THÈME : Fonctions numériques

Terminale A Mathématiques

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Thème : Fonctions numériques

LEÇON 3 : LOGARITHME NEPERIEN

Durée : 12 heures **Code :**

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

Le médico-scolaire de ta commune organise une campagne de dépistage de la fièvre typhoïde dans ton établissement. Après avoir examiné n élèves pris au hasard, le médecin-chef affirme que la probabilité d'avoir au moins un élève non atteint de la fièvre typhoïde dans cet établissement est de $1- (0{,}325)^n$.
Afin de sensibiliser davantage les élèves contre cette maladie, le chef de l'établissement veut connaitre le nombre minimum d'élèves tel que la proportion d'avoir au moins un élève non atteint de la fièvre typhoïde soit supérieur à 98%. Il sollicite ta classe.
Après plusieurs essais infructueux avec la calculatrice, la classe décide de s'informer sur la résolution de ce type d'inéquation auprès de son professeur de Mathématiques.

B. RESUME DE LA LECON

I. Définition et propriétés algébriques.

1. Définition et notation

a) Définition

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction dont la dérivée sur $]0\,;+\infty[$ est la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$ et qui s'annule en 1.

b) Conséquences de la définition

- L'ensemble de définition de la fonction : $x \mapsto \ln(x)$ est $]0;+\infty[$
- **ln 1 = 0** (l'image de 1 par la fonction ln est 0)
- La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $\mathbf{\ln'(x)} = \frac{1}{x}$.

Exercice de fixation

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

Affirmations	Réponses
L'ensemble de définition de la fonction : $x \mapsto \ln(x)$ est $\mathbb{R}$	
$\ln(1)=0$	
Pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.	
La fonction logarithme népérien est la dérivée sur $]0;+\infty[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$	

L'image d'un nombre réel négatif par la fonction ln existe.	

Solution

Affirmations	Réponses
L'ensemble de définition de la fonction : $x \mapsto \ln(x)$ est $\mathbb{R}$	Faux
ln(1)=0	Vrai
Pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.	Vrai
La fonction logarithme népérien est la dérivée sur $]0;+\infty[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$	Faux
L'image d'un nombre négatif par la fonction ln existe.	Faux

2.Propriétés algébriques

Propriétés :

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs :

- $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$
- pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$

<u>Exercices de fixation</u>

<u>Exercice 1</u>

Exprime en fonction de $ln2$ et $ln3$ chacun des nombres suivants :

$A = \ln(24)$ $\quad B = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ $\quad C = \ln(3^5) - ln(2^4)$

Solution

On a : $A = \ln(24) = \ln(2^3 \times 3) = ln2^3 + ln3 = 3ln2 + ln3$

$B = \ln\left(\frac{2}{3}\right) = ln2 - ln3$

$C = \ln(3^5) - ln(2^4) = 5ln3 - 4ln2$

<u>Exercice 2</u>

Ecris chacun des nombres suivants sous la forme $\ln(k)$ où k est un nombre réel strictement positif.

$D = \ln(5) + \ln(3)$ $\quad E = \ln(2) - \ln(0{,}1)$ $\quad F = 4\ln 5$

Solution

On a : $D = \ln(5) + \ln(3) = ln(5 \times 3) = \ln(15)$

$E = \ln(2) - \ln(0{,}1) = \ln\left(\frac{2}{0{,}1}\right) = \ln(20)$

$F = 4\ln 5 = ln(5^4) = \ln(625)$

II. Limites, sens de variation et représentation graphique de la fonction logarithme népérien.

1. Limites de référence.

Propriété

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$. (3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x \ln x = 0$

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$ (4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

<u>Exercice de fixation</u>

Calcule les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x + lnx)$ 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + lnx)$ 3) $\lim\limits_{x \to +\infty} x(1 - \frac{lnx}{x})$ 4) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x(1 + lnx)$

Solution

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x + lnx) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} lnx = -\infty$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + lnx) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} lnx = +\infty$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} x(1 - \frac{lnx}{x}) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \frac{lnx}{x}) = 1$

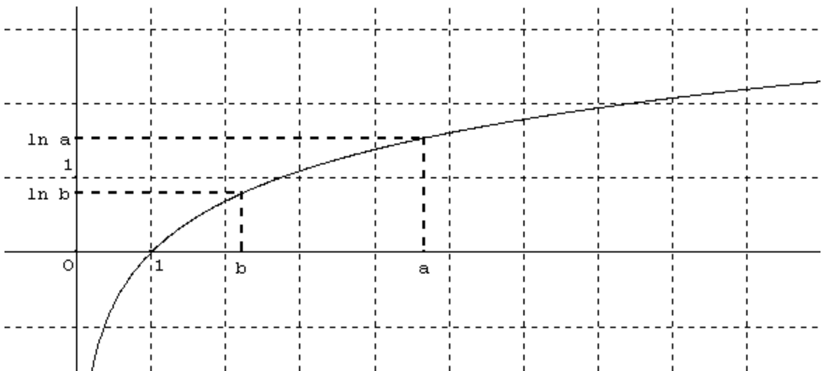
4) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x(1 + lnx) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x + xlnx) = 0$ car $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x\, lnx = 0$

2. Dérivée et sens de variation de la fonction logarithme népérien.

- Pour tout $x > 0$, $ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x} > 0$, donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
- Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$ln'(x)$	‖	$+$
$\ln(x)$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

- Courbe représentative de la fonction ln :



<u>Exercice de fixation</u>

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $f(x) = 2x + lnx$.

1. Détermine l'ensemble de définition D_f de f
2. Calcule $f'(x)$.
3. Etudie le sens de variation de f .

Solution

1. $x \in D_f \iff x > 0$ donc $D_f =]0;+\infty[$
2. pour tout x élément de $]0;+\infty[$, $f'(x) = 2 + \frac{1}{x}$.
3. Sens de variation de f .

   Pour tout $x\epsilon]0;+\infty[$, $2 + \frac{1}{x} > 0$ donc $f'(x) > 0$

   D'où f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

<u>Exercice de maison</u>

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $f(x) = 1 - x + lnx$.

1. Détermine l'ensemble de définition D_f de f et calcule$f'(x)$.

2. Etudie le sens de variation de de f.

III. Résolution d'équations et d'inéquations comportant la fonction ln.

1. Propriété

<u>Propriété :</u>

Pour tous réels a et b strictement positifs,

- $\ln a > \ln b$ équivaut à $a > b$
- $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$

<u>Conséquences :</u>

Pour tout nombre réel x strictement positif :

- $\ln x = 0$ équivaut à $x = 1$;
- $\ln x < 0$ équivaut à $0 < x < 1$;
- $\ln x > 0$ équivaut à $x > 1$.

Remarque

Il existe un seul nombre réel noté e appartenant à $]2;3[$ tel que : $\ln(e) = 1$ avec $e \simeq 2{,}718$.

2. Exemples de résolution d'équations

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

1. $\ln(2x - 1) = \ln(x + 5)$; 2. $\ln(x - 2) = 1$; 3. $(lnx)^2 + lnx - 6 = 0$

Solution

<table>
<tr>
<td>1) $\ln(2x-1)=\ln(x+5)$
Ensemble de validité V
$x\epsilon V \Leftrightarrow 2x-1>0 \; et \; x+5>0$
$\Leftrightarrow x>\frac{1}{2} \; et \; x>-5$
$V=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

$\ln(2x-1)=\ln(x+5)$
$\Leftrightarrow 2x-1=x+5$
$\Leftrightarrow x=6$
Comme $6 \; \epsilon V$ alors $S_{\mathbb{R}}=\{6\}$</td>
<td>2) $\ln(x-2)=1$
Ensemble de validité V
$x\epsilon V \Leftrightarrow x-2>0$
$\Leftrightarrow x>2$
$V=]2;+\infty[$

$\ln(x-2)=1$
$\Leftrightarrow \ln(x-2)=\ln e$
$\Leftrightarrow x-2=\mathrm{e}$
$\Leftrightarrow x=\mathrm{e}+2$
Comme $\mathrm{e}+2 \; \epsilon \, V$
$S_{\mathbb{R}}=\{e+2\}$</td>
<td>3) $(lnx)^2+lnx-6=0$
$x\epsilon V \Leftrightarrow x>0$ donc $V=]0;+\infty[$
Posons : $X=lnx$.
L'équation devient : $\mathrm{X}^2+\mathrm{X}-6=0$
Résolution de cette équation :
$\Delta=1+(-4)\times(-6)=25=5^2$
$\mathrm{X}=\frac{-1-5}{2}=-3$ ou $\mathrm{X}=\frac{-1+5}{2}=2$
On obtient :
$(lnx)^2+lnx-6=0$
$\Leftrightarrow$X$=-3$ ou X=2
$\Leftrightarrow lnx=-3 \; ou \; lnx=2$
$\Leftrightarrow x=e^{-3} ou \; x=e^2$
Comme $e^{-3} \; et \; e^2$ sont éléments de V
$S_{\mathbb{R}}=\{e^{-3};e^2\}$</td>
</tr>
</table>

Exercices de maison

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $\ln(2-\mathrm{x})=0$; b) $\ln(2\mathrm{x}^2+3)=\ln(7\mathrm{x})$; c) $2-\ln\mathrm{x}=0$; d) $(\ln\mathrm{x}-2)(\ln\mathrm{x}+1)=0$
e) $(lnx)^2-2lnx-3=0$

3. Exemples de résolution d'inéquations

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

1. $\ln(2x-3)<1$; 2. $(lnx)^2-5lnx-6\geq 0$

Solution

<table>
<tr>
<td>1) $\ln(2x-3)<1$
Ensemble de validité V
$x\epsilon V \Leftrightarrow 2x-3>0$
$\Leftrightarrow x>\frac{3}{2}$
$V=\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

$\ln(2x-3)<1 \Leftrightarrow \ln(2x-3)<\ln(e)$
$\Leftrightarrow 2x-3<e$
$\Leftrightarrow x<\frac{3+e}{2}$
$\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;\frac{3+e}{2}\right[$
$S_{\mathbb{R}}=\mathrm{V}\cap\left]-\infty;\frac{3+\mathrm{e}}{2}\right[$
$=\left]\frac{3}{2};\frac{3+\mathrm{e}}{2}\right[$</td>
<td>2) $(lnx)^2-5lnx-6\geq 0$
Ensemble de validité V
$x\epsilon V \Leftrightarrow x>0$ donc $V=]0;+\infty[$

$(lnx)^2-5lnx-6\geq 0$
Posons $lnx=\mathrm{X}$, . On a: $\mathrm{X}^2-5\mathrm{X}+6\geq 0$
$\Delta=25-24=1$
$\mathrm{X}=2$ ou $\mathrm{X}=3$
Etudions le signe de $\mathrm{X}^2-5\mathrm{X}+6$
<table>
<tr><td>X</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>2</td><td></td><td>3</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{X}^2-5\mathrm{X}+6$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
</table>
$\mathrm{X}^2-5\mathrm{X}+6\geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{X}\epsilon]-\infty;2]\cup[3;+\infty[$
$(lnx)^2-5lnx-6\geq 0 \Leftrightarrow lnx \; \epsilon]-\infty;2]$ ou $lnx \; \epsilon[3;+\infty[$
$\Leftrightarrow lnx\leq 2$ ou $lnx\geq 3 \Leftrightarrow x\leq \mathrm{e}^2$ ou $x\geq e^3$
$\Leftrightarrow x\in]-\infty;\mathrm{e}^2]\cup[e^3;+\infty[$
$S_{\mathbb{R}}=V\cap(]-\infty;\mathrm{e}^2]\cup[e^3;+\infty[)$
$=]0;\mathrm{e}^2]\cup[e^3;+\infty[$</td>
</tr>
</table>

Exercice de maison

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

a) $\ln\mathrm{x}-3\geq 0$ b) $2(lnx)^2-3lnx-2\leq 0$.

IV. Dérivée et primitives

1. Dérivée

Propriété

Si u est une fonction dérivable et strictement positif sur un intervalle K, alors $ln(u)$ est dérivable sur K et on a : $(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$

Exercice de fixation

Dans chaque cas, la fonction f est dérivable sur I. Détermine la fonction dérivée.

1) $f(x)=\ln(5x+2)$, $I=]0;13[$

2) $f(x) = \ln(2x^2 - x - 1)$, $I = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$

Solution

1) Pour $x \in]0; 13[$, $f'(x) = \frac{5}{5x+2}$

2) Pour $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$, $f'(x) = \frac{4x-1}{2x^2-x-1}$

Exercice de maison

Dans chaque cas, la fonction f est dérivable sur I. Détermine leur fonction dérivée.

1)$f(x) = \ln(x^2 + 2)$, $I = \mathbb{R}$ 2)$f(x) = \ln(-3x)$, $I =]-2; -1[$

2)$f(x) = \ln(-3x^2 + 5x - 2)$, $I = \left]\frac{2}{3}; 1\right[$

2. Primitives

Propriété

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K, alors la fonction $\frac{u'}{u}$ a pour primitives sur K, la fonction ln(u)+ α (α∈ℝ)

Point méthode

Fonctions	**Primitives**
$\boldsymbol{f: x \longmapsto \frac{1}{x}, (x > 0)}$	$\boldsymbol{F: x \mapsto \ln(x) + k,}$ $k \in \mathbb{R}$
$\boldsymbol{f: x \mapsto \frac{a}{cx+d}, c \neq 0 \text{ et } cx + d > 0}$	$\boldsymbol{F: x \mapsto \frac{a}{c}\ln(cx+d) + k}$; $k \in \mathbb{R}$
$\boldsymbol{f: x \longmapsto \frac{u'(x)}{u(x)}, \quad u(x) > 0}$	$\boldsymbol{F: x \mapsto \ln(u(x)) + k}$; $k \in \mathbb{R}$

Exercice de fixation

Détermine sur I les primitives de chacune des fonctions suivantes :

$a)$ $f(x) = \frac{1}{x}$ et $I =]0; +\infty[$ b)$f(x) = \frac{2}{-3x+7}$ $et\ I = \left]-\infty; \frac{7}{3}\right[$,

c) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+3}$, $I =]0; +\infty[$

Solution

a) Déterminons les primitives sur I de la fonction f telle que : $f(x) = \frac{1}{x}$ et $I =]0; +\infty[$

Les primitives de f sur $]0; +\infty[$, sont les fonctions F telles que : $F(x) = \ln(x) + \alpha$ (α∈ℝ)

b) Déterminons les primitives sur I de la fonction f telle : $f(x) = \frac{2}{-3x+7}$ $et\ I = \left]-\infty; \frac{7}{3}\right[$

Les primitives de f sur $\left]-\infty; \frac{7}{3}\right[$ sont les fonctions F telles que : $F(x) = -\frac{2}{3}\ln(-3x + 7) + \alpha$ (α∈ℝ).

c) Déterminons les primitives sur I de la fonction f telle que : $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+3}$ $et\ I =]0; +\infty[$

Soit $u(x) = x^2 + x + 3$ et $u'(x) = 2x + 1$

On a : $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ et pour $x \epsilon]0; +\infty[, u(x) > 0$

Les primitives de f sur $]0; +\infty[$ sont les fonctions F telles que : $F(x) = \ln(x^2 + x + 3) + \alpha$ (α∈ℝ).

Exercice de maison

Détermine sur I les primitives de chacune des fonctions suivantes :

$a)$ $f(x) = -\frac{1}{x}$ +2 et $I =]0; +\infty[$ b)$f(x) = \frac{1}{2x-3}$ $et\ I = \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$

c) $f(x) = \frac{-4x+5}{-2x^2+5x-3}$, $I = \left]1; \frac{3}{2}\right[$.

C- SITUATION COMPLEXE

Le médico-scolaire de ta commune organise une campagne de dépistage de la fièvre typhoïde dans ton établissement. Après avoir examiné n élèves pris au hasard, le médecin chef affirme que la probabilité d'avoir au moins un élève non atteint de la fièvre typhoïde dans cet établissement est de $1-(0,325)^n$.
Afin de sensibiliser davantage les élèves contre cette maladie, le chef de l'établissement veut connaitre le nombre minimum d'élèves tel que la probabilité d'avoir au moins un élève non atteint de la fièvre typhoïde soit supérieur à 98%.Ne sachant pas faire , il sollicite ta classe.
En te basant sur tes connaissances mathématiques, détermine ce nombre minimum d'élèves.

Solution
Pour déterminer le nombre le nombre minimum d'élèves tel que la probabilité d'avoir au moins un élève non atteint de la fièvre typhoïde soit supérieur à 98% :

- je vais résoudre une inéquation en utilisant la fonction logarithme ln et une de ses propriétés algébriques
- je vais conclure.

Résolvons dans IN l'inéquation : $1-(0,325)^n \geq 0,98$

$1-(0,325)^n \geq 0,98$

$\Leftrightarrow\ -(0,325)^n \geq 0,98-1$

$\Leftrightarrow (0,325)^n \leq 0,02$

$\Leftrightarrow ln(0,325)^n \leq \ln(0,02)$

$\Leftrightarrow nln(0,325) \leq \ln(0,02)$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(0,02)}{\ln(0,325)}$

$\Leftrightarrow n \geq 3,48$ donc la valeur minimale de n est 4.

Conclusion
le nombre minimum d'élèves tel que la probabilité d'avoir au moins un élève non atteint de la fièvre typhoïde soit supérieur à 0,98 est 4.

D. EXERCICES

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1
Justifie que pour tout nombre réel > 1 , on a : $\ln(x+1)+\ln(x-1)=\ln(x^2-1)$

Exercice 2
Résous dans ℝ chacune des équations proposées :

a) $\ln(3-x)=2$ b) $\ln(x^2-6)=\ln(5x)$ c) $1-\ln x=0$
d) $(\ln x-2)(\ln x-1)=0$ e) $\ln^2(x)-4\ln(x)+3=0$

Exercice 3
Résous dans ℝ les inéquations suivantes d'inconnue *x*.
a) $\ln(x+1) \geq 1$; b) $\ln(-x+2) \leq 0$; c) $\ln(-2x+3) \geq \ln(x)$; d) $\ln(x^2+1) \geq \ln(-x+2)$
e) $\ln(x)+\ln(x+1) \geq 0$; f) $(\ln x-2)(\ln x-1) \leq 0$

Exercice 4
Détermine la limite des fonctions suivantes en *a* :
a) $f(x) = \ln(x) - 3x$ et $a = 0$; b) $g(x) = -x - 3 - \ln(x)$ et $a = +\infty$;
c) $h(x) = x - 2 - \ln(x)$ et $a = +\infty$.

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, on admet que la fonction f est dérivable sur son ensemble de définition. Calcule la fonction dérivée de f.

a) $f(x) = x - 3 - \ln(x)$ b) $f(x) = -x + 2 + \ln(x)$ c) $f(x) = \ln(-3x + 4)$

d) $f(x) = -3x + 2 - \ln(x)$ e) $f(x) = \ln(-x^2 + 2x - 1)$

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive de la fonction f sur K

a) $f(x) = -\frac{3}{x}$ et $K =]0; +\infty[$ b) $f(x) = \frac{3}{2x-1}$ et $K =]1; +\infty[$

c) $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+4}$ et $K =]1; +\infty[$ d) $f(x) = -5 + \frac{1}{x}$ et $K =]0; +\infty[$

Exercice7

Soit la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = -3x + \ln(x)$

Détermine la limite de *f* en +∞ puis en 0

Exercice 8

Pour chacune des fonctions suivantes ;

a) Calcule la dérivée.
b) Etudie les variations.

$f(x) = -x+\ln(x)$; $g(x) = \ln(-3x^2 - 2x + 5)$; $h(x) = -3x - 1 - \ln(x)$

Exercice 9

Soit *f* la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = 3 - x - \ln(x)$.

a) Calcule les limites de *f* en 0 et en$+\infty$.
b) Calcule la dérivée *f'* de *f*.
c) Etudie les variations de *f* et dresse son tableau de variation.

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 10

Soit *f* la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = 2 - x + \ln(x)$.

1) a-Calcule la limite de *f* en +∞ .
   b-Calcule la limite de *f* en en 0, puis donne une interprétation graphique du résultat.
2) Calcule la dérivée *f'* de *f*.
3) Etudie les variations de *f*.
4) Dresse le tableau de variation de *f* sur]0 ; +∞[.
5) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique a sur [3 ; 4].
6) Trace la courbe représentative de la fonction *f* dans le repère orthonormé (O, I, J).

Exercice 11

On considère la fonction *f* définie sur ℝ par : $f(x) = 1 + x - \ln(x)$.

1) Calcule la limite de *f* en +∞ et en 0.
2) Calcule la dérivée *f'* de *f* sur ℝ.
3) Etudie les variations de *f*.
4) Dresse le tableau de variation de *f*.
5) Trace (C_f), représentation graphique de *f* dans le repère orthonormé (O, I, J).

Exercice 12

Soit la fonction f de ℝ vers ℝ définie par : $f(x) = x - \ln(x)$. On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J),

1. Précise l'ensemble de définition de f, noté D_f.
2. Calcule la limite de f en 0 puis interprète graphiquement le résultat.
3. a) Vérifie que pour tout nombre réel $x > 0$, $f(x) = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$
   b) Déduis-en la limite de f en $+\infty$.

4. a) On admet que f est dérivable sur $]\mathbf{0}; +\infty[$. Calcule $f'(x)$.
   b) Déduis-en les variations de f et dresse son tableau de variations.
6. Reproduis et complète le tableau suivant :

x	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5
f(x)						

7. Trace (C) et (Δ) sur $]0; 3]$

<u>Exercice type Bac</u>
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.
On considère la fonction f dérivable et définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = -2x + 1 + lnx$.
On note (C) la représentation graphique de f dans le repère (O, I, J).
1. Justifie que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ puis donne une interprétation graphique de cette limite.
3. Calcule la limite de f en $+\infty$.
2. a) Vérifie que pour tout élément x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{-2x+1}{x}$
   b) Etudie le signe de la dérivée $f'(x)$.
      Déduis-en les variations de f sur $]0; +\infty[$.
   c) Dresse le tableau de variation de f.
4. Recopie et complète le tableau des valeurs ci – dessous.

x	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$									

5. Construis (C) sur l'intervalle $]0; 4]$.

Solution
1. Justifions que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ puis donnons une interprétation graphique de cette limite.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (-2x + 1 + lnx)$

$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (-2x + 1) = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (lnx) = -\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$

Interprétation graphique : la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe (C).

2. Calculons la limite de f en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2x + 1 + lnx) = \lim\limits_{x \to +\infty} x(-2 + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x})$

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (-2 + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x}) = -2 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

3. a) Vérifions que pour tout élément x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{-2x+1}{x}$
Pour tout élément x de $]0; +\infty[$, $f(x) = -2x + 1 + lnx$

Donc pour tout élément x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = -2 + \frac{1}{x} = \frac{-2x+1}{x}$.

   b) Etudions le signe de la dérivée $f'(x)$.

Pour tout élément x de $]0; +\infty[$, $x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-2x + 1$.

$f'(x) = 0$ équivaut à $-2x + 1 = 0$

équivaut à $\quad x = \frac{1}{2}$

Tableau de signe de $f'(x)$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

- Pour tout $x \epsilon \left]0; \frac{1}{2}\right[$, $f'(x) > 0$.
- Pour tout $x \epsilon \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$, $f'(x) < 0$.

  Variations de f
- f est strictement croissante sur $\left]0; \frac{1}{2}\right[$
- f est strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

c) Dressons le tableau de variation de f.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-ln2$	$\searrow$	$-\infty$

2. Recopions et complétons le tableau des valeurs ci – dessous.

x	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	-3,2	-0,7	1	-1,6	-2,3	-3,1	-4	-4,7	-5,6

5.Construction (C) sur l'intervalle $]0; 4]$.