Thème : Fonctions numériques

LEÇON 4 : FONCTION EXPONENTIELLE

Durée : 12 heures **Code :**

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Des élèves de terminale A travaillent les samedis dans le service marketing d'un grand magasin. Ce magasin veut informer la population des nouvelles offres promotionnelles. Le service marketing a observé que la proportion P de la population qui est au courant de ces nouvelles offres après t jours d'annonces publicitaires est donnée par la fonction :

$\mathrm{P(t)} = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}21\mathrm{t}}$.

Le responsable du magasin veut arrêter cette publicité lorsque 90 % de la population sera au courant des nouvelles offres mais ne sait pas quand. Il te sollicite pour savoir le nombre de jours qu'il devra consacrer à la publicité. Tu portes le problème à ta classe. Ensemble, elle décide de trouver le nombre de jour qu'il faudra.

B- CONTENU DE LA LECON

I- Définition et propriétés algébriques.

1. Définition et notation

a) Définition

La fonction exponentielle népérienne, notée exp, est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

b) Autre notation :

Pour tout nombre x réel , $\exp(x)$ se note également e^{x} : $\exp(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{x}$.

c) Conséquences de la définition

- L'ensemble de définition de la fonction exp est $\mathbb{R}$.
- Pour tout nombre réel a strictement positif et pour tout nombre réel b,
  $\ln(a) = b$ équivaut à $a = e^{b}$.
- $\mathrm{e}^{0} = 1$; $\mathrm{e}^{1} = \mathrm{e}$.
- Pour tout nombre réel a, $\mathrm{e}^{a} > 0$.
- Pour tout nombre réel a, $\ln(\mathrm{e}^{a}) = a$.
- Pour tout nombre réel a strictement positif, $\mathrm{e}^{\ln a} = a$.

Exercices de fixation

Exercice 1

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

Affirmations	Réponses
L’ensemble de définition de la fonction x: ↦ e^x est ℝ	
Le nombre e^{-10} est négatif.	
Le nombre e^0 est égal à 0.	
Le nombre réel, $e^{\ln(12)}$ est égal à ln12.	
Le nombre $\ln(e^{51})$ est égal à 51	

Solution

Affirmations	Réponses
L’ensemble de définition de la fonction x: ↦ e^x est ℝ	vrai
Le nombre e^{-10} est négatif.	Faux
Le nombre e^0 est égal à 0.	faux
Le nombre réel, $e^{\ln(12)}$ est égal à ln12.	Faux
Le nombre $\ln(e^{51})$ est égal à 51	vrai

Exercice 2

Ecris chacun des nombres A, B, C et D suivants sous forme de nombre rationnel.

A = $\ln(e^8)$ B = $\ln(e^{-5})$ C = $e^{\ln 3}$ D = $e^{-\ln 2}$

Solution

A = $\ln(e^8)$ $= 8$	B = $\ln(e^{-5})$ $= -5$	C = e^{ln3} $= 3$	D = e^{-ln2} $=e^{ln\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{2}$

2. Propriétés algébriques

Propriété : Pour tous nombres réels *a* et *b*, r un nombre rationnel

$e^a \times e^b = e^{a+b}$; $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

$(e^a)^r = e^{a\times r}$; $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$

Exercice de fixation

Ecris chacun des nombres E, F et G suivants sous la forme $e^k, k \in \mathbb{R}$.

E = $e^6 \times e^{-4}$ F = $(e^{-2})^4$ G = $\frac{e^4}{e^{-5}}$

Solution

E = $e^6 \times e^{-4}$ $= e^{6+(-4)}$ $= e^2$	F = $(e^{-2})^4$ $= e^{-2\times 4}$ $= e^{-8}$	G = $\frac{e^4}{e^{-5}}$ $=e^{4+5}$ $=e^9$

II- Limites, sens de variations et représentation graphique de la fonction exponentielle

1. Limites de référence

(1) $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ (2) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (4) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + 3)$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2xe^x$; c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 1 - e^x)$

Solution

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + 3)$ or $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 3 = 3$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x + 3 = 3$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} 2 = 2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} 2xe^x = 2 \times 0 = 0$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 1 - e^x = \lim\limits_{x \to +\infty} x(2 - \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x})$

$= -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (2 - \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x}) = -\infty \end{cases}$

2. Dérivée et sens de variation de la fonction exponentielle.

Propriété

La fonction exponentielle népérienne est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x,
La dérivée de la fonction $x \longmapsto e^x$ est la fonction $x \longmapsto e^x$

$(e^x)' = e^x$ et **$e^x > 0$**.

La fonction exponentielle népérienne est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$(e^x)'$	$+$
e^x	$0 \nearrow +\infty$

Exercice de fixation

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $f(x) = 2x + e^x$.

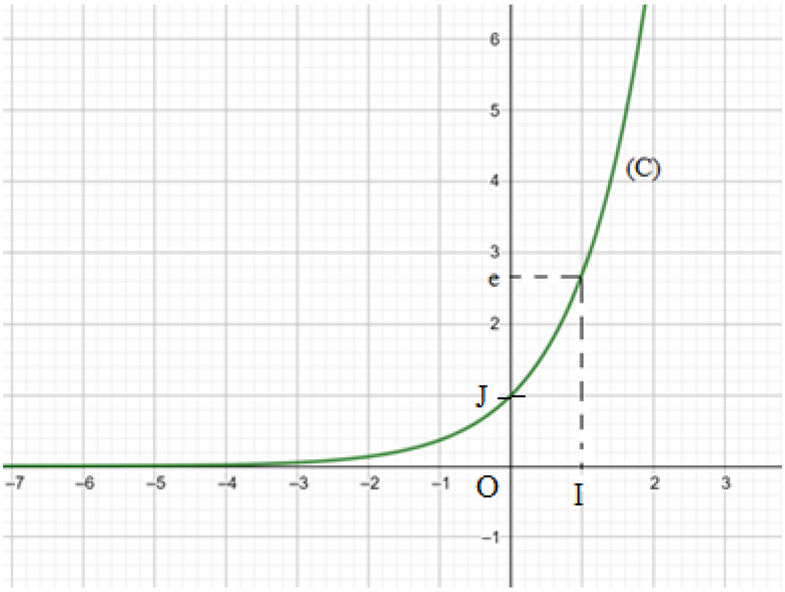
1. Calcule :$f'(x)$.
2. Donne le sens de variation de *f*.

Solution

1. Pour tout *x* élément de$\mathbb{R}$, $f'(x) = 2 + e^x$.
2. Pour tout *x* élément de$\mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ donc la fonction *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Représentation graphique de la fonction exponentielle népérienne

Notons (C) la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto e^x$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. Donc la droite d'équation y = 0, c'est-à-dire l'axe (OI), est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.



III - **<u>Résolution d'équations et d'inéquations avec la fonction exponentielle nepérienne</u>.**

1. <u>Propriété</u>

<u>Propriété :</u>

Pour tous nombres réels *a* et *b* :

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
- $e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$
- $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$
- $e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b$

2. <u>Exemples de résolution d'équations</u>

Résous dans ℝ chacune les équations suivantes :

1) $e^{2x-1} = e^{x+5}$
2) $e^{x-2} = 5$
3) $e^{2x} + e^x - 6 = 0$

<u>Solution</u>

1) Ensemble de validité V: V= $\mathbb{R}$ $e^{2x-1} = e^{x+5}$ $\Leftrightarrow 2x - 1 = x + 5$ $\Leftrightarrow x = 6$ $S_{\mathbb{R}} = \{6\}$	2) Ensemble de validité V: V= $\mathbb{R}$ $e^{x-2} = 5$ $\Leftrightarrow e^{x-2} = e^{\ln 5}$ $\Leftrightarrow x - 2 = \ln 5$ $\Leftrightarrow x = 2 + \ln 5$ $S_{\mathbb{R}} = \{2 + \ln 5\}$	3) Ensemble de validité V: V= $\mathbb{R}$ $e^{2x} + e^{x} - 6 = 0$ $\Leftrightarrow (e^{x})^2 + e^{x} - 6 = 0$ Posons**:** $X = e^{x}$. Donc $X > 0$ L'équation devient : $X^2 + X - 6 = 0$ Résolution de cette équation : $\Delta = 1 + (-4) \times (-6) = 25 = 5^2$ $X = \frac{-1-5}{2}$ ou $X = \frac{-1+5}{2}$ $X=-3$ ou $X=2$, $e^{x} = -3$ est impossible car $e^{x} > 0$ pour tout réel x, $e^{x} = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$ $S_{\mathbb{R}} = \{\ln 2\}$

3. <u>Exemples de résolution d'inéquations</u>

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune les inéquations suivantes :
1) $e^{2x-1} < 8$
2) $e^{2x} - 5e^{x} + 6 \geq 0$

<u>Solution</u>

<table>
<tr>
<td>1) Ensemble de validité V:
V= $\mathbb{R}$

$e^{2x-1} < 8$
$\Leftrightarrow \ln(e^{2x-1}) < \ln 8$
$\Leftrightarrow 2x - 1 < \ln 8$
$\Leftrightarrow x < \frac{1+\ln 8}{2}$
$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty; \frac{1+\ln 8}{2}\right[$
$S_{\mathbb{R}} = V \cap \left]-\infty; \frac{1+\ln 8}{2}\right[$
$= \left]-\infty; \frac{1+\ln 8}{2}\right[$</td>
<td>2) Ensemble de validité V: V= $\mathbb{R}$

$e^{2x} - 5e^{x} - 6 \geq 0$
Posons $e^{x} = X$, donc $X > 0$. On a $X^2 - 5X + 6 \geq 0$
$\Delta = 25 - 24 = 1$
$X = 2$ ou $X = 3$
Etudions le signe de $X^2 - 5X + 6$
<table>
<tr><td>X</td><td>$-\infty$</td><td>2</td><td></td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$X^2 - 5X + 6$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr>
</table>
$X^2 - 5X + 6 \geq 0 \Leftrightarrow X \in]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$
On a : $e^{x} \in]-\infty; 2]$ ou $e^{x} \in [3; +\infty[$
$\Leftrightarrow e^{x} \leq 2$ ou $e^{x} \geq 3$
$\Leftrightarrow x \leq \ln 2$ ou $x \geq \ln 3$
$\Leftrightarrow x \in]-\infty; \ln 2]$ ou $x \in [\ln 3; +\infty[$
$S_{\mathbb{R}} = V \cap ( ]-\infty; \ln 2] \cup [\ln 3; +\infty[ )$
$=]-\infty; \ln 2] \cup [\ln 3; +\infty[$</td>
</tr>
</table>

IV - <u>Dérivées et primitives</u>

1. <u>Dérivée</u>

<u>Propriété</u>

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K, alors e^{u} est dérivable sur K et on a :
$\mathbf{(e^{u})' = u'e^{u}}$

<u>Exercice de fixation</u>

Dans chaque cas, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Détermine la fonction dérivée de f.

1) $f(x) = e^{-4x+3}$
2) $f(x) = e^{x+3} - 2x + 5$
3) $f(x) = (2x + 1)e^{x}$

Solution

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -4e^{-4x+3}$
2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2 + e^{x+3}$
3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^{x} + (2x + 1)e^{x}$
$f'(x) = (2x + 3)e^{x}$

2. Primitives (Terminale A1 uniquement)

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K, alors la fonction $u'e^{u}$ a pour primitive sur K, la fonction $e^{u} + \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

Point méthode

Fonctions	**Primitives**
$\mathbf{f: x \longmapsto e^{x}},$	$\mathbf{F: x \longmapsto e^{x} + k}$, $k \in \mathbb{R}$
$\mathbf{f: x \longmapsto e^{ax+b}}$, $\mathbf{a \neq 0}$	$\mathbf{F: x \longmapsto \frac{1}{a}e^{ax+b} + k}$; $k \in \mathbb{R}$
$\mathbf{f: x \rightarrow\longmapsto u'(x)e^{u(x)}}$	$\mathbf{F: x \longmapsto e^{u(x)} + k}$; $k \in \mathbb{R}$

Exercice de fixation

Détermine sur $\mathbb{R}$ les primitives de chacune des fonctions suivantes :
a) $f(x) = e^{x}$, b) $f(x) = e^{-3x+7}$, c) $f(x) = xe^{x^2}$

Solution

a) Déterminons les primitives de la fonction f telle que : $f(x) = e^{x}$ sur $\mathbb{R}$.
Les primitives de f sur$\mathbb{R}$, sont les fonctions F telles que : $F(x) = e^{x} + \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

b) Déterminons les primitives de la fonction f telle : $f(x) = e^{-3x+7}$ sur $\mathbb{R}$.
Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F telles que : $F(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x+7} + \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

c) Déterminons les primitives de la fonction f telle que : $f(x) = xe^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$
On a: $u'(x)e^{u(x)} = 2xe^{x^2}$, $f(x) = \frac{1}{2} u'(x)e^{u(x)}$.
Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F telles que : $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

C – SITUATION COMPLEXE

Des élèves de terminale A travaillent les samedis dans le service marketing d'un grand magasin. Ce magasin veut informer la population des nouvelles offres promotionnelles. Le service marketing a observé que la proportion P de la population qui est au courant de ces nouvelles offres après *t* jours d'annonces publicitaires est donnée par la fonction : $P(t) = 1 - e^{-0,21t}$.
Le magasin veut arrêter cette publicité lorsque 90 % de la population sera au courant des nouvelles offres mais ne sait pas quand. Il te sollicite pour savoir le nombre de jours qu'il devra consacrer à la publicité.

Détermine le nombre de jours nécessaires au grand magasin pour faire la publicité de ces nouvelles offres.

Solution

- Pour déterminer le nombre de jours je vais utiliser la fonction exponentielle népérienne.
- Détermination du nombre de jours en utilisant une équation faisant intervenir la fonction exponentielle.
- Résolution de l'équation dans $\mathbb{R}$: $1 - e^{-0,21t} = \frac{90}{100}$.

$e^{-0,21t} = 0,1$ équivaut à $-0,21t = \ln 0,1$

équivaut à $t = \frac{\ln 0,1}{-0,21} \approx 10,96$

Comme t est un entier naturel, on prend t = 11.

- Conclusion : le grand magasin fera la publicité pendant 11 jours.

D- EXERCICES

1- Exercices d'application

Exercice 1

Simplifie l'expression suivante $A = \frac{e^{5x} \times e^{-2x}}{e^{-x+2}}$.

Solution

$A = \frac{e^{5x} \times e^{-2x}}{e^{-x+2}} = \frac{e^{5x-2x}}{e^{-x+2}} = e^{5x-2x+x-2} = e^{4x-2}$

Exercice 2

Résous dans $\mathbb{R}$.

(E) : $\frac{x(e^{x}-1)}{x^2+1} = 0$; (I) : $\frac{x^2+x-2}{e^{2x}-1} \geq 0$

Solution

- Résolution de (E)

(E) équivaut à $\frac{x(e^{x}-1)}{x^2+1} = 0$ équivaut à $x(e^{x} - 1) = 0$

équivaut à $x = 0$ ou $e^{x} - 1 = 0$

équivaut à $x = 0$

$S_{\mathbb{R}} = \{ 0 \}$

Résolution de (I):

Posons $f(x) = \frac{x^2+x-2}{e^{2x}-1}$

x	$-\infty$ -2	0	1	$+\infty$
$x^2 + x - 2$	$+$	$-$	$-$	$+$
$e^{2x} - 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$ ‖	$-$	$+$

$S_{\mathbb{R}} = [-2; 0[\cup [1; +\infty[$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, on admet que la fonction f est dérivable sur$\mathbb{R}$.
Calcule la fonction dérivée de f.

a) $f(x) = e^{-2x+1}$; b) $f(x) = x + 2 - e^{x}$; c)$f(x) = (1 - x)e^{x}$.

Solution

a) $f'(x) = -2e^{-2x+1}$; b) $f'(x) = 1 - e^{x}$; c) $f'(x) = -e^{x} + (1 - x)e^{x} = -xe^{x}$

Exercice 4

Détermine la limite des fonctions suivantes en a :

a) $f(x) = (2x + 1)e^{x} + \frac{1}{x}$, a = + ∞

b) $f(x) = 2 \times \frac{e^{x}-1}{x} + x^{2}$, a = 0.

Solution

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x + 1)e^{x} + \frac{1}{x} = +\infty$ car $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

b) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(2 \times \frac{e^{x}-1}{x} + x^{2}\right) = 2$ car $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. (A1 seulement)

a) $f(x) = e^{4x}$; B) $f(x) = e^{3x} - e^{-\frac{1}{2}x} + 5$; c) $f(x) = x - \frac{3}{4} + 3e^{-2x+1}$

Solution

$a)$ $F(x) = \frac{1}{4}e^{4x}$; b) $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + 5x$; c) $f(x) = \frac{1}{2}x^{2} - \frac{3x}{4} - \frac{3}{2}e^{-2x+1}$

Exercices de renforcement

Exercice 6

Pour chaque affirmation, trois réponses sont proposées dont une seule est juste. Choisis la réponse juste.

N°	Affirmations	A	B	C
1	Pour tout $x \neq 0$, l'expression $\frac{e^{2x}-e^{x}}{e^{x}+1}$ est égale à	$\frac{e^{x}-1}{1-e^{-x}}$	$\frac{e^{x}-1}{1+e^{-x}}$	$\frac{e^{x}-e^{-x}}{1-e^{-x}}$
2	L'équation: $x \in \mathbb{R}$, $e^{x^{2}-x-1} = e^{3x-4}$ a pour solution	x =1 et x= -3	x = -1 et x= 3	x = 1 et x= 3
3	La limite, lorsque x tend vers +∞, de $e^{x} - 2x$	+∞	-∞	0

4	La dérivée de la fonction f définie pour tout réel x, par : $f(x) = xe^{-2x}$ est :	$f'(x) = 2xe^{-2x}$	$f'(x) = (2x-1)\, e^{-2x}$	$f'(x) = (1-2x)e^{-2x}$

Solution

1. B ; 2. C ; 3. A ; 4.C

Exercice 7

Simplifie les expressions suivantes :

a) $(e^{2x})^2 \times (e^{-x})^2$; b) $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$.

Solution

a) $(e^{2x})^2 \times (e^{-x})^2 = e^{4x} \times e^{-2x} = e^{4x-2x} = e^{2x}$

b) $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = (e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x})$
$= (2e^{-x})(2e^x) = 4e^{-x}e^x = 4$

Exercice 8

Etudie le signe de chacune des expressions suivantes :
B $= e^{2x} + e^x - 2$; C$= e^x - 2e^{-x} + 1$

Solution

- **Signe de** B.

$B = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 2$

Posons $\mathrm{e}^x = \mathrm{X}$, donc $\mathrm{X} > 0$. On a $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 2$
$\Delta = 1 + 8 = 9$
$\mathrm{X} = -2$ ou $\mathrm{X} = 1$
Etudions le signe de $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 2$

X	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 2$		+	0	-	0	+	

$\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{X} \in]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$
On a : $\mathrm{e}^x \in]-\infty; -2]$ ou : $\mathrm{e}^x \in [1; +\infty[$
$\mathrm{e}^x \leq -2$ est impossible ou $\mathrm{e}^x \geq 1$ équivaut à $x \geq \ln 1$
Pour $x \in [0; +\infty[$, $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 2 > 0$
Pour $\in]-\infty; 0]$, $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 2 < 0$

- **Signe de C**

C$= e^x - 2e^{-x} + 1 = \frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 2}{\mathrm{e}^x}$

Comme pour $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc le signe de C est le même que celui de B

(Terminale A1 uniquement)

Exercice 9

Détermine la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x+2}$; b) $f(x) = \frac{xe^x}{x+1}$.

Solution

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{e^x}}{1+\frac{2}{e^x}} = 1$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ et $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{e^x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{2}{e^x} = 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x+1}{e^x+2} = \frac{1}{2}$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x + 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x + 2 = 2 \end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x}) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{x+1} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$.

Exercice 10

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = e^{3x} - e^{-\frac{1}{2}x} + 5$;

b) $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$

c) $f(x) = (2x-3)e^{-x^2+3x+1}$

Solution

a) $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + 5x$; b) $F(x) = \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})$; c) $F(x) = -e^{-x^2+3x+1}$.

Exercices d'approfondissement

Exercice 11

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $f(x) = 1 - x + e^x$. On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J),

1. Précise l'ensemble de définition de f, noté D_f.
2. Calcule la limite de f en $-\infty$.
3. a) Vérifie que pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f(x) = x\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{e^x}{x}\right)$

   b) Déduis-en la limite de f en $+\infty$.
4. a) Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

   b) Précise la position relative de (C) par rapport à (Δ).

5. a) On admet que f est dérivable sur$\mathbb{R}$. Calcule $f'(x)$.
   b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$
   c) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) > 0$
   d) Déduis-en les variations de f et dresse son tableau de variations.
6. Reproduis et complète le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)						

7. Trace (C) et (Δ) sur $[-3\,;2]$

<u>Solution</u>

1. l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (1 - x + e^x)$
   $= +\infty$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - x = +\infty$
3. a) Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f(x) = 1 - x + e^x = x\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{e^x}{x}\right)$
   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - x + e^x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{e^x}{x}\right) = +\infty$
   car $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

4.a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (-x + 1) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
   Donc la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

b) On a : $f(x) - (-x + 1) = e^x$ donc le signe de $f(x) - (-x + 1)$ est celui de e^x, or pour tout réel x, $e^x > 0$ par suite (C) est « au-dessus » de (Δ) sur$\mathbb{R}$.

5.a) pour tout élément x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -1 + e^x$

b) $f'(x) = 0$ équivaut à $-1 + e^x = 0$
   équivaut à $e^x = 1$
   équivaut à $x = 0$

c) $f'(x) > 0$ équivaut à $-1 + e^x > 0$
   équivaut à $e^x > 1$
   équivaut à $x > 0$

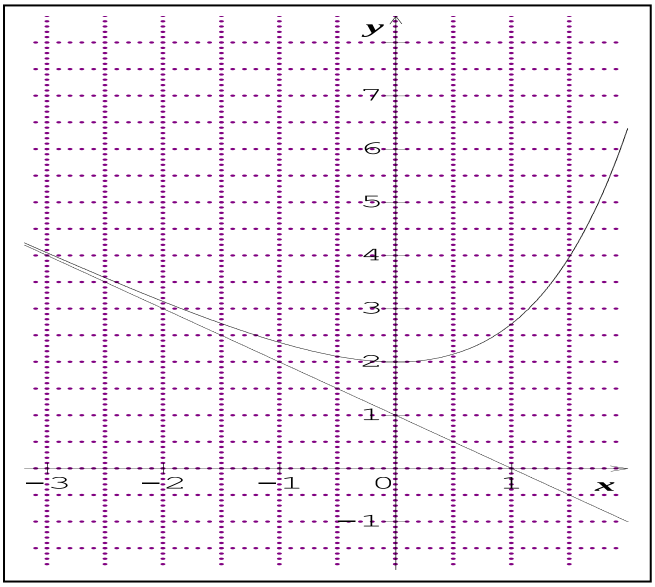
d) Pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur$]0;\ +\infty[$.
   Pour tout $x < 0$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur$]-\infty; 0[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

6. on a

x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	4,05	3,39	2,39	2	2,78	6,59

7. Construction de (C) et (Δ) sur $[-3\,;2]$



<u>Exercice 12</u>

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.
On considère la fonction f dérivable et définie sur $]-\infty\,;2]$ par $f(x) = (-2x+3)e^{x}$.
On note (C) la représentation graphique de f dans le repère (O, I, J).
1. Justifie que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, puis interprète graphiquement ce résultat.
2.a) Vérifie que pour tout élément x de $]-\infty\,;2]$, $f'(x) = (-2x+1)e^{x}$
b) Etudie le signe de la dérivée $f'(x)$ sur $]-\infty\,;2]$.
Déduis-en les variations de f sur $]-\infty\,;2]$.
c) Dresse le tableau de variation de f.
3. Soit A le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses et B le point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées.
Détermine les coordonnées respectives des points A et B.
4. Recopie et complète le tableau des valeurs ci – dessous.

x	-4	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	0,2	0,4		1,8		3,3			$-7{,}4$

5. Construis (C) sur l'intervalle $]-\infty\,;2]$.

<u>Solution</u>

1 Justifions que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
On a $(-2x+3)e^{x} = -2x\,e^{x} + 3e^{x}$ or $\lim\limits_{x\to-\infty} -2xe^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^{x} = 0$
Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
Interprétation graphique :

La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à(C) en $-\infty$

2. a) <u>Vérifions que pour tout élément x de$]-\infty\,;2]$, $f'(x) = (-2x+1)e^x$</u>

Pour tout élément x de $]-\infty\,;2]$ f est dérivable.

$$f'(x) = -2e^x + (-2x+3)e^x$$
$$= (-2x+3-2)e^x$$
$$f'(x) = (-2x+1)e^x$$

b) <u>Etudions le signe de la dérivée $f'(x)$ sur$]-\infty\,;2]$.</u>

Le signe de la dérivée est celui de$(-2x+1)$.

- $(-2x+1) = 0$ équivaut à $x = \frac{1}{2}$
- $(-2x+1) \geq 0$ équivaut à $x \leq \frac{1}{2}$ soit $x \in \ ]-\infty;\frac{1}{2}]$
- $(-2x+1) < 0$ équivaut à $x > \frac{1}{2}$ soit $x \in \ ]\frac{1}{2};+\infty[$

Variation de f sur $]-\infty\,;2]$

Pour tout $x \in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$

Pout tout $x \in \ ]\frac{1}{2};+\infty[$, $f'(x) < 0$ f est strictement décroissante sur $]\frac{1}{2};+\infty[$

c) le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		+	0	+	
f(x)	0	↗	3,3	↘	

3. Déterminons les coordonnées respectives des points A et B.

- Posons :A $(x_A; y_A)$

A le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses équivaut à y_A=0

Soit $(-2x_A+3)e^{x_A}$ =0

C'est-à-dire $(-2x_A+3) = 0$

$$x_A = \frac{3}{2}$$

Donc A $(\frac{3}{2}; 0)$

- Posons : B $(x_B; y_B)$

B le point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées équivaut à x_B=0

Soit $(-2 \times 0 + 3)e^0 = y_B$

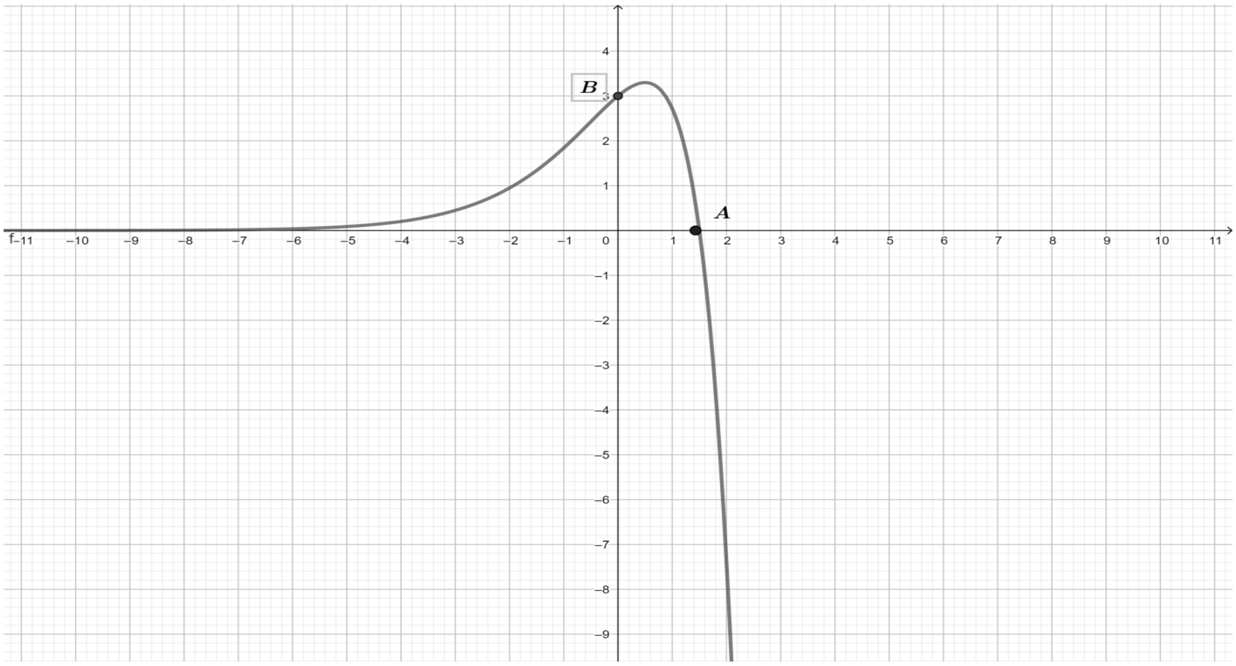
C'est-à-dire $y_B = 3$

Donc B $(0; 3)$

4. Tableau de valeurs

x	-4	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2
Arrondi d'ordre 1 de f(x)	0,2	0,4	0.9	1,8	3	3,3	2,7	0	$-7,4$

Construction


B
A
f