MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ECOLE A LA MAISON

SECONDAIRE **1èreC** **MATHEMATIQUES**	**CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE**

Durée : 8 heures Code :

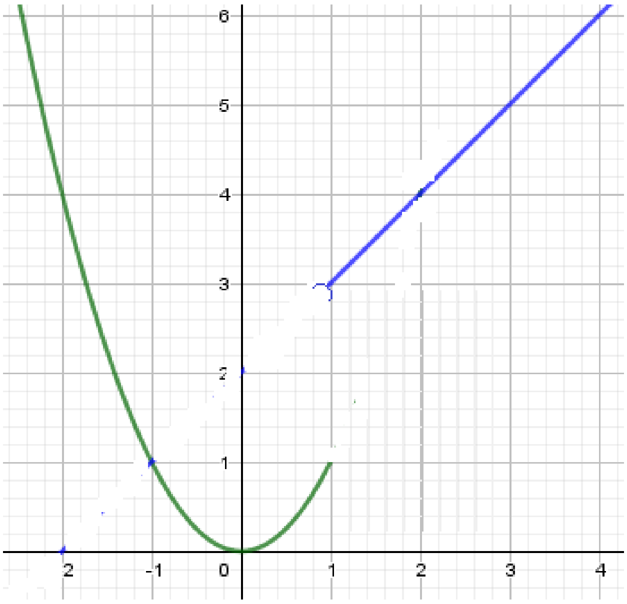
Compétence 1 **Traiter des situations relatives aux calculs algébriques et aux fonctions**

Thème 2 **Fonctions**

Leçon 5 : LIMITES ET CONTINUITE

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pendant une séance de cours en informatique qu'organise le club scientifique, les élèves d'une classe de première D apprennent à tracer des courbes à l'aide de l'ordinateur de leur salle multimédias.
Ainsi pour la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 si\ x \in\ ]-\infty, 1] \\ f(x) = x + 2\ si\ x \in\ ]1, +\infty[\end{cases}$
Ils observent sur l'écran de leur ordinateur une figure morcelée en deux parties au point d'abscisse 1 $(voir\ figure)$. Cherchant à expliquer cette particularité de la courbe, un professeur de mathématiques encadreur du club scientifique les renvoie aux notions de continuité d'une fonction.
Désireux de comprendre le comportement de la courbe de la fonction f en 1, les élèves décident d'approfondir les connaissances sur les fonctions.



B--RESUME DE COURS

I. LIMITES

1- Notion de limites

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.
On constate par le calcul que lorsque l'on choisit « $\boldsymbol{x}$ **suffisamment proche de 2** », on obtient « $\boldsymbol{f(x)}$ **suffisamment proche de 4** ».
On dit alors que : $\boldsymbol{f(x)}$ **tend vers 4** , lorsque $\boldsymbol{x}$ **tend vers 2**
ou bien : **la limite, lorsque $\boldsymbol{x}$ tend vers 2, de $\boldsymbol{f(x)}$ égale 4.**
On dit aussi que : **4 est la limite de $\boldsymbol{f}$ en 2**.
On note : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

Exercice de fixation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$
A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et par Faux si elle est incorrecte
1) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 8$ 2) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 5$ 3) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 9$

Corrigé

1) Faux 2) Faux 3) Vrai

2- Notion de continuité

Propriété

Soit f une fonction définie en a.
Si f admet une limite en a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exercice de fixation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2 + \frac{4}{x}$
A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est correcte et par Faux si elle est incorrecte.
1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

2)La fonction f admet une limite en -2

3) La fonction f admet une limite en 0

Corrigé

1) Faux 2) Vrai 3) Faux

Définition

Soit f une fonction et a un élément de l'ensemble de définition de f
On dit que la fonction f est **continue en a** lorsque f admet une limite en a.
(c'est – à – dire : $\boldsymbol{f}$ **est continue en** $\boldsymbol{a}$ signifie que $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)}$).

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$

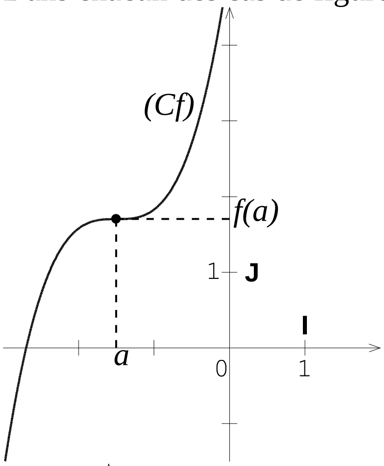
- La fonction f est continue en 2 car f est définie en 2 et $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)} = \frac{5}{2}$.
- La fonction f n'est pas continue en 0 car f n'est pas défini en 0

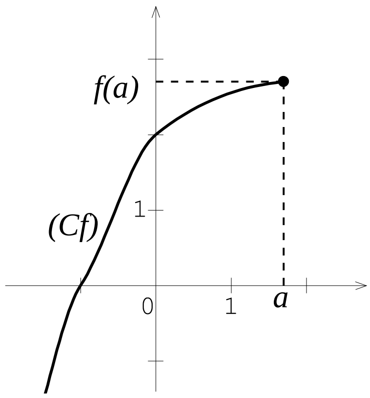
Remarque

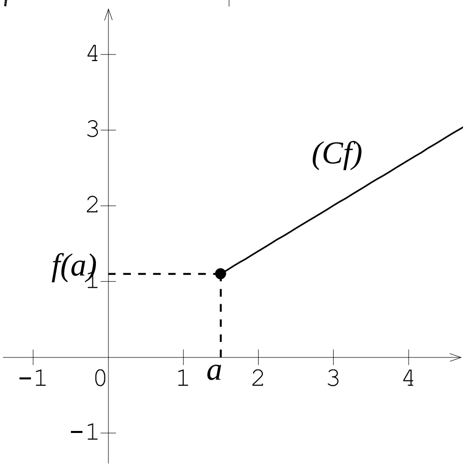
- On démontre et on admet que : lorsqu'une fonction admet une limite en a, cette limite est unique.
- Pour qu'une fonction f soit continue en a, il est nécessaire qu'elle soit définie en a.

Illustration graphique de la continuité d'une fonction en un point

Dans chacun des cas de figures ci – dessous, (*Cf*) est la représentation graphique d'une fonction *f*.







Dans chacun de ces trois cas, la fonction f est continue en a.

Exercice de fixation

Sur chacune des figures ci – dessous, la courbe donnée est la représentation graphique d'une fonction f et a désigne un nombre réel. Indique dans quels cas la fonction f est continue en a.

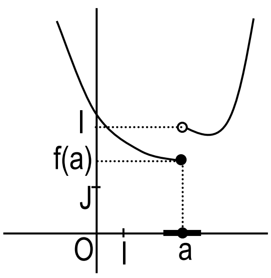


Figure 1

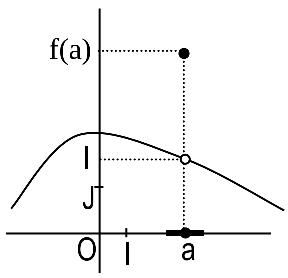


Figure 2

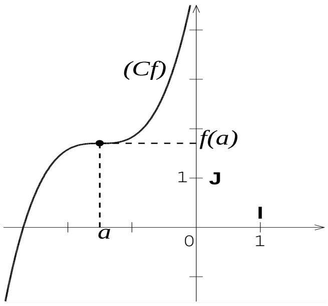


Figure 3

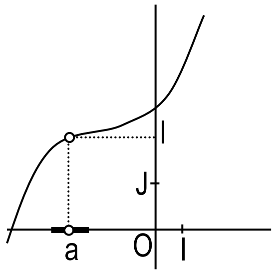


Figure 4

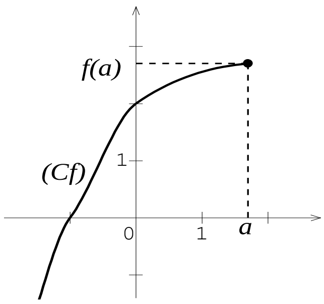


Figure 5

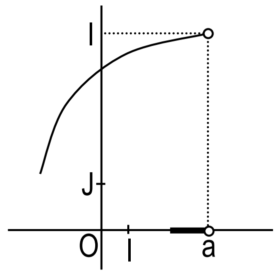


Figure 6

Corrigé

Les figures qui présentent une courbe de fonction continue en *a* sont Figure 3 et Figure 5

3- Continuité en a de fonctions élémentaires

a) Propriété 1

Les fonctions élémentaires définies respectivement par : $x \longmapsto c$ $(c \in \mathbb{R})$; $x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$; $x \longmapsto \frac{1}{x}$; $x \longmapsto \sqrt{x}$; $x \longmapsto |x|$; $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \sin x$ sont continues en tout élément *a* de leurs ensembles de définition respectifs.

Exercice de fixation

Complète les égalités suivantes :

$\lim\limits_{x \to 15} cos x = \cdots$; $\lim\limits_{x \to -2} (3) = \cdots$; $\lim\limits_{x \to -3} (x^2) = \cdots$; $\lim\limits_{x \to 49} (\sqrt{x}) = \cdots$; $\lim\limits_{x \to -1,8} |x| = \cdots$; $\lim\limits_{x \to 3} (\frac{1}{x}) = \cdots$

Corrigé

Comme les fonctions élémentaires sont continues en tout élément de leur ensemble de définition alors :

$\lim\limits_{x \to 15} cos x = \cos(15)$; $\lim\limits_{x \to -2} (3) = 3$; $\lim\limits_{x \to -3} (x^2) = (-3)^2 = 9$; $\lim\limits_{x \to 49} (\sqrt{x}) = \sqrt{49} = 7$;

$\lim\limits_{x \to -1,8} |x| = |-1,8| = 1,8$; $\lim\limits_{x \to 3} (\frac{1}{x}) = \frac{1}{3}$.

b) Propriété 2

f et g étant deux fonctions continues en a :

- Les fonctions $f+g,\ fg,\ kf\ (k \in \mathbb{R})\ et\ \ |f|$ sont continues en a.
- Si g ne s'annule pas en a alors les fonctions $\frac{1}{g}\ \ et\ \ \frac{f}{g}$ sont continues en a.
- Si f est positive alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a.

Exercice de fixation

Soit f et g deux fonctions continues en 5

Justifie que chacune des fonctions $f^2;\ \ f-g\ \ et\ \ 4f$ est continue en 5.

Corrigé

- f est continue en 5 donc la fonction $f \times f = f^2$ est continue en 5.
- g est continue en 5 donc $-g$ est continue en 5.

  f et $-g$ sont continues en 5 donc $f+(-g)=f-g$ est continue en 5
- f étant continue en 5 alors $4f$ est aussi continue en 5

Remarque

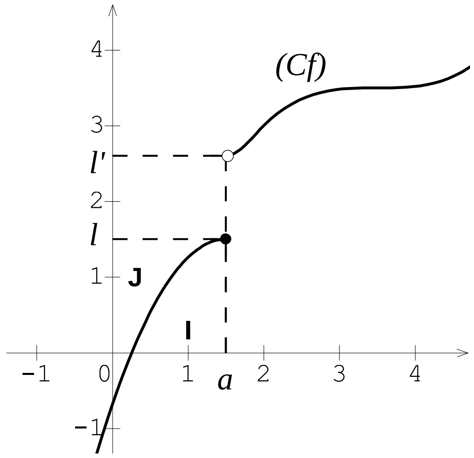
Toute fonction qui est somme, produit ou quotient de fonctions élémentaires, est continue en tout élément de son ensemble de définition.

II. LIMITE A GAUCHE – LIMITE A DROITE

1) Présentation

Sur la figure ci – dessous, le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J), (C_f) est la représentation graphique d'une fonction f et a est un nombre réel.

- Lorsqu'on choisit x dans $]-\infty; a[$ et suffisamment proche de a alors $f(x)$ est très proche de l. On dit alors que l est la limite de f à gauche en a et on note : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = l$
- Lorsqu'on choisit x dans $]a; +\infty[$ et suffisamment proche de a alors $f(x)$ est très proche de l'. On dit alors que l' est la limite de f à droite en a et on note : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = l'$



Exercice de fixation

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 \ si \ x \in]-\infty; 3] \\ f(x) = 2x + 1 \ si \ x \in]3; +\infty[\end{cases}$

A chacune des affirmations ci – dessous, réponds par VRAI si elle est correcte sinon réponds par FAUX.

1) La limite de f à gauche en 3 se note $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x)$

2) La limite de f à droite en 3 est égale à 9

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = 7$

4) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = 7$

Corrigé

1) FAUX 2) FAUX 3) VRAI 4) FAUX

2) Propriétés

a et *l* sont des nombres réels, *f* est une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en *a* sauf éventuellement en *a*.

- f n'est pas définie en a.

La fonction *f* admet une limite *l* en *a* si et seulement si f admet en a, une limite à gauche et une limite à droite égales à *l*.

$(\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = l)$

- f est définie en a.

La fonction *f* admet une limite en *a* si et seulement si f admet en a, une limite à gauche et une limite à droite égales à $f(a)$.

$(\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a))$

Exercice de fixation

f est une fonction définie sur $\mathbb{R} \backslash \{4\}$ telle que : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = 7$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = 7$, $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} f(x) = -2$,

$\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ <}} f(x) = -2$ et $f(1) = 3$.

A chacune des affirmations ci – dessous, réponds par VRAI si elle est correcte sinon réponds par FAUX.

1) f admet une limite en 1

2) f admet une limite en 4

Corrigé

1) FAUX

2) VRAI

Remarque

f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$

III- CALCUL DE LIMITES

1- Opérations sur les limites

Propriétés

$a, l \ et \ l'$ désignent des nombres réels.

- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l'$ alors, $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = l + l'$
- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l'$ alors, $\lim\limits_{x \to a} (f.g)(x) = ll'$
- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l' (l' \neq 0)$ alors, $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$

Exercice de fixation

$f \ et \ g$ sont deux fonctions telles que : $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -5$ et $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = 2$.

Calcule chacune des limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 3} (f+g)(x)$; $\lim\limits_{x \to 3} (f.g)(x)$ et $\lim\limits_{x \to 3} (\frac{f}{g})(x)$

Corrigé

Comme $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -5$ et $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = 2$ alors :

- $\lim\limits_{x \to 3} (f+g)(x) = -5 + 2 = -3$
- $\lim\limits_{x \to 3} (f.g)(x) = -5 \times 2 = -10$
- $\lim\limits_{x \to 3} (\frac{f}{g})(x) = \frac{-5}{2}$

remarque

- La somme de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le produit de deux fonctions continues en a est une fonction continue en a.
- Le quotient d'une fonction f continue en a par une fonction g continue en a telle que $g(a)$ soit différent de zéro, est une fonction continue en a.

C- - SITUATION COMPLEXE

Deux frères, élèves d'une classe de 1èreC, souhaitent communiquer avec leur oncle résidant à Paris en France.
Ils se rendent dans une cabine téléphonique et le gérant de la cabine leur propose le contrat suivant :

- 150F CFA la minute de 0 à 5 minutes de communication,
- 750F CFA forfaitaire entre 5 minutes et 10 minutes de communication,
- 100F CFA la minute, de 10minutes à 30 minutes de communication,
- Au – delà de 30 minutes, 3000F CFA de forfait plus 50F CFA pour chaque minute de communication supplémentaire.

Dans leurs échanges l'ainé affirme que le contrat proposé par le gérant de la cabine traduit une fonction continue en 5 et discontinue en 30 mais son petit frère soutient que cette fonction est continue en 5 et en 30. Ils ont présenté cette situation à leurs camarades de classe qui n'ont pu départager. En tant qu'élève de 1èreC, ils te sollicitent. A l'aide d'une production argumentée, en utilisant tes connaissances mathématiques, indique lequel des deux frères a raison.

Corrigé

Pour départager les deux frères nous allons utiliser la leçon limite et continuité pour cela nous allons :

- Déterminer la fonction f qui a chaque minute de communication associe son coût
- Etudier la continuité de f en 5 et en 30
- départager les deux frères

Soit x la durée en minutes de communication et f la fonction qui à x associe le coût de la communication en franc CFA. On a :

$$\begin{cases} Si \quad x\in[0;5] \quad alors \quad f(x)=150x \\ Si \quad x\in]5;10[\quad alors \quad f(x)=750 \\ Si \quad x\in[10;30] \quad alors \quad f(x)=100x \\ Si \quad x\in]30;+\infty[\quad alors \quad f(x)=3000+50(x-30) \end{cases}$$

- On a : $f(5)=150\times 5=750$, $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ <}}(150x)=750$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ >}}(750)=750$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ >}} f(x)=f(5)$ alors f est continue en 5 (1)

- On a : $f(30)=100\times 30=3000$, $\lim\limits_{\substack{x\to 30\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 30\\ <}}(100x)=3000$ et

$\lim\limits_{\substack{x\to 30\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 30\\ >}}(3000+50(x-30))=3000$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 30\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 30\\ >}} f(x)=f(30)$ alors f est continue en 30 (2)

(1) et (2) impliquent que f est continue en 5 et en 30 donc le petit frère a raison.

D- EXERCICES

Exercices de fixation

Exercice 1

Calcule les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left(2-\sqrt{7}\right)$; $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin x}{\cos x}$

Corrigé

$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}(2-\sqrt{7}) = 2-\sqrt{7}$;

$\lim\limits_{x\to -5}\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\right) = \dfrac{(-5)^2-2\times(-5)+3}{-5-2} = -\dfrac{38}{7}$;

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\sin(-\frac{\pi}{6})}{\cos(-\frac{\pi}{6})} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

Exercice 2

f est une fonction de ℝ vers ℝ définie par : $f(x) = x^2+3$.

Etudie la continuité de f en 2.

Corrigé

La fonction f est définie sur ℝ car f est une fonction polynôme.

f est définie en 2. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x^2+3) = 2^2+3 = 7$ et $f(2) = 2^2+3 = 7$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$ donc f est continue en 2.

Exercices de renforcement

Exercice 3

On donne la fonction f définie sur ℝ par : $\begin{cases} \text{Pour } x<1,\ f(x) = 3x-1 \\ \text{Pour } x\geq 1,\ f(x) = \frac{x-1}{x+1} \end{cases}$

1) Calcule la limite de f à gauche en 1 et la limite de f à droite en 1.

2) Justifie que la fonction f n'admet pas limite en 1.

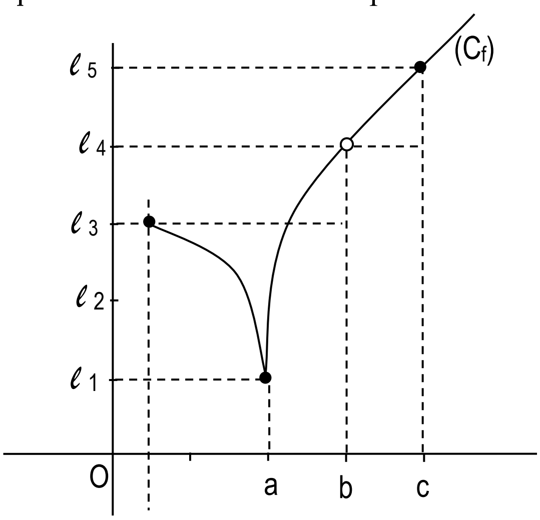
Corrigé

1) On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}(3x-1) = 3\times 1-1 = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \dfrac{1-1}{1+1} = 0$

2) On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$ donc f n'admet pas de limite en 1.

Exercice 4

(C_f) est la représentation graphique d'une fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.



A l'aide de ce graphique:

a) donne la limite de f en a, en b et en c.
b) dis si f est continue en a, en b et en c.

Corrigé

a) La limite de f en a est ℓ_1 ; la limite de f en b est ℓ_4 et la limite de f en c est ℓ_5.
b) f est continue en a et en c. f n'est pas continue en b car f n'est pas définie en b.

Exercices d'approfondissement

Exercice 5

Calcule chacune des limites suivantes.

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$; $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2}$; $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}$

Corrigé

On a :

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2-2^2}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)=\sqrt{4}+2=4$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-1}{x+2}=\frac{3-1}{3+2}=\frac{2}{5}$$

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Etudie la continuité de f en a.

1) $f(x)=2x^3-4x^2-3x+1$; $a=1$
2) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{x+3}$; $a=-3$
3) $\begin{cases} \text{Pour } x \neq -2,\ f(x) = \dfrac{-x^2-x+2}{x+2} \\ f(-2) = 0 \end{cases}$; $a=-2$

Corrigé

1) f est une fonction polynôme donc f est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier f est continue en 1
2) L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ donc f ne peut être continue en -3
3) f est définie sur $\mathbb{R}$.

On a : $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{-x^2-x+2}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{-(x+2)(x-1)}{(x+2)}=\lim\limits_{x\to -2}(-x+1)=3$

Comme $\lim\limits_{x\to -2} f(x)\neq f(-2)$ alors f n'est pas continue en -2 .