orthogonale à une droite donnée.	
7	Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles	

SOLUTION

1. V 2. F 3. V 4. F 5.F 6. V 7. V

Exercice 4

A partir du cube ABCDEFGH ci-dessous, et pour chaque affirmation, choisis la ou les bonnes réponses parmi les réponses A, B et C du tableau

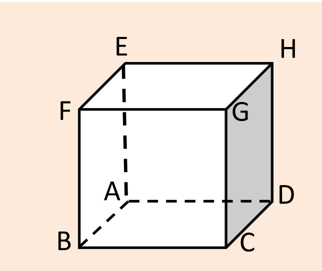


	AFFIRMATIONS	A	B	C
1	La droite (AB) est perpendiculaire à…	(AD)	(EH)	(GH)
2	La droite (AB) est orthogonale à…	(CG)	(CD)	(GH)
3	La droite (BD) est orthogonale à…	(AE)	(AEH)	(ACD)
4	Le projeté orthogonal de B sur la droite (EH) est …	A	E	H
5	Le projeté orthogonal de G sur le plan (AED) est….	A	E	H
6	La distance de H au plan (AED) est…	HE	0	HD
7	La distance de F à la droite (HD) est…	FD	FH	FE
8	Le triangle … est rectangle	EBG	HEC	AEC

Solution

1. A 2. A 3. A 4. E 5. C 6. B 7.B 8. B-C

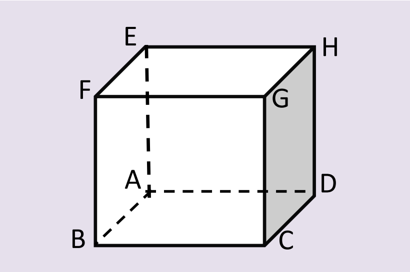
Exercice 5



La figure ci-dessus est le cube ABCDEFGH

1. Détermine le projeté orthogonal de G sur (ABF). F
2. Détermine la distance de B au plan (EGH).
3. Cite 3 droites perpendiculaires à la droite (EF).
4. Cite 3 droites orthogonales et non perpendiculaires à la droite (EF).
5. Cite 3 plans orthogonaux au droite (CD).
6. Cite 3 plans orthogonaux au plan (CDH).

On utilisera le cube ABCDEFGH pour résoudre les exercices allant de Ex 6 à Ex10.



<u>Exercice 6</u> : *L'objet de cet exercice est d'utiliser la définition pour justifier que deux droites sont orthogonales*

1. Démontre que : (BC) // (AD) et (HD) // (AE)
2. Déduis-en que : (BC) ⊥ (HD)

<u>Exercice 7</u> : *L'objet de cet exercice est d'utiliser la définition pour justifier l'orthogonalité entre une droite et un plan.*

1. Démontre que : (AB) ⊥ (AD) et (AB) ⊥ (AE)
2. Déduis-en que la droite (AB) est orthogonale au plan (AHD)

<u>Exercice 8</u> : *L'objet de cet exercice est d'utiliser la propriété fondamentale pour justifier l'orthogonalité entre deux droites.*

1. Démontre que : (AB) ⊥ (AHD).
2. Déduis-en que : (AB) ⊥ (HD).

<u>Exercice 9</u> : *L'objet de cet exercice est d'utiliser la définition pour justifier l'orthogonalité entre deux plans.*

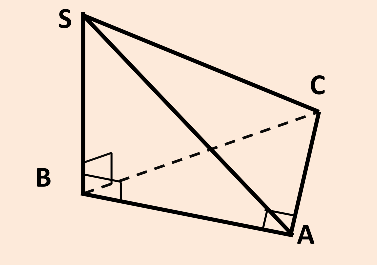
1. Démontre que : (AB) ⊥ (AHD).
2. Déduis-en que : (AEB) ⊥ (AHD).

<u>Exercice 10</u> *L'objet de cet exercice est de trouver le projeté orthogonal d'un point sur une droite ou un plan et de calculer la distance d'un point à une droite ou à un plan*

1. a) Justifie que E est le projeté orthogonal de A sur le plan (FHG).
   b) Déduis-en, la distance de H à la droite (HG)
2. a) Justifie que D est le projeté orthogonale de C sur le plan (EHA).
   b) Déduis-en, la distance de C au plan (EHA).

D.2. EXERCICES DE RENFORCEMENT ET D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 11



La figure ci-dessus est un tétraèdre SABC tel que :
- La droite (SB) est orthogonale au plan ABC
- Le triangle ABC est rectangle en A

1. Démontre que la droite (AC) est orthogonale à la droite (SB).
2. Déduis-en que les plans (SAB) et (SAC) sont perpendiculaires

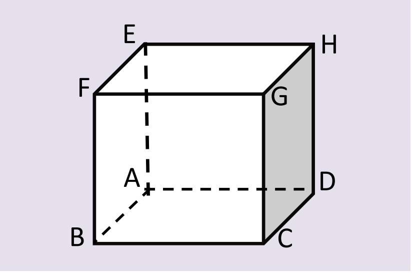
CORRIGÉ

1. (SB) $\perp$ (ABC) et (AC) $\subset$ (ABC). Donc (AC) $\perp$ (SB).

2. (AC) $\subset$ (SAC) ; (AB) $\subset$ (SAB) et (SB) $\subset$ (SAB)
   (AC) $\perp$ (SB) ; (AC) $\perp$ (AB) ; (AC) et (SB) sont sécantes en B donc (AC) $\perp$ (SAB).
   Par conséquent les plans (SAB) et (SAC) sont perpendiculaires.

Exercice 12 Orthogonalité entre les plans

On donne ci-dessous le cube ABCDEFGH



1. Démontre que : (ABC) $\perp$ (AEC)
2. Démontre que : (AEC) $\perp$ (HDB)
3. Démontre que : (FCH) $\perp$ (AEG)

Indications :
1. on étudiera l'orthogonalité entre (AE) et (ABC))
2. on étudiera l'orthogonalité entre la droite (AC) et les droites (BD) et (HD))
3. on étudiera l'orthogonalité entre la droite (FH) et les droites (EG) et (AE))

CORRIGE

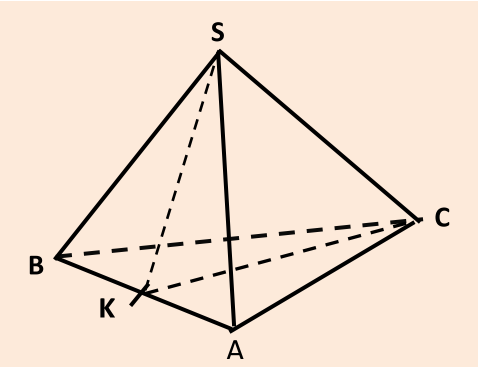
1) $(AE)\perp(AD)$ et $(AE)\perp(AB)$ (AB) et (AD) sont incluses dans (ABC) donc (AE) est perpendiculaire au plan (ABC). La droite (AE) étant incluse dans le plan (AEC) on en déduit que les plans (ABC) et (AEC) sont perpendiculaires.

2) $(AC)\perp(BD)$ car ABCD est un carré. (AC) et (HD) sont orthogonales car $\begin{cases}(AC)\perp(CG)\\(CG)//(HD)\end{cases}$ par conséquent (AC) est perpendiculaire au plan (HDB) et comme (AC) est incluse dans le plan (AEC) alors les plans (AEC) et (HDB) sont perpendiculaires.

3) $(FH)\perp(EG)$ car EFGH est un carré. (FH) et (AE) sont orthogonales car $\begin{cases}(FH)\perp(FB)\\(FB)//(AE)\end{cases}$ par conséquent (FH) est perpendiculaire au plan (AEG) et comme (FH) est incluse dans le plan (FCH) alors les plans (FCH) et (AEG) sont perpendiculaires.

Exercice 13

La figure ci-dessous est un tétraèdre régulier SABC c'est-à-dire que toutes ses faces sont des triangles équilatéraux. On désigne par K le milieu de l'arête$[AB]$.



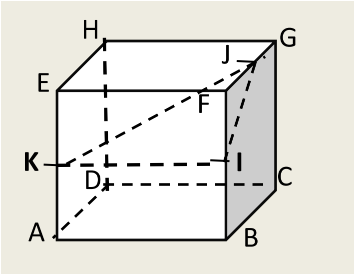
1. Démontre que la droite (AB) est orthogonale à la droite (SC)
2. Soit G le centre de gravité du tétraèdre SABC et H le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).
   a) Justifie que H est le centre de gravité du triangle ABC
   b) Justifie que $3\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GS}=\vec{0}$

Solution

1. Pour cela, nous allons montrer que la droite (AB) est orthogonale à un plan contenant (SC).
   Considérons le triangle équilatéral SAB. K est milieu de [AB] donc (SK) est perpendiculaire à (AB).
   De même en considérant le triangle équilatéral ABC, K est milieu de [AB] donc (CK) est perpendiculaire à (AB).
   Donc la droite (AB) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (SKC). Donc (AB) ⊥ (SKC), d'où (AB) ⊥ (SC).

2. a) (SH) est la hauteur du tétraèdre régulier SABC et G ∊ (SH). Donc H est le centre de gravité ABC.
   b) G est le centre de gravité du tétraèdre SABC alors $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GS}=\vec{0}$.
   $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GS}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{GS}=\vec{0}$
   $\Rightarrow 3\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{GS}=\vec{0}$
   $\Rightarrow 3\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GS}=\vec{0}$ car H est le centre de gravité ABC.

Exercice 14



Sur la figure ci-dessus, ABCDEFGH est un cube. I, J et K sont les milieux respectifs de $[BF]$, $[FG]$ et $[AE]$

1. Démontre l'orthogonalité entre les droites et les plans dans les cas suivants :
 a) (IK) et (ADE)
 b) (BE) et (ADG)
 c) (ED) et (IJK)

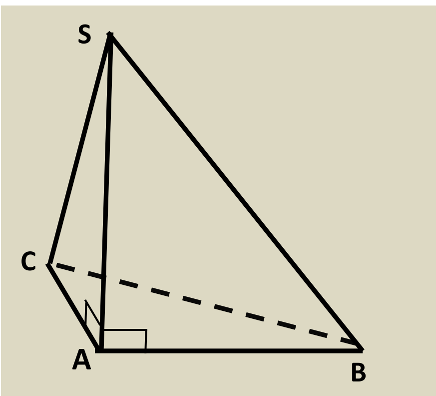
2. Démontre l'orthogonalité entre les droites dans les cas suivants :
 a) (AC) et (BF)
 b) (IK) et (CF)
 c) (IJ) et (CD)

Indications :
1b. (BE) ⊥ (AD) et (BE) ⊥ (DG) et conclure
1c. (ED) ⊥ (BG) et (BG)//(IJ) et conclure

Exercice 15 **(Arêtes opposées orthogonales)**

Dans un tétraèdre, on appelle arêtes opposées, deux arêtes qui n'ont aucun sommet commun.
La figure ci-dessous est un tétraèdre SABC tel que :
- La droite (SA) est orthogonale au plan ABC
- Le triangle ABC est rectangle en A

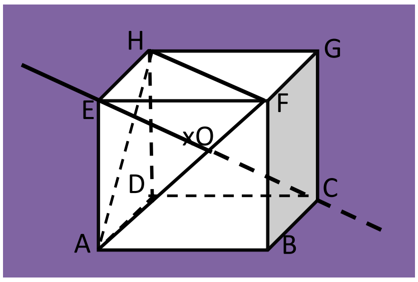
Démontre que les arêtes opposées de ce tétraèdre sont orthogonales. C'est à dire démontre que:
1. (SB) ⊥ (AC)
2. (SA) ⊥ (BC)
3. (SC) ⊥ (AB)



Indications :
1. Justifier que : (AC) ⊥ (ABS) et conclure
2. Propriété fondamentale
3. Justifier que : (AB) ⊥ (SCA) et conclure

Exercice 16

La figure ci-dessous est un cube ABCDEFGH d'arête a
L'objet de cet exercice est de démontrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (AHF) et de calculer la distance du point E au plan (AHF)



1. a) Démontre que la droite (AH) est orthogonale au plan (EDC)
   b) Déduis-en que : (EC) ⊥ (AH)
2. a) Démontre que : (AF) ⊥ (EB) et (AF) ⊥ (BC)
   b) Déduis-en que : (AF) ⊥ (EBC)
3. Déduis-en que la droite (EC) est orthogonale au plan (AHF)
4. On suppose que (EC) et (AHF) se rencontrent en O.
   a) Quelle est la nature du triangle AHF ?
   b) Démontre que O est le centre de gravité du triangle AHF. (*On pourra justifier que la droite (EC) est axe de symétrie du cercle circonscrit au triangle AHF*)

5.
a) Justifie que
E = $\text{bar}\{(\text{F}; 1), (\text{H}; 1), (\text{A}; 1), (\text{C}; -1)\}$
b) En utilisant l'isobarycentre O de A, H et F, détermine la position de O sur $[EC]$.
c) Calcule la distance EC en fonction de l'arête a
d) Déduis-en que la distance du point E au plan (AHF) est égale à : $EO = \frac{\sqrt{3}}{3}a$