MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ECOLE A LA MAISON

SECONDAIRE

1ère C
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 12 heures   Code :

Compétence 1 — **Traiter des situations relatives aux calculs algébriques et aux fonctions**

Thème 2 — **Fonctions**

Leçon 11 : ETUDE ET REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

Ta tante a une entreprise qui fabrique des jus de fruits. Pour des contraintes de fabrication et de conservation, elle fabrique un nombre de jus ne pouvant excéder 100. Chaque jus est vendu à 100F CFA et on suppose que tous les jus fabriqués sont vendus. Le coût unitaire de production journalière par jus est fonction de la quantité produite et vérifie la relation suivante : $V(x) = x^2 - 130x + 4225$.
Afin de rentabiliser son activité, ta tante te sollicite pour lui indiquer la quantité exacte de jus de fruits à fabriquer pour un profit maximal.
Par solidarité, toute la classe décide de t'aider à répondre à la préoccupation de ta tante en étudiant la fonction V.

B. CONTENU DU COURS

I –PARITE

Soit f une fonction de IR vers IR d'ensemble de définition D_f et (C_f) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. Fonction paire

a) Définition

Une fonction f de IR vers IR d'ensemble de définition D_f est dite paire lorsque pour tout x élément de D_f, on a : $-x \epsilon D_f$ et $f(-x) = f(x)$.

Exemple

Les fonctions : $x \longmapsto c$ $(c \epsilon IR)$, $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto |x|$ et $x \longmapsto cos x$ sont paires.

la fonction f de IR vers IR définie par : $f(x) = \frac{2}{1+|x|}$ est paire car l'ensemble de définition Df de la fonction f est IR et donc pour tout x de Df, on a $-x \in Df$.

Ensuite pour tout x de Df, $f(-x) = \frac{2}{1+|-x|}$; $|-x| = |x|$; donc $f(-x) = f(x)$.

b) Interprétation graphique

Propriété

La fonction f est paire si et seulement si la droite (OJ) est un axe de symétrie de (C_f) dans un repère orthogonal (O, I, J).

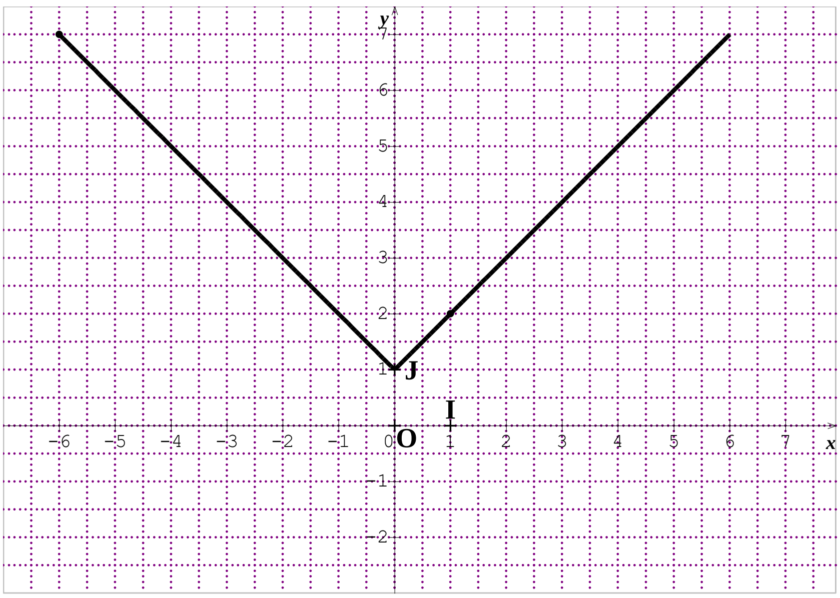
Exemple

La courbe représentative de la fonction : $x \longmapsto x^2$ admet la droite des ordonnées (OJ) comme axe de symétrie dans un repère orthogonal (O, I, J).

Exercice de fixation

La représentation ci-dessous, est celle d'une fonction de f de $[-6; 6]$ dans IR dans un repère orthonormé (O, I, J). Cette représentation graphique admet la droite (OJ) comme axe de symétrie.

Justifie que la fonction f est paire.



SOLUTION

Par hypothèse, la représentation graphique de f admet la droite (OJ) comme axe de symétrie dans repère orthonormé (O, I, J). Donc la fonction f est paire.

2. Fonction impaire

a) Définition

Une fonction f de IR vers IR d'ensemble de définition D_f est dite impaire lorsque pour tout x élément de D_f, on a : $-x \epsilon D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Exemple

Les fonctions : $x \longmapsto x$, $x \longmapsto x^3$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $x \longmapsto sinx$ sont impaires.

La fonction f de IR vers IR définie par : $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ est impaire car l'ensemble de définition Df de la fonction f est IR et donc pour tout x de Df, on a $-x \in Df$.

Ensuite pour tout x de Df, $f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+(x)^2}$. il en résulte que : $f(-x) = -f(x)$.

b) Interprétation graphique

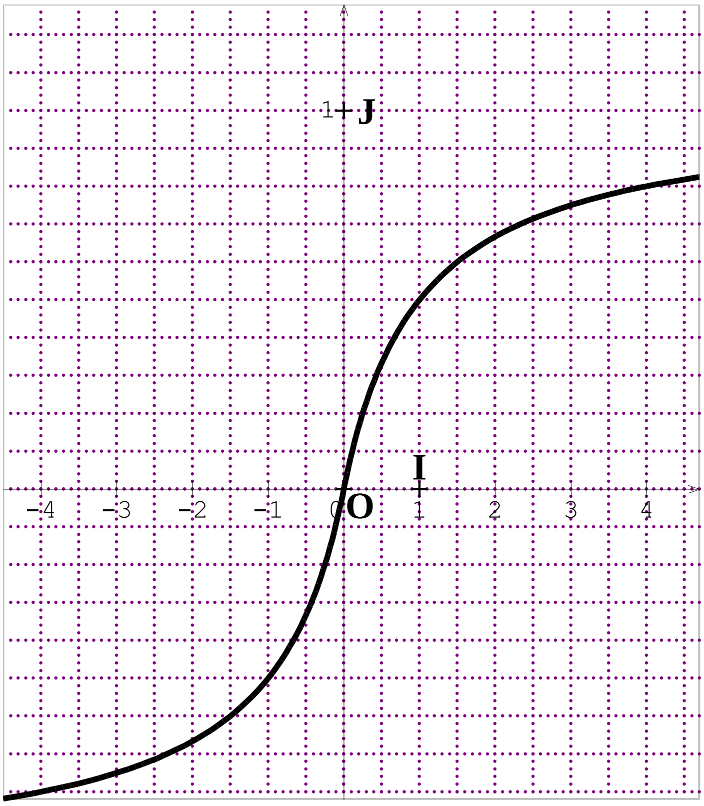
Propriété

La fonction f est impaire si et seulement si le point O est un centre de symétrie de (C_f) dans le plan rapporté à un repère (O, I, J).

Exercice de fixation

La représentation ci-dessous, est celle d'une fonction de f de $[-4; 4]$ dans IR dans un repère (O, I, J).

Cette représentation graphique admet le point O comme centre de symétrie.



Justifie que la fonction f est impaire.

SOLUTION

Par hypothèse, la représentation graphique de f admet le point O comme centre de symétrie dans repère (O, I, J). Donc la fonction f est impaire.

Remarques

- Un sous- ensemble E de IR est dit symétrique par rapport à zéro lorsqu'il vérifie la propriété suivante : $\forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{\epsilon}$ E, on a $-x\epsilon$E.

  Exemples : Les ensembles IR, IR\{0} , IR\{-2 ;2} , $[-1;1]$ et $]-3;3[$ sont symétriques par rapport à 0.
- Lorsque la fonction f est paire ou impaire, il suffit de l'étudier sur l'ensemble $D_f \cap [0;+\infty[$. La courbe obtenue est ensuite complétée par symétrie par rapport à la droite (OJ) si $f$est paire ou par symétrie par rapport au point O si f est impaire.

II-ELEMENTS DE SYMETRIE

1. Axe de symétrie

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Soit une droite (D) d'équation : $x = a$ et une fonction f de IR vers IR d'ensemble de définition Df.

La droite (D) est un axe de symétrie de la courbe de f si et seulement si pour tout x de Df on a :

$(2a - x) \in Df$ et $f(2a - x) = f(x)$.

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Soit une droite (D) d'équation : $x = 3$ et une fonction f de IR vers IR définie par :

$f(x) = -2(x-3)^2 + 5$.

Démontre que la droite (D) est un axe de symétrie de la courbe de f.

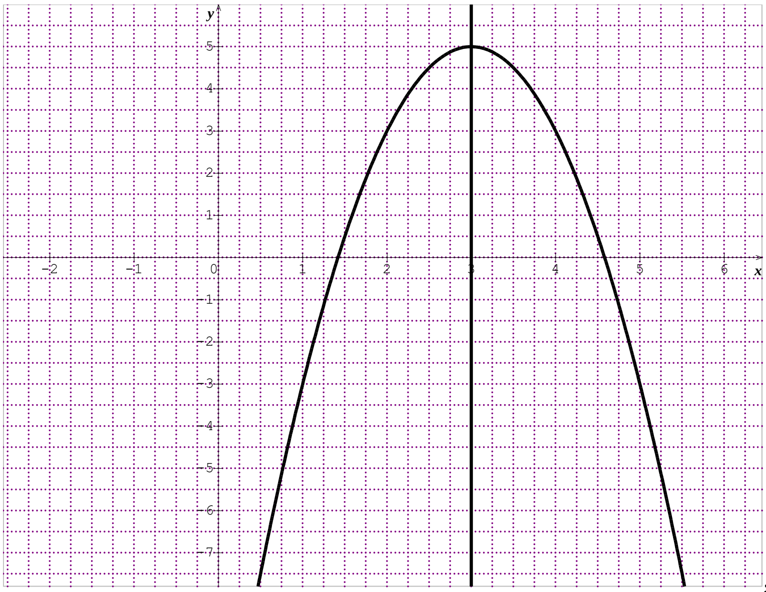
SOLUTION

L'ensemble de définition de f est $Df = IR$. Donc pour tout x de Df on a $6 - x$ appartient à Df.

Ensuite $f(6-x) = -2(6-x-3)^2 + 5 = -2(x-3)^2 + 5$. Donc $f(6-x) = f(x)$.

D'où le résultat.

On donne ci-dessous, un aperçu de la courbe de f et de son axe de symétrie.



Remarque :on peut aussi utiliser la propriété ci- dessous

La droite $(D): x = a$ est un axe de symétrie de (c_f) si et seulement si :

Pour tout $h \in \mathbb{R}; tel\ que, (a+h) \in D_f\ \ ona\ (a-h) \in D_f\ et\ f(a+h) = f(a-h)$

2. Centre de symétrie

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soit un point A de couple de coordonnées (a, b) et une fonction f de IR vers IR d'ensemble de définition Df.

Le point A est un centre de symétrie de la courbe de f si et seulement si pour tout x de Df on a :

$2a - x \in Df$ et $f(2a-x) + f(x) = 2b$.

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soit A de coordonnées (2 ;3) et une fonction g de IR vers IR définie par :

$g(x) = (x-2)^3 + 3.$

Démontre que le point A est un centre de symétrie de la courbe de g.

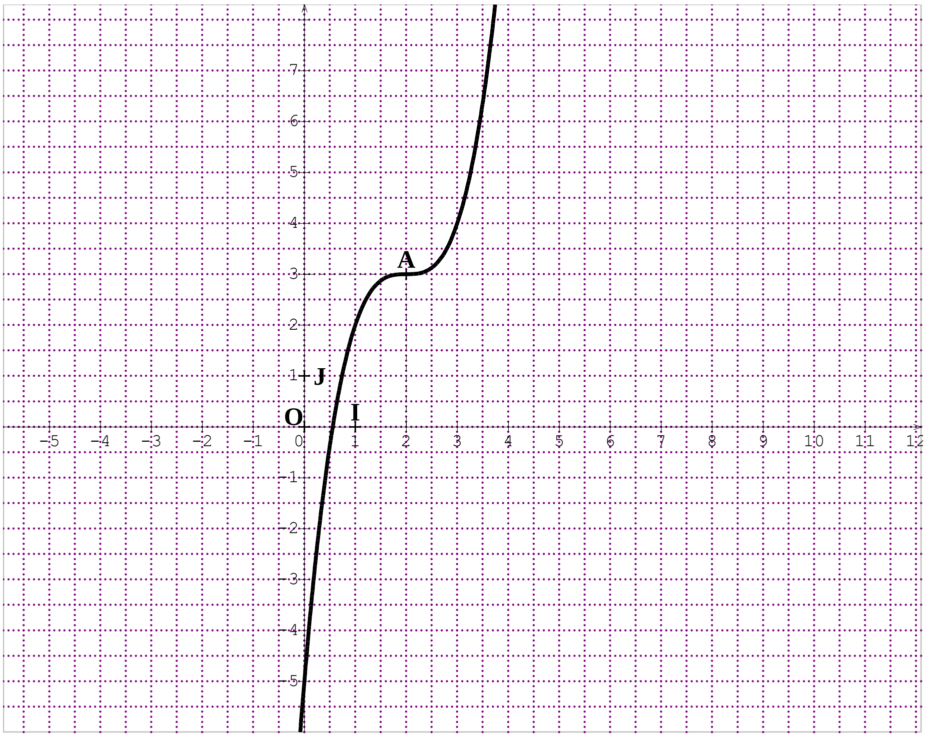
<u>réponse</u>

L'ensemble de définition de g est $Dg = IR$. Donc pour tout x de Dg on a $4-x$ appartient à Dg.

Ensuite : $g(4-x) + g(x) = (4-x-2)^3 + 3 + (x-2)^3 + 3$.

$g(4-x) + g(x) = (-x+2)^3 + (x-2)^3 + 6$. Sachant que $(-x+2)^3 = -(x-2)^3$, on obtient finalement : $g(4-x) + g(x) = 6$. D'où le résultat.

On donne ci-dessous, un aperçu de la courbe de g et de son centre de symétrie.



Remarque :on peut aussi utiliser la propriété ci dessous
La droite $\Omega(a; b)$ est un centre de symétrie de (c_f) si et seulement si :
Pour tout $h \in \mathbb{R}; tel\ que, (a+h) \in D_f\ \ ona\ (a-h) \in D_f\ et\ \ \frac{f(a+h)f(a-h)}{2} = b$

3. <u>Fonction périodique</u>

<u>Définition</u>

Soit T un nombre réel strictement positif.
Une fonction f est dite périodique de période T lorsque $\forall x \in D_f$:
$x + T\ \in D_f\ ,\ \ x - T\ \in\ D_f\qquad et\ \ f(x+T) = f(x).$

Remarque

on dit souvent qu'une fonction f est T-périodique pour exprimer qu'elle est périodique de période T.

Exemple

- Les fonctions : $x \longmapsto cosx$, $x \longmapsto sinx$ sont périodiques de période 2π.
- La fonction : $x \longmapsto tanx$ est périodique de période π.

La fonction f de IR vers IR définie par : $f(x) = sin(2x)$ est π-périodique

- car l'ensemble de définition de f est IR ; et donc pour tout x de IR, $x + \pi$ et $x - \pi$ appartiennent à IR.
- Ensuite $sin\big(2(x + \pi)\big) = \sin(2x + 2\pi) = \sin\,(2x)$ car la fonction sinus est 2π-périodique.

Donc $f(x + \pi) = f(x)$.

Remarques

- Si T est une période de f alors $\forall$ ($k\epsilon\mathbb{Z}\backslash\{0\}$) $f(\,x + kT) = f(x)$.
- Si f est périodique de période T, il suffit de l'étudier sur l'ensemble $D_f \cap [a; a + T[$. La courbe obtenue est ensuite complétée par les translations de vecteurs
  T$\overrightarrow{OI}$ et -T$\overrightarrow{OI}$.

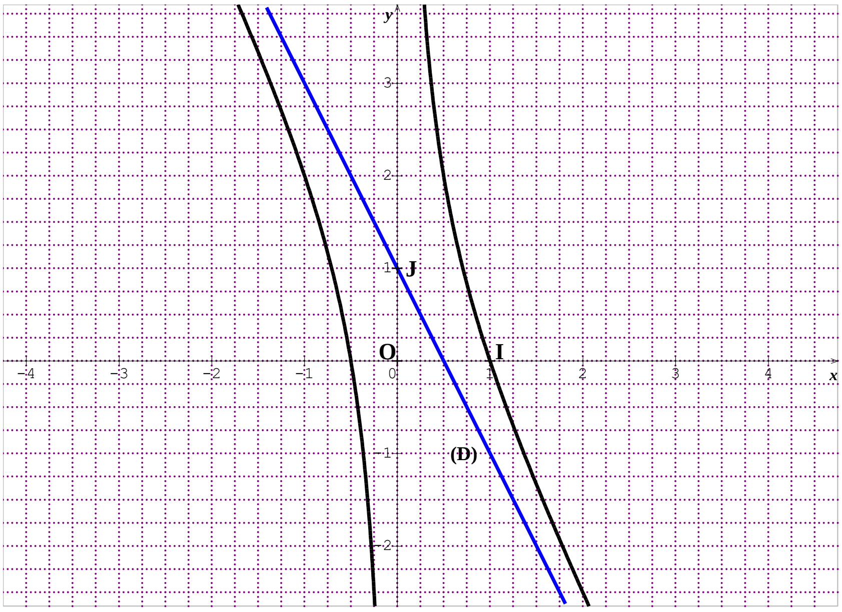
III- ASYMPTOTE OBLIQUE

Définition

f est une fonction et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthogonal.
Soit a et b des nombres réels ($a \neq 0$).
Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$), on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à (C_f) en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Exemple

Sur la représentation ci-dessous, la droite (D) est une asymptote (oblique) à la courbe en $(+\infty)\ et\ en (-\infty)$.



C- SITUATION COMPLEXE

Des élèves de $1^{ère}D$ ont découvert le texte suivant dans une revue. « Une entreprise fabrique et vend chaque jour un nombre x d'ampoules dite `` économique de 20 watts''. Chaque ampoule est vendue à 100 francs CFA. Il a été établi que le coût de production de x ampoule(s) est donné par la fonction suivante : $U(x) = x - 10 + \frac{900}{x}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[10\,;100]$. Le Directeur de l'entreprise cherche à déterminer le nombre d'ampoules à fabriquer pour minimiser le coût de production et avoir un bénéfice maximal ».

Impressionnés par cette formule donnant le coût de production, tu cherches à répondre aux préoccupations du Directeur.

Réponds, à l'aide d'une argumentation basée sur tes connaissances mathématiques aux préoccupations du Directeur.

SOLUTION

Pour répondre à la préoccupation du Directeur, je vais faire une étude de fonction.

Je vais faire l'étude de la fonction U afin de déterminer son minimum, le point auquel ce minimum sera atteint correspondra au nombre d'ampoules à fabriquer pour minimiser le coût de production pour avoir un bénéfice maximal.

$D_U = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$U'(x) = x' - 10' + \left(\frac{900}{x}\right)' = 1 - \frac{900}{x^2} = \frac{(x-30)(x+30)}{x^2}$$

$\forall x \in D_U, x^2 > 0; U'$a le signe de $(x-30)(x+30)$.

Tableau de signe

x	$-\infty$		-30		30		$+\infty$
$x^2 - 900$		+	0	-	0	+	

x	10		30		100
$U'(x)$		-	0	+	
U		↘	50	↗	

50 est le minimum de la fonction U est 50 et il est atteint en 30.

Le nombre d'ampoules à fabriquer pour minimiser le coût de production et avoir un bénéfice maximal est 30.

D. EXERCICES

Exercice1

f est une fonction de IR vers IR. Dans chacun des cas suivants, étudie la parité de f.

1) $f(x) = 3x^4 - |x| + 1$; 2) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$; 3) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$; 4) $f(x) = x^2 + 4x - 8$.

1) SOLUTION
2) $D_f = \mathbb{R}$. Donc D_f est symétrique par rapport à 0.

$f(-x) = 3(-x)^4 - |-x| + 1 = 3x^4 - |x| + 1 = f(x)$ donc la fonction est paire.

3) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 ;1\}$. Donc D_f est symétrique par rapport à 0.

$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -f(x)$, alors la fonction est impaire.

4) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.$D_f$ n'est pas symétrique par rapport à 0 car $-1 \in D_f ; et\ 1 \notin D_f$. La fonction n'est ni paire ni impaire.
5) $D_f = \mathbb{R}$. Donc D_f est symétrique par rapport à 0.

$f(-x) = (-x)^2 + 4 \times (-x) - 8 = x^2 - 4x - 8$; $f(-x) \neq f(x) et f(-x) \neq -f(x)$; par conséquent, la fonction n'est ni paire ni impaire.

Exercice 2

Soit f la fonction polynôme définie par : $f(x) = x^2 - 4x + 7$ de représentation graphique (C_f) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
Démontre que la droite (D) d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de (C_f).

SOLUTION

on pose $g(x) = f(x+2)$ alors $g(x) = (x+2)^2 - 4(x+2) + 7 = x^2 + 3$.

$D_g = \mathbb{R}$. Donc D_g est symétrique par rapport à 0.

$g(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = g(x)$, alors la fonction g est paire, d'où la droite (D) d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de (C_f).

Exercice 3

Soit f la fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{x^2+5x-1}{x+1}$. On note (C_f), la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
Démontre que le point A(-1 ;3) est un centre de symétrie de (C_f).

SOLUTION

On pose $f(-2-x) + f(x) = \frac{x^2-x-7}{-x-1} + \frac{x^2+5x-1}{x+1} = \frac{6(x+1)}{x+1} = 6 = 2 \times 3$; alors le point A(-1 ;3) est un centre de symétrie de (C_f).

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{5}\right)$.
Démontre que f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.

SOLUTION

$D_f =]-\pi; \pi[$; alors $\forall x \in D_f, x + \frac{2\pi}{3} x \in D_f \; et \; x - \frac{2\pi}{3} x \in D_f$.
$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left[3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{5}\right] = \cos\left(3x + 2\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{5} + 2\pi\right) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{5}\right)$ car cos est périodique de période 2π.
On a donc $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = f(x)$, par conséquent, f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$

Exercice 5

Soit f la fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x-1}$. On note (C_f), la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1) Démontre que pour tout x de D_f, $f(x) = 2x + 5 + \frac{4}{x-1}$
2) Démontre que la droite d'équation $y = 2x + 5$ est une asymptote à (C_f) en$+\infty$ et en $-\infty$.

SOLUTION

1) En effectuant la division euclidienne de $2x^2 + 3x - 1$ par -1 , on a $f(x) = 2x + 5 + \frac{4}{x-1}$

2) $f(x) - 2x + 5 = \frac{4}{x-1}$. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x-1} = 0$, alors la droite d'équation $y = 2x + 5$ est une asymptote à (C_f) en$+\infty$ et en $-\infty$.

Dans les exercices suivants, f est une fonction de IR vers IR. On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Exercice 6

Soit $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

1-Justifie que le point A(0 ;-1) est un centre de symétrie de (C).

2-Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3-a) Calcule la dérivée de f .

b) Etudie les variations de f sur $[0\,; +\infty[$ et dresse son tableau de variation.

4-a) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b) Etudie la position de (C) par rapport (T).

5- Trace la droite (T) et construis (C) sur $[0\,; +\infty[$ puis sur IR dans le plan muni du même repère orthonormé (O, I, J) tel que : OI = OJ = 1cm.

1- SOLUTION

2- On pose $g(x) = f(x + 0) + 1 = x^3 - 3x - 1 + 1 = x^3 - 3x$

$D_g = \mathbb{R}$, donc l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0.

$g(-x) = (-x)^3 - 3 \times (-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -g(x)$, alors g est impaire ; par conséquent le point A(0 ;-1) est un centre de symétrie de (C).

3- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

4- a) $f'(x) = (x^3 - 3x - 1)' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

b) Tableau de signe de f'

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

$\forall x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[, f'(x) \geq 0;$ alors f est croissante sur $]-\infty; -1]$ et sur [1 ;+∞[

$\forall x \in]-1; 1[, f'(x) \leq 0;$ alors f est strictement décroissante sur]-1 ;1[

Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

5- a) $y = f(0) + f'(0)(x - 0)$

$y = -1 - 3 \times x$

$(T): y = -3x - 1$

b) Position de (C) par rapport à (T)

$f(x) - y = x^3 - 3x - 1 - (-3x - 1)$

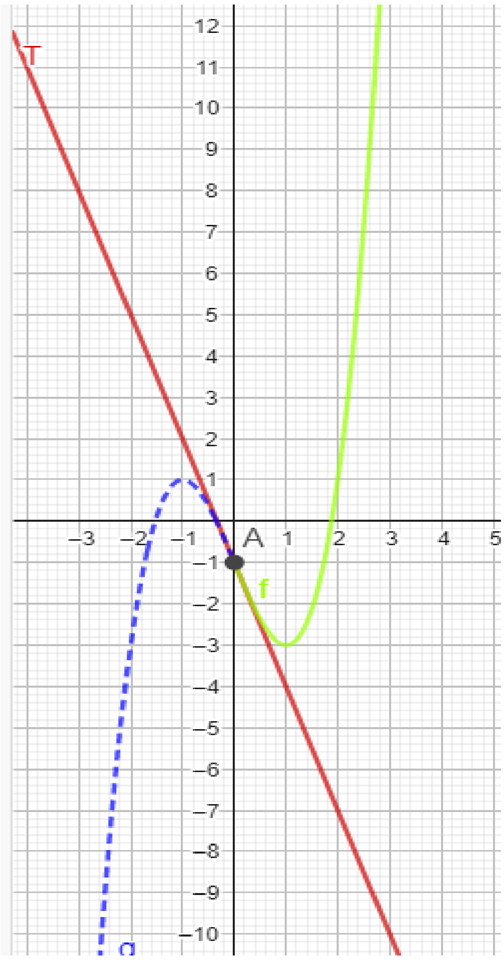
$= x^3 - 3x - 1 + 3x + 1$

$f(x) - y \ = x^3$

$x^3 \geq 0 \ sur \ [0; +\infty[\ et \ x^3 \leq 0 \ sur \ ] - \infty; 0]$; alors :

- Sur $] - \infty; 0]$, (T) est au-dessus de (C)
- Sur $[0; +\infty[$, (C) est au-dessus de (T).

6- Construction



Exercice 7

f est définie sur IR\{-1} par : $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

1-Calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Interprète graphiquement les résultats obtenus.

2-Calcule : $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x)$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.

3-a) Calcule la dérivée de f.

b) Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

4-Justifie que le point A(-1 ; 2) est un centre de symétrie de (C).

5-Construis la courbe (C) et ses asymptotes. Unité graphique : OI = OJ = 1cm.

1- SOLUTION

2- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{x} = 2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2$. Alors la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ $et - \infty$.

3- $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x) = -3 \times (-\infty) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x) = -3 \times (+\infty) = -\infty$. Alors la droite d'équation x= -1 est une asymptote verticale en +∞ et -∞.

4- a) $f'(x) = \frac{(2x-1)'(x+1)-(2x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$

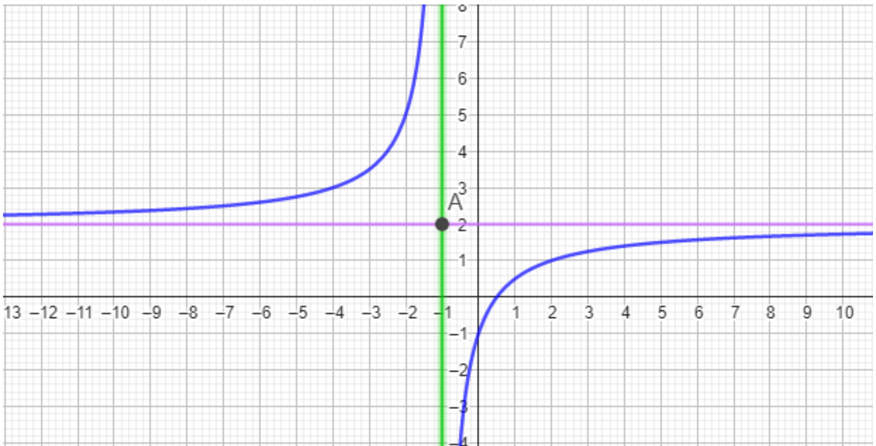
b) $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$; $\forall x \in D_f, (x+1)^2 > 0, donc\ f(x)' > 0$; alors f est croissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$

Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	
$f(x)$	2 ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	2

On pose $g(x) = f(x-1) - 2 = -\frac{3}{x}$; $D_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ donc l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0. $g(-x) = \frac{-(-x)}{3} = -g(x)$ donc g est une fonction impaire ; alors le point A(-1 ; 2) est un centre de symétrie de (C).

5- Construction



Exercice 8

$$f \text{ est définie sur } IR\backslash\{2\} \text{ par} : f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}.$$

1-Calcule : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x)$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.

2-Calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3-a) Détermine les réels a , b et c tels que : $\forall x \epsilon$ IR-{2}, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.

b) Justifie que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Etudie les positions de (C) par rapport à (D).

4-a) Justifie que : $\forall x \epsilon$ IR-{2}, $f'(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$.

b) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

5-Démontre que le point A(2 ; 1) est un centre de symétrie de (C).

6-Construis la courbe (C) et ses asymptotes. Unité graphique : OI = OJ = 1cm.

1- SOLUTION

2- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$; alors la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale en l'infini à (C).

3- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

4- a)

en effectuant la division euclidienne de $x^2 - 3x + 3$ par $x - 2$ on obtient

$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$ alors $a = 1$; $b = -1$ et $c = 1$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x - 1)] = x - 1 + \frac{1}{x-2} - (x - 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x-2} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$; la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Position de (C) et (D).

$f(x) - (x - 1) = \frac{1}{x-2}$

x	$-\infty$	2	$-\infty$
$x - 2$	-	0	+

- Sur $]-\infty; 2[$, (D) est au-dessus de (C)
- Sur $]2; +\infty[$, (C) est au-dessus de (D).

5- a) $f'(x) = \frac{(x^2-3x+3)'(x-2)-(x^2-3x+3)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$

b) $f'(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$; $\forall x \in D_f, (x-2)^2 > 0$ alors f' a le signe de $x^2 - 4x + 3$.

<u>Déterminons le signe de $x^2 - 4x + 3$.</u>

$\triangle = 4$; les deux racines du polynôme sont :$x_1 = 1 \; et \; x_2 = 3$. Alors :

pour $x \in [1; 2[\cup]2; 3], x^2 - 4x + 3 \leq 0 \;\; et \; pour \; x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[, x^2 - 4x + 3 \geq 0$

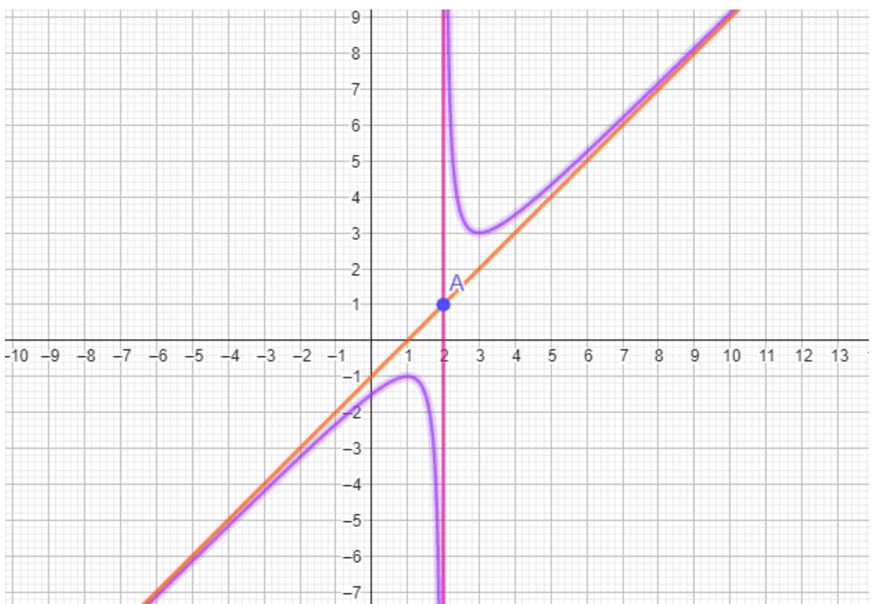
Par conséquent : $\begin{cases} f \; est \; décroissante \; sur [1; 2[\; et \; sur \;]2; 3] \\ f \; est \; croissante \; sur \;]-\infty; 1] \; et \; sur \; [3; +\infty[\end{cases}$

<u>Tableau de variation</u>

x	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	||	-	0	+
f	$-\infty$ ↗	-1	↘ $-\infty$	||	↘	3	↗ $+\infty$

6- On pose :$g(x) = f(x+2) - 1 = \frac{x^2+1}{x}$; $D_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Alors $\forall x \in D_g, -x \in D_g$.
$g(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} = -g(x)$, la fonction g est donc impaire. Alors le point A(2 ; 1) est un centre de symétrie de (C).

7- Construction



Exercice 9

Soit $f(x) = 2sinx + sin2x$.

1-a) Démontre que f est impaire et périodique de période 2π.

b) Justifie que l'on peut limiter l'ensemble d'étude à l'intervalle : I=$[0\ ;\ \pi]$.

2-Démontre que : $\forall x\epsilon\ IR, f'(x) = 2(2cosx - 1)(cosx + 1)$.

3-Etudie les variations de f sur l'intervalle I puis dresse son tableau de variation sur I.

4-Trace (C) sur I puis sur $\left[-\frac{7\pi}{3}\ ;\ \frac{7\pi}{3}\right]$. Unité graphique : OI = OJ = 1cm.

SOLUTION

1- a) f est définie sur $\mathbb{R}$, $f(-x) = 2\sin(-x) + \sin(-2x) = -2\sin(x) - \sin(2x) = -f(x)$, la fonction est donc impaire.

$$f(x + 2\pi) = 2\sin(x + 2\pi) + \sin(2(x + 2\pi)) = 2\sin(x + 2\pi) + \sin(2x + 2 \times 2\pi)$$

$f(x + 2\pi) = 2\sin(x) + \sin(2x) = f(x)$ car la fonction sin est périodique de période 2π .

b) f est périodique de période 2π, donc on peut l'étudier sur l'ensemble $D_f \cap [a; a + 2\pi]$ en prenant a=0 ; on restreint l'ensemble d'étude à $[0; 2\pi]$; la fonction étant impaire, on pourra donc l'étudier sur $[0; \pi]$ et compléter par la symétrie centrale de centre O.

2- $f'(x) = 2cox + 2\cos(2x)$comme $\cos(2x) = 2cos^2(x) - 1$ on obtient donc : $f'(x) = 2cox + 4cos^2(x) - 2 = 4cos^2(x) + 2\cos(x) - 2 = 2(cos^2(x) + \cos(x) - 1)$

En posant $\cos(x) = X$ et en calculant le discriminant du nouveau polynôme, on obtient deux racine -1 et $\frac{1}{2}$. On a donc : $2(cos^2(x) + \cos(x) - 1) = 2 \times 2(cosx + 1)\left(cosx - \frac{1}{2}\right) =$

$$2(cosx + 1)(2cosx - 1)$$

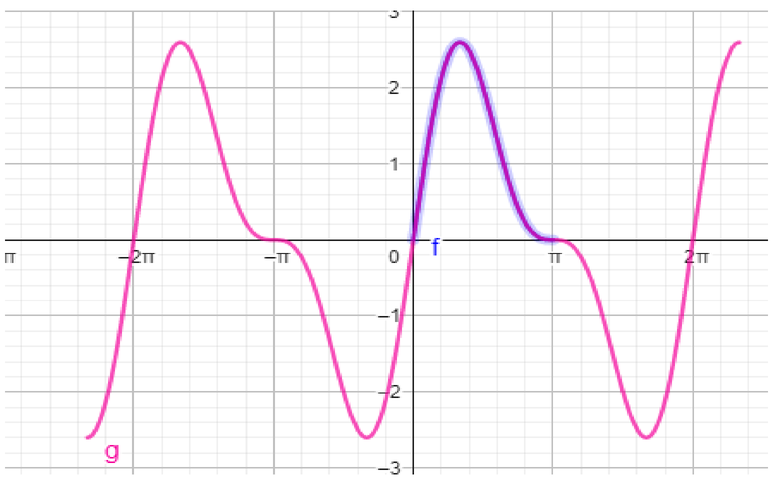
3- En résolvant l'équation $(cosx + 1)(2cosx - 1) = 0$ on a :

$cosx = -1\ ou\ cosx = \frac{1}{2}$, en résolvant sur I, on a $x = \pi\ ou\ x = \frac{\pi}{3}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$2cosx - 1$		+	0	-	
$cosx + 1$		+		+	0
$f'(x)$		+	0	-	0

Tableau de variation

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		+	0	-	0
f	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0



Exercice 10

Ta tante a une entreprise qui fabrique des jus de fruits. Pour des contraintes de fabrication et de conservation, elle fabrique un nombre de jus ne pouvant excéder 100. Chaque jus est vendu à 100F CFA et on suppose que tous les jus fabriqués sont vendus. Le coût unitaire de production journalière par jus est fonction de la quantité produite et vérifie la relation : $V(x) = x^2 - 130x + 4225$.

Afin de rentabiliser son activité, ta tante te sollicite pour lui indiquer la quantité exacte de jus de fruits à fabriquer pour un profit maximal.

1-Démontre que le bénéfice global $B(x)$ réalisé par l'entreprise pour x jus produits et vendus est : $B(x) = -x^2 + 130x - 4125$.

2-Dresse le tableau de variation de la fonction B.
3-Déduis le bénéfice maximal, puis indique pour quelle production elle est atteinte.

Exercice 11

Partie A

Soit p la fonction polynôme définie par : $p(x) = x^4 + 6x^2 - 16x + 9$.
1-Justifie que : $p(x) = (x-1)^2(x^2+2x+9)$.
2-Etudie le signe de $p(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

On considère la fonction f de IR vers IR définie par : $f(x) = \frac{x^3-x^2+3x+5}{x^2+3}$ et on note (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1-Détermine l'ensemble de définition D_f de f.
2-Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3-a) Justifie que : $\forall x \epsilon\ D_f$, $f(x) = x - 1 + \frac{8}{x^2+3}$.
b) Déduis-en que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.
c) Etudie les positions relatives de (C) et (D).
4-a) Justifie que : $\forall x \epsilon\ D_f$, $f'(x) = \frac{p(x)}{(x^2+3)^2}$.
b) Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.
5-Démontre qu'il existe un unique point A de (C) tel que la tangente à (C) en A soit parallèle à (D).
6-a) Démontre qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse -1 est :
$y = 2x + 2$.
b) Vérifie que : $\forall x \epsilon\ D_f$, $f(x) - (2x+2) = -\frac{(x+1)^3}{x^2+3}$.
c) Etudie les positions relatives de (C) et (T).
7-Trace les droites (D) et (T) et construis la courbe (C). Unité graphique : 1cm.