MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE L'ALPHABETISATION

MENET - FP

INISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT TECHN
ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ECOLE A LA MAISON

SECONDAIRE

$1^{ère}$C
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 06 heures Code :

Compétence 2 **Traiter des situations relatives à la modélisation de phénomènes aléatoires, à l'organisation et aux traitements de données**

Thème 2 **Modélisation de phénomènes aléatoires**

Leçon 10 : PROBABILITE

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

M. Konan a oublié le code secret de son compte bancaire. Après deux essaies infructueux, il appelle son épouse pour de l'aide. Celle-ci lui communique les quatre chiffres mais pas dans le bon ordre !

Ne disposant que d'un dernier essai, il joue la carte de la prudence en envisageant tous les cas et en quantifiant la chance qu'il a, de retirer l'argent, à l'ultime essai.

B –CONTENU DE LA LECON

I. VOCABULAIRES ET PROPRIETES

1- Vocabulaires et définition

a) Expérience aléatoire

Une expérience ou une épreuve aléatoire est une expérience dont on ne connait pas d'avance le résultat mais dont on connait les résultats possibles.

Exemples

1.

Expérience 1 : Le lancer d'un dé cubique parfaitement équilibré.
Expérience 2 : Le lancer d'une pièce de monnaie.

2.

Soit les expériences suivantes :

1. *Trois bouteilles de limonade : Fanta, Coca et Sprite sont posées sur une table.*
   « Choisir la bouteille de Fanta » n'est pas une expérience aléatoire.
2. *''Cinq boules numérotées de 1 à 5 sont placées dans un carton non transparent. Les boules ont la même taille et sont indiscernables au toucher.*
   « Choisir une boule parmi elles » est une expérience aléatoire.

b) Univers-Eventualité

$\mathcal{E}$ est une expérience aléatoire donnant un nombre fini de résultats possibles.
Chaque résultat possibles est appelé **éventualité.**
L'ensemble de ces résultats possibles est appelé **univers** des éventualités de $\mathcal{E}$.
On le note **U** ou **Ω.**

Exemple

EXPERIENCE ALEATOIRE	EVENTUALITES	UNIVERS
Lancer d'un dé	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6	$\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
Lancer d'une pièce	Pile (P) ou face (F)	$\{P; F\}$

Exemple2

En considérant le lancer de deux pièces de monnaie. Tous les résultats possibles (on dit qu'on écrit l'univers en extension) sont :

Soit U l'univers de toutes les éventualités.

$U = \{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$

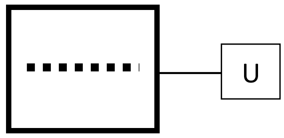
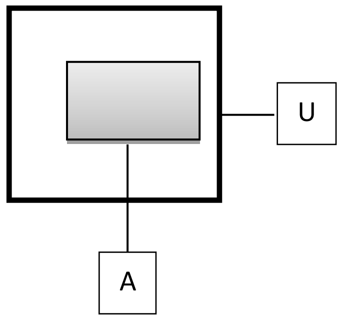
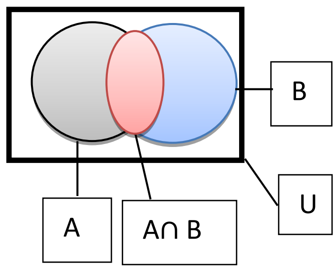
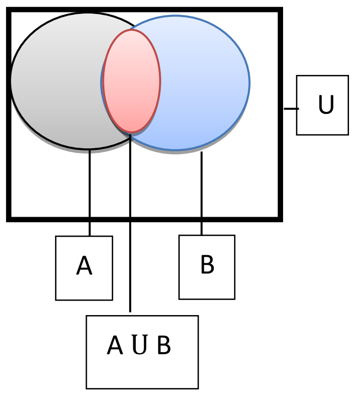
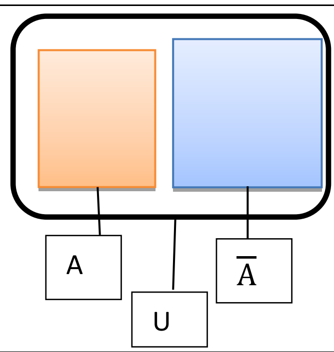
c) Evènement

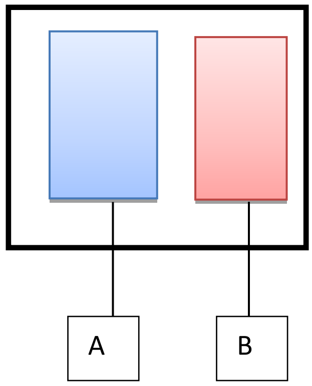
Définition
U étant l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, on appelle **évènement** de U, toute partie de U.

- Lorsque cette partie de U est un singleton, on l'appelle **événement élémentaire** ;
- Lorsque cette partie de U est l'ensemble vide, on l'appelle **évènement impossible** ;
- Lorsque cette partie de U est l'ensemble U, on l'appelle **évènement certain**.
  Exemple
- Lors d'un lancer de pièce de monnaie, le résultat obtenu est un évènement élémentaire :''soit pile'' ou ''face''.

- Lors d'un lancer de Dé (parfaitement équilibré et dont les faces sont numéroté de 1 à 6), obtenir le chiffre 7 est un événement impossible.
- Pour une femme qui porte une grossesse, ''accouché d'un garçon ou d'une fille'' est un événement certain.

<u>TABLEAU RECAPITULATIF</u>

	Langage des ensembles	**Langage des probabilités**	**Illustrations**
Univers	U est un ensemble $e_i \in U$	U est l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. e_i est une éventualité	
Evènement	$A \subset U$ $e_i \in A$ $\{e_i\} \subset U$ $A = \emptyset$ $A = U$	A est un évènement . e_i réalise l'évènement A. $\{e_i\}$ est un évènement élémentaire. L'événement A est impossible. L'évènement A est certain.	
Intersection de deux évènements	$A \cap B$ $e_i \in A \cap B$	L'évènement (A et B) e_i réalise l'évènement A et e_i réalise l'évènement B.	
Réunion de deux évènements	$A \cup B$ $e_i \in A \cup B$	L'évènement (A ou B) e_i réalise l'évènement A ou e_i réalise l'événement B.	
Contraire d'un évènement	$\bar{A} = C_U^A \Leftrightarrow \begin{cases} A \cup \bar{A} = U \\ A \cap \bar{A} = \emptyset \end{cases}$ $e_i \in A \Leftrightarrow e_i \notin \bar{A}$	$\bar{A}$ est l'évènement contraire de A. A et $\bar{A}$ sont des évènements disjoints. e_i réalise l'évènement A si et seulement si, e_i ne réalise pas l'évènement $\bar{A}$.	

Evènement incompatibles	$A \cap B = \emptyset$ A et B sont disjoints	L'évènement (A et B) est impossible. L'évènement A et l'évènement B sont incompatibles	

Exemple

Lors du lancer de deux pièces de monnaie, deux évènements de cette expérience sont :
A : « obtenir Pile (P) au 1er lancer » : on a $A = \{(P, P), (P, F)\}$

B : « obtenir Pile au 2nd lancer » : on a $B = \{(F, P), (P, P)\}$

II. NOTION DE PROBABILITE

1. Probabilité d'un évènement

Définition

Soit **U** l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.
Une probabilité P sur l'univers U est une application de l'ensemble des parties de U vers l'intervalle [0;1], qui à chaque évènement A, associe le nombre réel P(A) appelé probabilité de A et qui vérifie les conditions suivantes :

- $P(U) = 1$
- Si A et B sont deux évènements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Exemple

Lors d'un lancer de dé non truqué, l'univers est : $\Omega = \{1\,; 2; 3; 4;\ 5;\ 6\}$.

Soit A l'événement' 'avoir un nombre pair''. A= {2 ; 4 ; 6} ;

$$p(A) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Propriétés

- Pour tout évènement A, on a : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- Si A est évènement tel que :A $= \{e_1\,; e_2\,; \dots . e_k\}$
  alors P(A) $= P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \cdots + P(\{e_k\})$.
- Pour tous évènements A et B, P(A∪B) = P(A) + P(B) – P(A∩B).

Exercice de fixation

On lance un dé truqué tel que :
P({1})= $\frac{1}{16}$; $P(\{2\})$=$\frac{3}{16}$; $P(\{3\}) = \frac{5}{16}$; $P(\{4\}) = \frac{2}{16}$; $P(\{5\}) = \frac{3}{16}$ et $P(\{6\}) = \frac{2}{16}$.
Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : « le résultat du lancer est un nombre pair »

B : « le résultat est un nombre multiple de 3 ».
C : « le résultat est un nombre différent de 6 ».

Proposition de réponse

1) $A = \{2; 4; 6\}$. *Donc* $P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{3+2+2}{16} = \frac{7}{16}$. $P(A) = \frac{7}{16}$
2) $B = \{3; 6\}$. *Donc* $P(B) = P(\{3\}) + P(\{6\}) = \frac{5+2}{16} = \frac{7}{16}$. $P(B) = \frac{7}{16}$
3) $C = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. *Donc* $P(C) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + \cdots + P(\{5\}) = \frac{1+3+5+2+3}{16} = \frac{14}{16}$

$P(C) = \frac{7}{8}$.

Equiprobabilité

Définition

Soit U l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et P une probabilité définie sur U.
On dit que cette expérience aléatoire a lieu dans un cadre d'équiprobabilité des évènements élémentaires lorsque tous les évènements élémentaires de U ont la même probabilité.

Exemple

Un lancer de dé non truqué est une situation d'équiprobabilité. Toutes les faces du dé ont la même chance d'apparaître lors du lancer.

Propriété1

Soit U l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire tel que $card(U) = n$.
Sous l'hypothèse d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement élémentaire est $\frac{1}{n}$.

Exercice de fixation

On lance un dé parfaitement équilibré. Détermine la probabilité d'apparition de chaque face.

Proposition de réponse

Soit Ω l'univers, on a $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et donc $card(\Omega) = 6$. Le dé étant équilibré, toutes les faces ont la même chance d'apparition, on a donc : $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$

Propriété2

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement A est

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{nombre de cas favorable à A}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{CardA}}{\mathrm{CardU}}.$$

Exercice de fixation

On lance un dé équilibré à 6 faces.

1) Justifie que nous sommes en présence d'une situation d'équiprobabilité.

2) Détermine la probabilité de l'évènement E suivant « on obtient un multiple de 3 »

Proposition de réponse

1) *Le fait que le dé soit équilibré, toutes les faces ont la même probabilité d'apparaitre. On est donc dans une situation d'équiprobabilité.*
2) *Soit Ω l'univers des éventualités. On a :* $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. $Card((\Omega)) = 6$
Ensuite $E = \{3; 6\}$ *; on a* $card(E) = 2$ *donc* $P(E) = \frac{2}{6}$ *soit* $P(E) = \frac{1}{3}$

Remarque

Dans certains exercices de probabilité, il est dit clairement que l'hypothèse d'équiprobabilité est vérifiée. Cependant, voici quelques mots clés qui permettent de reconnaître une situation d'équiprobabilité.

- « Equitable »
- « Equilibré »
- « Parfait »
- « Uniforme »
- « Même chance »
- « Indiscernable au toucher »

Remarque 2

Il n'est pas évident d'écrire un évènement en extension avant de déterminer son cardinal. Les formules de dénombrement permettent de déterminer directement le cardinal d'un évènement.

C- SITUATION COMPLEXE

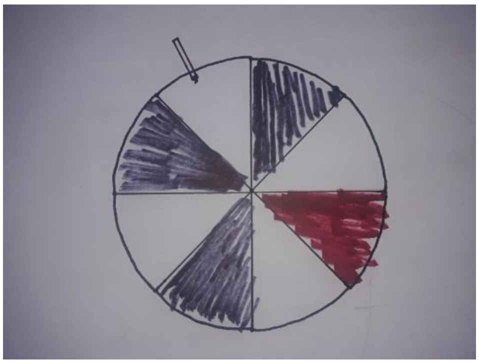
Une loterie consiste à tourner une roue partagée en huit secteurs. On admet que chaque secteur a autant de chance d'être désignée. (Voir figure ci-dessous)

Lorsque le secteur désigné par la flèche est :

- Le blanc, on perd 2 000FCFA (c'est-à-dire qu'on remet 2 000FCFA aux organisateurs) ;
- Le noir, on gagne 1 000FCFA (c'est-à-dire qu'on reçoit 1 000FCFA des organisateurs) ;
- Le rouge, on gagne 2 000FCFA (c'est-à-dire qu'on reçoit 2 000FCFA des organisateurs) ;

Un groupe d'élèves qui assistent à cette loterie affirment qu'un joueur a autant de chance de gagner que de perdre.

Par des calculs appropriés dis si ce groupe a raison ou pas.



Proposition de réponse

Pour répondre à cette question, je vais utiliser les probabilités.

Je vais définir chaque événement en fonction de l'apparition de couleur.

Je vais définir l'événement « gagner » et l'événement « perdre ».

Je vais déterminer la probabilité de perdre et celle de gagner.

Je vais comparer ses deux probabilités afin de justifier si le groupe a raison ou pas.

Soient les évènements suivants :

B : « on perd 2 000FCFA » ; card (B)=4

N : « on gagne 1 000FCFA » ; card (N)=3

R : « on gagne 2 000FCFA » card (R) 1

G : « on gagne »

Le contraire de G est l'évènement B.

On a $G = N \cup R$ *avec R et N incompatibles.*

Soit Ω *l'univers des possibilités. On a* $card(\Omega) = 8$

$P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{4}{8} = 0{,}5$; $P(N) = \frac{card(N)}{card(\Omega)} = \frac{3}{8} = 0{,}375$; $P(R) = \frac{card(R)}{card(\Omega)} = \frac{1}{8} = 0{,}125$. *Donc* $P(G) = P(N) + P(R)$; $P(G) = 0{,}375 + 0{,}125 = 0{,}5$.

On a : $P(B) = P(G)$. *Les deux évènements ont la même probabilité c'est-à-dire qu'il y a autant de chance de gagner que de perde.*

Le groupe d'élèves a donc raison.

D-EXERCICES

Exercice 1

Soit A et B deux évènements quelconques.
Complete par vrai ou faux les propositions suivantes

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ……
- $P(A \cup \bar{A}) = 1$ ……
- $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$ ……

Correction de l'exercice 1

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ …*FAUX*…
- $P(A \cup \bar{A}) = 1$ …*VRAI*…
- $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$ …*VRAI*…

Exercice 2

Soient deux évènements A et B tels que $P(A) = 0.33$; $P(B) = 0{,}15$ et $P(A \cap B) = 0{,}09$.
Détermine $P(A \cup B)$.

Correction de l'exercice 2

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. *On a donc :* $P(A \cup B) = 0{,}33 + 0{,}15 - 0{,}09 = 0{,}39$

Exercice 3

Une coopérative comprend sept hommes et trois femmes. Le couple Zamblé fait également partie de cette coopérative.
La coopérative choisit au hasard une délégation de quatre membres pour la représenter à une cérémonie.

1) Détermine le nombre de délégations possibles.
2) Calcule la probabilité que le couple Zamblé en fasse partie.
3) Calcule la probabilité que monsieur ou madame fasse partie de la délégation.

Correction de l'exercice 3

1) *Une délégation est ici un sous-ensemble de quatre membres pris parmi les 10 membres de la coopérative. Il y a donc :*$C_{10}^{4} = 210$ *délégations possibles.*
   Les choix se faisant au hasard, il y a équiprobabilité.
2) *Le couple Zamblé faisant partie de la délégation, il suffit alors de choisir deux membres parmi les 8 restants pour avoir les quatre membres. Il y a donc* $C_8^2 = 28$ *façons possibles de constituer une telle délégation. Le choix se faisant au hasard, il y a équiprobabilité.*
   La probabilité cherchée est donc $\frac{28}{210}$ *soit* $\frac{2}{15}$.
3) ***Méthode 1***
   Il y a trois cas à examiner :
   <u>1er cas</u> : monsieur Zamblé fait partie de la délégation mais son épouse n'en fait pas partie ; Mr Zamblé étant déjà choisi, l'on doit choisir les trois autres personnes parmi 8. il y a C_8^3 *=56 délégations possibles.*
   <u>2nd cas</u> : Mme Zamblé fait partie de la délégation mais son époux n'en fait pas partie ; on fait le même calcul que dans le cas 1 ; il y a donc 56 délégations possibles.
   <u>3ème cas</u> : le couple fait partie de la délégation . Cela revient à la question 2. Il donc 28 délégations possibles.
   Au total, il y a 56+56+28=140 délégations possibles.
   La probabilité est donc : $\frac{140}{210}$ *soit* $\frac{2}{3}$.
   Méthode 2
   L'événement contraire de Mr ou Mme Zamblé font partie de la délégation est soit B : « « Mr et Mme Zamblé ne font pas parti de la délégation » ». Alors on va choisir les 4 membres de la délégation parti 8 membres, soit :$C_8^4 = 70$ *délégations possibles.*

$$p(B) = \frac{70}{210} = \frac{1}{3}$$

On a donc : $p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Exercice 3

Associe chaque expérience aléatoire à son univers.

Expérience aléatoire	Univers
1) On lance deux fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.	a) L'univers est constitué des 4-uplet formés à partir des 10 touches du clavier. Il comporte 10 000 codes possibles.
2) Choisir simultanément deux élèves dans une classe de 25	b) L'univers est constitué des 2-arrangements formés à partir des 4 boules. Il comporte 12 arrangements possibles.
3) Taper un code secret de 4 chiffres sur un clavier comportant les 10 touches $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$.	c) L'univers est l'ensemble de toutes les combinaisons de deux élèves de cette classe. Il comporte 300 combinaisons possibles.
4) Tirer successivement sans remise deux boules dans une urne qui en contient 4.	d) L'univers est l'ensemble de tous des 36 couples des nombres formés à partir des chiffres de 1 à 6.

Correction de l'exercice 3

Expérience aléatoire	*Univers*
1) On lance deux fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.	*a) L'univers est constitué des 4-uplet formés à partir des 10 touches du clavier. Il comporte 10 000 codes possibles.*
2) Choisir simultanément deux élèves dans une classe de 25	*b) L'univers est constitué des 2-arrangements formés à partir des 4 boules. Il comporte 12 arrangements possibles.*
3) Taper un code secret de 4 chiffres sur un clavier comportant les 10 touches $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$.	*c) L'univers est l'ensemble de toutes les combinaisons de deux élèves de cette classe. Il comporte 300 combinaisons possibles.*
4) Tirer successivement sans remise deux boules dans une urne qui en contient 4.	*d) L'univers est l'ensemble de tous des 36 couples des nombres formés à partir des chiffres de 1 à 6.*

Exercice 4

On lance deux fois de suite un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Détermine la probabilité que les deux nombres soient supérieurs ou égaux à quatre.

Correction de l'exercice 4

Un résultat de cette expérience est un couple de deux nombres entiers naturels compris en 1 et 6. Il y a donc 36 résultats possibles. Les couples dont les composants sont supérieurs ou égaux à 4 sont : (4 ; 4) ; (4 ; 5) ; (4 ; 6) ; (5 ; 4) ; (5 ; 5) ; (5 ; 6) ; (6 ; 4) ; (6 ; 5) et (6 ; 6).

Il y a équiprobabilité : donc la probabilité cherchée est $\frac{9}{36}$ *soit 0,25.*