SECONDAIRE
T^{le} A
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

THEME : MODELISATION D'UN PHENOMENE ALEATOIRE

DUREE :24 heures **CODE :**

LEÇON 2 : PROBABILITÉS

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour l'organisation de la kermesse de leur Lycée, les élèves d'une classe de terminale désirent proposer le jeu suivant à un stand :
« Une urne contient trois boules rouges numérotées 100, 200 et 300 et deux boules blanches numérotées 2 et 5, toutes indiscernables au toucher.
Les règles du jeu sont les suivantes :
Le joueur mise x francs CFA et tire successivement avec remise deux boules de l'urne. Si les deux boules tirées sont de même couleur, la partie est perdue. Sinon, le joueur remporte le montant en francs CFA égal au nombre obtenu par le produit des numéros apparus sur les boules tirées »
Pour ne pas être perdants, ces élèves souhaitent déterminer la mise minimale du joueur pour que le jeu leur soit avantageux.
Ensemble, ils s'organisent pour déterminer la mise nécessaire.

B - CONTENU DE LA LEÇON

I. EXPÉRIENCES ALEATOIRES

1 Expériences aléatoires, éventualité ,univers

a) Expérience aléatoire (Présentation)

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé.
Les résultats possibles sont finis et connus *(1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6).*
On ne peut pas prévoir d'avance le résultat (1 , 2 , 3 , 4, 5 , 6).

• On dit qu'il s'agit d'une **expérience aléatoire**, c'est à dire une expérience dont l'issue ne peut être connue d'avance.

Chaque résultat possible est appelé **éventualité**.

• L'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire est appelé **univers**. En général, on le note Ω .

Exemple :

Lorsqu'on lance un dé a six faces non truqué numéroté de 1à 6
6 est une éventualité
$\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$ est l'univers

Exercice de fixation

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie
Ecris en extension l'univers Ω des éventualités

Solution

$\Omega = \{ (P, P) ; (P, F) ; (F, P) ; (F, F) \}$

b) Evénement

On appelle **événement** tout sous ensemble de l'univers.

Remarque

Une éventualité ω **appartient** à l'univers Ω (on note $\omega \in \Omega$) . Un événement A est **inclus** dans l'univers Ω (on note $A \subset \Omega$)

Exemple :

Lorsqu'on lance un dé non truqué à six faces numéroté de 1 à 6
On peut considérer l'événement A : « obtenir un nombre pair » .
On a : $A = \{ 2 ; 4 ; 6 \}$

Remarque :un événement A est réalisé si l'issue de l'expérience appartient à A.

Exercice de fixation

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie.
Ecris en extension l'événement B « obtenir face au premier lancer »

Solution

$B = \{ (F,P) ; (F,F) \}$

2 VOCABULAIRE DES PROBABILITES

Le tableau ci-dessous résume les définitions et notations importantes relatives à la notion d'événement.

A, B et C représentent des événements d'un univers Ω lié à une expérience aléatoire.

Notation	Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire probabiliste	Exemples
Ω	Ensemble de référence	Univers	On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé cubique de faces numérotées de 1 à 6 et à noter le numéro de la face supérieure. L'univers Ω est {1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6}.
{} ou ∅	Ensemble vide	Événement impossible	L'événement C : « obtenir un multiple de 3 inférieur ou égal à 2 » est impossible. C=∅
$\omega \in$ **Ω**	ω appartient à **Ω**	ω est une éventualité, un résultat ou une issue de l'expérience aléatoire	3 est un résultat dans un lancer de dé
$A \subset$ **Ω**	A est un sous ensemble de **Ω**	A est un évènement	« obtenir un multiple de 3 » est un évènement.
$\omega \in$ **A**	ω appartient à **A**	ω réalise A ou que A est réalisé lorsque le résultat ω appartient à A	Soit A l'événement : « obtenir un nombre pair» ; 2 réalise A.
$A \subset B$	A est inclus dans B	A implique B, c'est que la réalisation de A entraine celle de B	Soit A l'événement : « obtenir un nombre pair» et B : « obtenir un multiple de 6 » B implique A
A ∩ B	Intersection de A et B	Evènement « A et B » Il ne se réalise que si A et B se réalisent à la fois.	Soit A : « obtenir un nombre pair » et B : « obtenir un multiple de 3 ». A ∩ B ne se réalise que lorsqu'on obtient à la fois un nombre pair et

			un multiple de 3, c'est-à-dire 6. $A \cap B = \{6\}$
$A \cup B$	Réunion de A et B	Evènement « A ou B » Il ne se réalise que si l'un au moins des évènements A et B se réalise	Soit A : « obtenir un nombre pair » et B : « obtenir un multiple de 3 ». $A \cup B$ se réalise que lorsqu'on obtient un nombre pair ou un multiple de 3, c'est-à-dire 6. $A \cup B = \{2 ; 3 ; 4 ; 6\}$
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont disjoints	A et B sont incompatibles	Soit A : « obtenir un nombre pair » et B : « obtenir un nombre impair».
$\overline{A}$	Complémentaire de A.	Evènement contraire de A ; A se réalise si et seulement $\overline{A}$ ne se réalise pas.	A : « obtenir un nombre pair » L'évènement contraire de A est :« obtenir un nombre impair » ;

<u>Exercice de fixation</u>

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes

1) Deux événements contraires sont incompatibles

2) Un événement qui ne se réalise jamais est appelé événement certain

3) Deux événements incompatibles sont contraires

4) le nombre d'éléments d'un ensemble fini est appelé cardinal

Solution

1) Vrai ; 2) Faux ; 3) Faux ; 4) Vrai

II. PROBABILITE SUR UN ENSEMBLE FINI

1 Définition

On note $\Omega = \{ \omega_1 , \omega_2 \ \dots \ \omega_n \}$ l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire.

Définir une probabilité sur Ω, c'est associer à chaque résultat ω_i un nombre P_i (appelé probabilité de l'issue ω_i) positif ou nul de telle façon que :

- $P_1 + P_2 + \cdots . + P_n = 1$
- La probabilité P d'un événement A, notée P (A), est la somme des probabilités P_i des éventualités qui constituent A.

Remarque :

La probabilité P(A) d'un évènement A est telle que : $0 \leq P(A) \leq 1$.

Exercice de fixation

On lance un dé pipé tel que $P(1) = P(3) = P(4) = \frac{1}{8}$ et $P(2) = P(6) = \frac{1}{4}$

Calcule $P(5)$

Solution

On a $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$

D'où $3P(1) + 2P(2) + P(5) = 1$ donc $P(5) = 1 - 3 \times \frac{1}{8} - 2 \times \frac{1}{4}$ par suite $P(5) = \frac{1}{8}$

2- Propriétés

Soit A et B deux événements de Ω, alors :

- La probabilité de l'événement certain est 1 ; $P(\Omega) = 1$
- La probabilité de l'événement impossible est 0 ; $P(\emptyset) = 0$
- Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si A et B sont incompatibles , $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Exercice de fixation

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et deux événements A et B tels que
$P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$

1) Calcule $P(A \cup B)$

2) Calcule $P(\bar{A})$; $P(\bar{B})$ et $P(\overline{A \cup B})$

Solution

1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}7$

2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$; $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

et $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

3- Equiprobabilité

Propriété

Lorsque tous les événements élémentaires d'un univers ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

Dans ce cas, si l'univers Ω est composé de n éventualités w_i , on a :

$$P_i = P(\{ w_i \}) = \frac{1}{card(\Omega)} = \frac{1}{n}$$

On a alors, pour tout événement A : $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$

$$= \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$

Remarque :

Les expressions suivantes « dé parfait ou équilibré » ; « boule tirée de l'urne au hasard » ; « boules indiscernables au toucher » … indiquent que pour les expériences réalisées, le modèle associé est l'équiprobabilité.

Exercice de fixation

On place dans un sac 5 pièces de $500\ F$, 10 pièces de 250 F et 15 pièces de 25 F.
Les pièces sont indiscernables au toucher.
On tire simultanément 4 pièces du sac.

1) Calcule la probabilité de l'événement C :≪ n'avoir choisi aucune pièce de 25 F ≫

2) Calcule la probabilité $l'événement\ D$:≪ d'avoir obtenu uniquement des pièces de 250 F ≫

3) Calcule la probabilité $l'événement\ E$:≪ d'avoir obtenu au moins une pièce de $500\ F$ ≫

4) Calcule la probabilité $l'événement\ F$:≪ d'avoir obtenu au moins une pièce de chaque valeur ≫

Corrigé

$Card(\Omega) = C_{30}^4 = 27\,405$

1) $P(C) = \frac{C_{15}^4}{C_{30}^4} = \frac{1365}{27405} = \frac{13}{261}$; 2) $P(D) = \frac{C_{10}^4}{C_{30}^4} = \frac{210}{27405} = \frac{2}{261}$

3) $P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{C_{25}^4}{C_{30}^4} = 1 - \frac{12650}{27405} = \frac{14755}{27405} = \frac{2951}{5481}$

4) $P(F) = \frac{C_5^2 \times C_{10}^1 \times C_{15}^1 + C_{10}^2 \times C_5^1 \times C_{15}^1 + C_{15}^2 \times C_5^1 \times C_{10}^1}{C_{30}^4} = \frac{10\,125}{27405} = \frac{75}{203}$

Série A1 seulement

III. VARIABLES ALEATOIRES

1 Définition

Soit Ω l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire.

- On appelle **variable aléatoire** toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément de Ω, fait correspondre un nombre réel x.
- L'événement de Ω, noté $\{ X = x \}$, est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image x par X.
- L'ensemble des valeurs prises par X est l'ensemble de toutes les images des éléments de Ω par X . Cet ensemble est noté Ω'.

Exemple :

Avec l'exemple de départ, on peut définir une variable aléatoire X de la façon suivante :

- $X = 0$ si le nombre est pair
- $X = 1$ si le nombre est impair

L'ensemble des valeurs prises

par X est $\Omega' = \{ 0 ; 1 \}$

2 - Loi de probabilité d'une variable aléatoire

(on dit aussi loi image de la variable aléatoire)

Définition

Soit $\Omega = \{ \omega_1 , \omega_2 \dots \omega_n \}$ un ensemble sur lequel a été définie une loi de probabilité.
$\Omega' = \{ x_1 , x_2 \dots ,x_m \}$ est l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.
La loi de probabilité de X est la fonction définie sur Ω', qui à chaque x_i fait correspondre le nombre $p_i = P (X = x_i)$

Remarque

On a : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \cdots + p_n = 1$

Exemple :

La loi de probabilité de la variable aléatoire définie ci-dessus est :

x_i	0	1
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

3 Espérance, variance, écart type d'une loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée ci-dessous :

x_i	w_1	w_1	$\cdots$	w_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

- **L'espérance mathématique** de la loi de probabilité est le nombre noté $E(X)$défini par :
  $E(X) = p_1w_1 + p_2w_2 + \cdots + p_nw_n$
- **La variance** de la loi de probabilité est le nombre $V(X)$ défini par :
  $V(X) = p_1{w_1}^2 + p_2{w_2}^2 + \cdots + p_n{w_n}^2 - (E(X))^2$
- **L'écart type** de la loi de probabilité est le nombre noté σ défini par : $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Remarque

$E(X)$ est la moyenne des valeurs prises par X sur un grand nombre de parties.

Lorsque X représente un gain algébrique d'un joueur

- Si $E(X) = 0$, alors le jeu est équitable.
- Si $E(X) > 0$, alors le jeu est favorable au joueur
- Si $E(X) < 0$, alors le jeu est défavorable au joueur.

Exercice de fixation

Une urne contient 5 boules : 2 noires et 3 rouges.
On tire simultanément 2 boules de l'urne.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées

1) Justifie que $\Omega' = \{0 ; 1 ; 2\}$
2) Détermine la loi de probabilité de X.
3) a) Calcule l'espérance mathématique
b) calcule la variance et l'écart type

Solution

1) On ne tire aucune boule noire $X = 0$

On tire une boule noire $X = 1$

On tire deux boules noires $X = 2$

Donc $\Omega' = \{0 ; 1 ; 2\}$

2) $card\ (\Omega) = C_5^2 = 10$

$P(X = 0) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$; $P(X = 1) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$; $P(X = 2) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$

Ainsi la loi de probabilité de X est :

x_i	0	1	2	total
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

3) a) L'espérance mathématique

On a $E(X) = p_1 w_1 + p_2 w_2 + \cdots + p_n w_n$

$$E(X) = \left(0 \times \frac{3}{10}\right) + \left(1 \times \frac{6}{10}\right) + \left(2 \times \frac{1}{10}\right) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

b) La variance

$$V(X) = p_1 {w_1}^2 + p_2 {w_2}^2 + \cdots + p_n {w_n}^2 - (\ E(X)\ )^2$$

$$V(X) = \left(0^2 \times \frac{3}{10}\right) + \left(1^2 \times \frac{6}{10}\right) + \left(2^2 \times \frac{1}{10}\right) - \left(\frac{8}{10}\right)^2 = \frac{100}{100} - \frac{64}{100} = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$$

L'écart type $\sigma = \sqrt{V(X)}$

donc $\sigma = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

C – SITUATION COMPLEXE

Pour l'organisation d'une kermesse dans le quartier, le président désire proposer le jeu suivant à un stand :

« Une urne contient trois boules jaunes, deux boules bleues, une boule rouge et quatre boules vertes, toutes indiscernables au toucher. On tire au hasard, une boule de l'urne.

Les règles du jeu sont les suivantes :

Si la boule tirée est :

- rouge, le joueur gagne 100f.
- verte, le joueur gagne 20f.
- jaune, le joueur gagne 30f.
- bleue, le joueur gagne mf où m est un réel strictement positif.

Pour participer et gagner au jeu Mariam souhaite déterminer la valeur minimale de m pour être sûr de gagner en moyenne au moins 45 F. Elle te sollicite pour l'y aider.

À l'aide d'une production argumentée, détermine la valeur minimale de m pour être sûr de gagner en moyenne au moins 45 F.

Solution

Soit X la variable aléatoire correspondant au gain dans ce jeu
La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant

x_i	20	30	m	100
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

Elle souhaite avoir $E(X) \geq 45$
On a $E(X) = \frac{4}{10} \times 20 + \frac{3}{10} \times 30 + \frac{2}{10} \times m + \frac{1}{10} \times 100 = \frac{270 + 2m}{10}$

$$E(X) \geq 45 \Leftrightarrow \frac{270 + 2m}{10} \geq 45$$
$$\Leftrightarrow 2m \geq 180$$
$$\Leftrightarrow m \geq 90$$

La valeur minimale de m est donc 90 F

D- EXERCICES

1. Exercices d'application

Exercice 1

On lance un de pipe tel que $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5)$et $P(6) = 3P(1)$

Calcule la probabilité d'apparition de chaque face

SOLUTION

On a $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$
D'où $5P(1) + 3P(1) = 1$ donc $P(1) = \frac{1}{8}$

par suite $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{8}$ et $P(6) = \frac{3}{8}$

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée ci-dessous

x_i	-15	0	15	30
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

1) Calcule l'espérance mathématique.
2) Calcule la variance et l'écart type.

Solution

1) $E(X) = -15 \times \frac{1}{8} + 0 \times \frac{3}{8} + 15 \times \frac{3}{8} + 30 \times \frac{1}{8} = \frac{60}{8} = \frac{15}{2}$.

2) $V(X) = (-15)^2 \times \frac{1}{8} + 0 \times \frac{3}{8} + (15)^2 \times \frac{3}{8} + (30)^2 \times \frac{1}{8} - \left(\frac{15}{2}\right)^2 = \frac{1800}{8} - \frac{225}{4} = \frac{1350}{8}$

$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1350}{8}}$

Exercices de renforcement

Exercice 3

Lors d'une kermesse scolaire, un jeu consiste à tirer simultanément et au hasard trois boules de l'urne contenant 5 boules noires et 15 boules rouges. On suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Yasmine participe à ce jeu.

1. Justifie que Yasmine peut effectuer 1140 tirages possibles.

2. On considère les évènements A , B , C et D suivants et on note $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ et $P(D)$ leurs probabilités respectives.

A : « Yasmine tire exactement une boule noire »
B : « Yasmine tire exactement deux boules noires »
C : « Yasmine tire exactement trois boules noires »
D : « Yasmine tire au moins une boule noire »

a) Calcule $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.

b) Justifie que $P(D) = \frac{137}{228}$

Solution

1) Le nombre de tirages possibles est effectuer C_{20}^{3} soit 1140

2) a) $P(A) = \frac{C_5^1 \times C_{15}^2}{1140} = \frac{105}{228} = \frac{35}{76}$, $P(B) = \frac{C_5^2 \times C_{15}^1}{1140} = \frac{15}{114} = \frac{5}{38}$; $P(C) = \frac{C_5^3}{1140} = \frac{1}{114}$

b) $P(\overline{D}) = \frac{C_{15}^3}{1140} = \frac{91}{228}$ donc $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = \frac{137}{228}$

Exercice 4

Un chariot de desserts comporte 10 vanille, 3 fraise, 4 chocolat, 5 menthe, 6 caramel. Un enfant qui aime autant tous les gâteaux choisit au hasard 4 gâteaux.

Détermine la probabilité des événements suivants

1. A : « il ne choisit que de la vanille »
2. B : « il ne choisit qu'une seule sorte de desserts »
3. C : « il choisit un à la fraise et 3 chocolats »

4 . D : « il choisit au moins un à la vanille »

Solution

Le nombre de tirages possibles est effectuer C_{28}^{4} soit 20 475

1. $P(A) = \frac{C_{10}^4}{20\,474} = \frac{210}{20\,475} = \frac{14}{1\,365}$, 2. $P(B) = \frac{C_5^4 + C_{10}^4 + C_6^4 + C_4^4}{20\,475} = \frac{231}{20\,475} = \frac{11}{975}$;

3. $P(C) = \frac{C_3^1 \times C_4^3}{20\,475} = \frac{12}{20\,475} = \frac{4}{6\,825}$

4. Calculons d'abord la probabilité de l'événement $\overline{D}$: « ne pas choisir de gâteau à la vanille »

$P(\overline{D}) = \frac{C_{18}^4}{20\,457} = \frac{3060}{20\,457} = \frac{204}{1\,365}$

Par suite $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = \frac{1\,161}{1\,365}$

Exercice d'approfondissement

Exercice 5

Dans une population donnée, la proportion d'individus atteint d'une certaine maladie est x

On dispose d'un test de dépistage de cette maladie et on voudrait étudier sa fiabilité

Le test relève que

Sur 100 personnes considérées comme malade, 98 ont un test positif.

Sur 100 personnes considérées comme saines, 1 seule a un test positif.

On note $f(x)$ la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit malade.

On admet que : pour tout x élément de $[\,0; 1\,]$, $f(x) = \frac{98\,x}{97\,x+1}$

On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit malade est supérieure à 0,95.

1. Le test est-il fiable si la proportion x d'individus atteints de la maladie est de 0,05 (5%)

2. Détermine la proportion x à partir de laquelle le test est fiable.

Solution

1. On a $f(0{,}05) = \frac{98 \times 0{,}05}{97 \times 0{,}05+1} = 0{,}8376$

   Comme 0,83 < 0,95, alors le test n'est pas fiable si 5% de la population est malade

2. On résout inéquation : $f(x) \geq 0{,}95$

$$\frac{98\,x}{97\,x+1} \geq 0{,}95$$

Comme $97\,x + 1 \geq 0$ (car $0 \leq x \leq 1$)

$$98\,x \geq 0{,}95(97\,x+1)$$

$$x \geq \frac{19}{117} \quad \text{or} \quad \frac{19}{117} = 0{,}162$$

On en déduit que le test est fiable si au moins 17% de la population est malade