LEÇON 16 : SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN

A. Situation d'apprentissage

Lors d'une sortie éducative dans une société de confection de pagnes, les élèves d'une classe de terminale C remarquent des motifs ci-contre sur un pagne. Un élève affirme qu'avec une homothétie on peut reproduire ces motifs. Un autre élève n'est pas d'accord. Ils décident de consulter leur professeur de mathématique qui parle plutôt d'une autre transformation du plan qui permet de passer d'un motif à l'autre. Les élèves décident de faire des recherches sur cette transformation.	

B. RESUME DE COURS

I. Définition et composition

1. Définition d'une similitude directe

On appelle similitude directe toute composée d'une homothétie et d'un déplacement.

Conséquence immédiate

Toute similitude directe est une transformation du plan

Exemple

Tout déplacement, toute homothétie est une similitude directe.

NB :

On appelle similitude indirecte toute composée d'une homothétie et d'un antidéplacement. Les similitudes indirectes ne sont pas au programme de cette classe.

2. Rapport et angle d'une similitude directe

Propriété 1

Une transformation du plan est une similitude directe du plan si et seulement si elle conserve le rapport des distances et les angles orientés.

C'est-à-dire, pour tous points A et B, M et N (A ≠ B et M ≠ N) d'images respectives A', B', M' et N' par une similitude directe, on a : $\begin{cases} \dfrac{M'N'}{MN} = \dfrac{A'B'}{AB} \\ \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right) = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}\right). \end{cases}$

Propriété et définition

Pour toute similitude directe S du plan, il existe un nombre réel k strictement positif et un réel θ de]-π ; π] tels que pour tous points distincts M et N d'images respectives M' et N' par S, on ait : $\begin{cases} M'N' = kMN \\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}\right) = \theta \end{cases}$.

Le nombre réel strictement positif k tel que $M'N' = kMN$ est appelé le rapport de la similitude directe S.

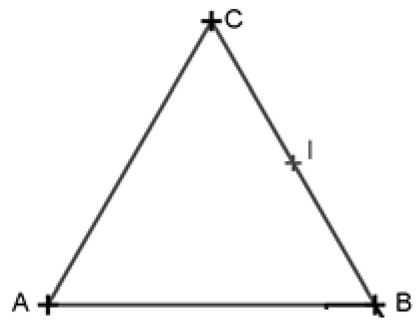
Le nombre réel θ de]-π ; π] tel que $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}\right) = \theta$ est appelé l'angle de la similitude directe S.

Exemples

- Toute translation est une similitude directe de rapport 1 d'angle nul.
- Toute rotation d'angle θ est une similitude directe de rapport 1 et d'angle θ.
- Toute homothétie de rapport k (k>0) est une similitude directe de rapport k et d'angle nul.
- Toute homothétie de rapport k (k<0) est une similitude directe de rapport -k et d'angle π.

Exercice de fixation

On donne un triangle équilatéral direct ABC du plan orienté.
On note I le milieu de [BC].
On considère la similitude directe s telle que : s(I) = B et s(B) = A.
Détermine le rapport et l'angle de s.



Solution

Soit k le rapport de s et θ son angle.

$\begin{cases} s(I) = B \\ s(B) = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BA = kIB \\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{BA}}\right) = \theta \end{cases}$

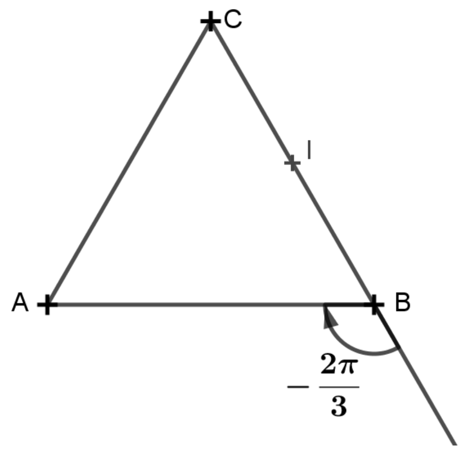
* $k = \dfrac{BA}{IB} = \dfrac{2\,IB}{IB}$

$k = 2$

* $\theta = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{BA}}\right)$

$\theta = -\dfrac{2\pi}{3}$

Donc s est une similitude directe de rapport 2 et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$.



3. Composée de deux similitudes directes et la réciproque d'une similitude directe

Propriété
Le plan est orienté.
• La composée de deux similitudes directes de rapport respectifs k_1 et k_2 et d'angles respectifs θ_1 et θ_2 est une similitude directe de rapport k_1k_2 et d'angle $\theta_1 + \theta_2$.
• La réciproque d'une similitude directe de rapport k et d'angle θ, est une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$.
• Toute similitude directe de rapport k est la composée d'une homothétie de rapport k et d'un déplacement.

<u>**Exercice de fixation**</u>
Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct.
Soit f une similitude directe de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Soit g une similitude directe de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.
Détermine le rapport et l'angle de chacune des applications suivantes :
a) $f \circ g$;
b) $g \circ f$;
c) g^{-1}.

Solution
a) $f \circ g$ est une similitude directe de rapport $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.
b) $g \circ f$ est une similitude directe de rapport $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.
c) g^{-1} est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
REMARQUE : $\boldsymbol{g \circ f}$ ***et*** $\boldsymbol{f \circ g}$ n'ont pas le même centre en général

4. Propriétés géométriques

a) Toute similitude directe conserve :
- L'alignement ;
Les images de trois points alignés par une similitude directe sont trois points alignés.

- Le parallélisme ;
Les images de deux droites parallèles par une similitude directe sont deux droites parallèles.

- L'orthogonalité ;
Les images de deux droites perpendiculaires par une similitude directe sont deux droites perpendiculaires.

- Le contact ;
Les images par une similitude directe de deux courbes tangentes en un point sont deux courbes tangentes en l'image de ce point par cette similitude directe.

- Le barycentre ;
L'image par une similitude directe du barycentre de n points pondérés est le barycentre des images de ces points pondérés par cette similitude directe.

- Les angles orientés ;
La mesure principale de l'image d'un angle orienté par une similitude directe est égale à la mesure principale de cet angle orienté.

- Le rapport de distances.
Si quatre points A, B, C, D distincts deux à deux ont pour images respectives A', B', C' et D' par une similitude directe alors : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD}$.

b) Toute similitude directe de rapport k multiplie :
- Les distances par k.
Si deux points A et B ont pour images respectives A' et B' par une similitude directe de rapport k alors A'B' = kAB.
- Les aires par k^2.
Si une partie du plan a pour aire A alors son image par une similitude directe de rapport k a pour aire $k^2 A$.

c) Toute similitude directe de rapport k transforme :
- une droite en une droite.
L'image de la droite (AB) est la droite (A'B') où A' et B' sont les images respectives de A et B par la similitude directe.

- une demi-droite en une demi-droite.
L'image de la demi-droite [AB) est la demi-droite [A'B') où A' et B' sont les images respectives de A et B par la similitude directe.

- un segment en un segment.
L'image du segment [AB] est le segment [A'B'] où A' et B' sont les images respectives de A et B par la similitude directe.

- un cercle de rayon r en un cercle de rayon $k\,r$.
L'image du cercle de centre A et de rayon r est le cercle de centre A' et de rayon kr où A' est l'image de A par la similitude directe.

<u>Exercice de fixation</u>
On donne trois points A, B et C deux à deux distincts et un point D tels que :
$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{CD}$.
On considère la similitude directe s telle que : s(A) = A', s(B) = B', s(C) = C' et s(D) = D'.
Justifie que : $\overrightarrow{A'D'} = 2\overrightarrow{A'B'} - 5\overrightarrow{C'D'}$.

<u>Solution de l'exercice</u>
$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow -6\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.
$\Leftrightarrow$ A = bar{(D, -6) ; (B, 2) ; (C, 5)}.
Toute similitude directe conserve le barycentre.
D'où, A' = bar{(D', -6) ; (B', 2) ; (C', 5)}.
Donc, $-6\overrightarrow{A'D'} + 2\overrightarrow{A'B'} + 5\overrightarrow{A'C'} = \vec{0}$.
Par suite $\overrightarrow{A'D'} = 2\overrightarrow{A'B'} - 5\overrightarrow{C'D'}$.

II. Caractérisation d'une similitude directe

1. Eléments caractéristiques d'une similitude directe qui n'est pas une translation

<u>Propriété et définition</u>
Toute similitude directe du plan qui n'est pas une translation admet un unique point invariant.
Ce point s'appelle le centre de la similitude directe.

Propriété
Une similitude directe S, autre que l'identité, de rapport k et d'angle θ est :
• soit une translation (si $k = 1$ et $\theta = 0$) ;
• soit la composée commutable d'une rotation r de centre Ω et d'angle θ et d'une homothétie h de centre Ω et de rapport k : $S = h_{(\Omega,k)} \circ r_{(\Omega,\theta)} = r_{(\Omega,\theta)} \circ h_{(\Omega,k)}$.

Définition
Dans le cas où S est une similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ, sa décomposition sous la forme : $S = h_{(\Omega,k)} \circ r_{(\Omega,\theta)} = r_{(\Omega,\theta)} \circ h_{(\Omega,k)}$ est appelée forme réduite ou décomposition canonique de la similitude directe.

Conséquence
Toute similitude directe, différente d'une translation, s'écrivant de façon unique comme la composée d'une rotation et d'une homothétie, est donc entièrement déterminée par la donnée de son centre, de son rapport et de son angle.
Le centre, le rapport et l'angle s'appellent les éléments caractéristiques de la similitude directe.

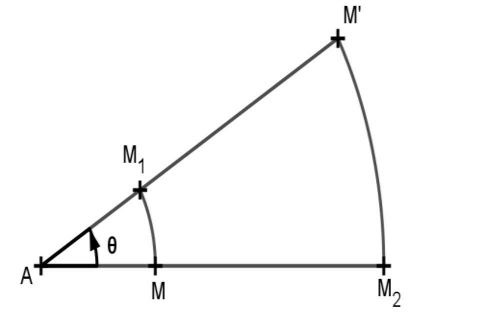
On note : $S = s_{(\Omega,k,\theta)}$.

Remarque

La forme réduite d'une similitude directe permet de construire géométriquement l'image d'un point (sans utiliser l'affixe de l'image du point).

$S = h \circ r : M \xmapsto{r} M_1 \xmapsto{h} M'$

$S = r \circ h : M \xmapsto{h} M_2 \xmapsto{r} M'$



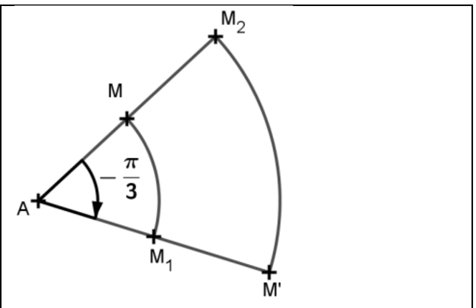
Exercice de fixation
Soit A et M deux points distincts du plan orienté.
a) Écris la décomposition canonique de $S_{(A,\, 2;\, -\frac{\pi}{3})}$.
b) Construis l'image M' de M donné par la similitude directe $S(A,\, 2 -\frac{\pi}{3})$.

Solution

a) $S_{(A,\, 2,\, -\frac{\pi}{3})} = r_{(A,\, -\frac{\pi}{3})} \circ h_{(A,\, 2)} = h_{(A,\, 2)} \circ r_{(A,\, -\frac{\pi}{3})}$.

* r est la rotation de centre A d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
* h est l'homothétie de centre A et de rapport 2.

b) $S = h \circ r : M \xmapsto{r} M_1 \xmapsto{h} M'$.
$S = r \circ h : M \xmapsto{h} M_2 \xmapsto{r} M'$.



2. Nature d'une similitude directe dont on connaît l'écriture complexe

Propriété
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.
Une application du plan dans lui-même est une similitude directe si et seulement si son écriture complexe est de la forme : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Exercice de fixation

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.
On considère l'application s du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x, y), associe le point M' de coordonnées (x', y') telles que : $\begin{cases} x' = x + y - 3 \\ y' = -x + y + 2 \end{cases}$.

1) Trouve l'écriture complexe de s.
2) Déduis-en que s est une similitude directe.

Solution

1) Posons : z = x + iy et z' = x' + iy' ou z et z' sont les affixes respectives de M et M'.

$z = x + iy$
$z' = x' + iy'$
$z' = (x + y - 3) + i(-x + y + 2)$
$z' = x + y - 3 + -ix + iy + 2i$
$= (1 - i)x + (1 + i)y - 3 + 2i$
$= (1 - i)x + (1 - i)iy - 3 + 2i$ */on met i en facteur dans le bloc (1+i)y*
$= (1 - i)(x + iy) - 3 + 2i$
$= (1 - i)z - 3 + 2i$

L'écriture complexe de S est : $z' = (1 - i)z - 3 + 2i$.
2) L'écriture complexe de s est de la forme : z' = az + b où a ∈ ℂ* et b ∈ ℂ.
D'où, s est une similitude directe.

Propriété

Soit s une similitude directe d'écriture complexe : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et b∈ℂ.
* Si $a=1$, alors s est la translation de vecteur d'affixe b.
* Si $a \neq 1$ alors s est la similitude directe de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$, de rapport |a| et d'angle Arg(a).

Tableau récapitulatif

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct.
On considère la similitude directe s d'écriture complexe $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

	Conditions vérifiées par a		Nature et éléments caractéristiques de S
Similitude directe S d'écriture complexe $\boldsymbol{z' = az + b}$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.	$a = 1$		S est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b
	$a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$		S est l'homothétie de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et de rapport a.
	Si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$	$\|a\| = 1$	S est la rotation de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle Arg (a)
		$\|a\| \neq 1$	S est la similitude directe de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$,de rapport $\|a\|$ et d'angle Arg (a)

Exercice de fixation

Détermine dans chaque cas, la nature et les éléments caractéristiques de la similitude directe s définie par son écriture complexe :

a) z' = 5z + 2i ;   b) z' = z + 1 + 3i ;
c) $z' = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$;   d) z' = (- 1 + i)z +2.

Solution

a) $a = 5$, $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, S est une homothétie de rapport 5.
Déterminons l'affixe z_0 de son centre.
$z_0 = \frac{2i}{1-5} = -\frac{1}{2}i$
Donc s est l'homothétie de rapport 5 et de centre d'affixe $-\frac{1}{2}i$.
b) $a = 1$
D'où, s est la translation de vecteur d'affixe 1+3i
c) $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
$|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i| = 1$, $\text{Arg}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})} = 1$
D'où, s est la rotation de centre d'affixe 1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
d) $a = -1 + i$, $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
$|-1+i| = \sqrt{2}$, $\text{Arg}(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$ et $\frac{2}{1-(-1+i)} = \frac{2(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$
D'où, S est la similitude directe de centre d'affixe $\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

Propriété
Le plan rapporté à un repère orthonormé direct.
L'écriture complexe de la similitude directe de centre A, de rapport k et d'angle θ est :
$z' = ke^{i\theta}(z - z_A) + z_A$

Exercice de fixation
Détermine l'écriture complexe de la similitude directe de centre A d'affixe *i*, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

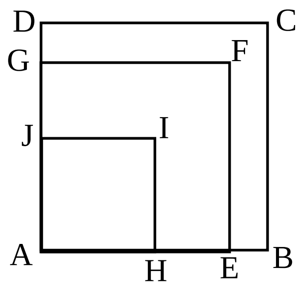
Solution
$z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_A) + z_A$
$z' = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z - i) + i$
$z' = (1 + i)(z - i) + i$
$z' = (1 + i)z + 1$
L'écriture complexe de la similitude directe s est : $z' = (1 + i)z + 1$.

III. Déterminations d'une similitude directe

1. Similitude directe définie par ses éléments caractéristiques

Propriété
Soit s une similitude directe de centre A, de rapport k et d'angle θ (θ ∈]-π ; π]).
Pour tout point M du plan distinct de A, $s(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} AM' = kAM \\ \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}\right) = \theta \end{cases}$

Exercice de fixation
Sur la figure ci-contre, ABCD, AEFG et AHIJ sont des carrés de sens direct.
On considère la similitude directe s de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
Détermine l'image par s de chacun des points H, E et B.



Solution

• Dans le carré direct AHIJ, on a : $\begin{cases} AI = \sqrt{2}AH \\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AI}}\right) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ donc s(H) = I.

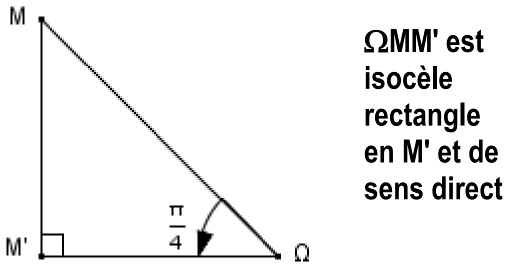
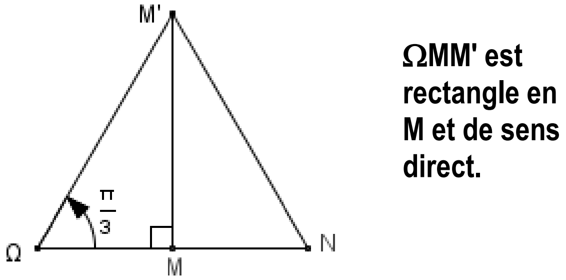
• De même s(E) = F et s(B) = C.

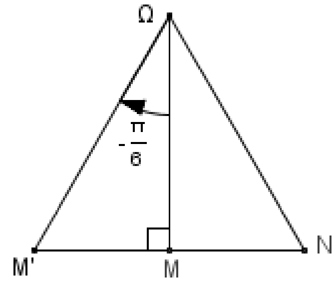
Conséquence

Soit s une similitude directe de centre A, de rapport k et d'angle θ (θ ∈]-π ; π]), soit M un point du plan distinct de A et d'image M' par s.
Tous les triangles AMM' sont de même nature et de même sens et ont le centre A de la similitude directe comme sommet commun.

Tableau récapitulatif des triangles ΩMM' associés à certaines valeurs du rapport et de l'angle de la similitude directe

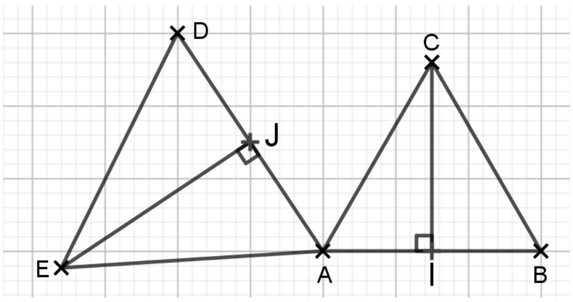
Nature du triangle ΩMM' pour certaines valeurs de k et de θ et réciproquement.

Valeur de θ	Rapport k de la similitude directe	Nature du triangle ΩMM'
$\frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\sqrt{2}$	**ΩMM' est rectangle isocèle en M ou M'** **Exemple** : $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 
$\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$ ou 2	**ΩMM' est un demi-triangle équilatéral, rectangle en M ou M'** **Exemple** : $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $k = 2$  Soit N le symétrique de Ω par rapport à M. ΩNM' est un triangle équilatéral. **ΩMM' est un demi-triangle équilatéral.**
$\frac{\pi}{6}$ ou $-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\frac{2\sqrt{3}}{3}$	**ΩMM' est un demi-triangle équilatéral, rectangle en M ou M'.** **Exemple** : $\theta = -\frac{\pi}{6}$ et $k = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

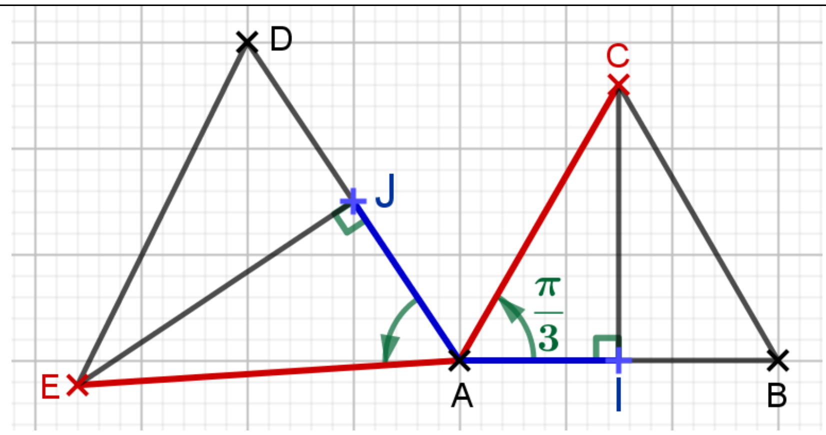
		 **ΩMM' est rectangle en M et de sens indirect.** Soit N le symétrique de Ω par rapport à M. ΩNM' est un triangle équilatéral. ΩMM' est un demi-triangle équilatéral.

Exercice de fixation

Dans le plan orienté, ABC et ADE sont des triangles équilatéraux de sens direct.
On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AD].
On considère la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Détermine l'image par s de chacun des points I et J.



Solution

* Le triangle AIC est un demi-triangle équilatéral, rectangle en I et de sens direct et I appartient à [AB]. D'où, $\begin{cases} \text{AC} = 2AI \\ \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\text{AI}},\overrightarrow{\text{AC}}}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$ Donc, s(I) = C. * Le triangle AJE est un demi-triangle équilatéral, rectangle en J et de sens direct et J appartient à [AD]. D'où, $\begin{cases} \text{AE} = 2AJ \\ \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\text{AJ}},\overrightarrow{\text{AE}}}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$ Donc, s(J) = E.	

2. Similitude directe déterminée par son centre, un point et son image

Propriété

Soit A, M et M' trois points du plan tels que : A ≠ M et A ≠ M'.
Il existe une unique similitude directe de centre A qui transforme M en M'.

Exercice de fixation

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre I.
Démontre qu'il existe une similitude directe de centre A telle que s(B) = C

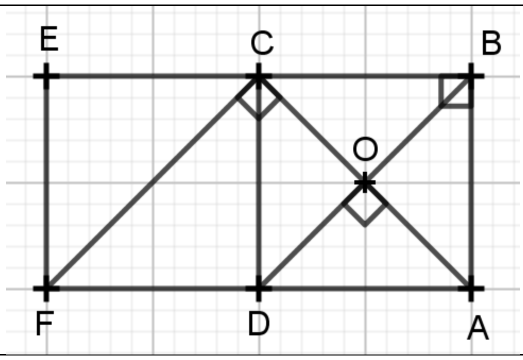
Solution
A , B et C sont trois points tels que $A \neq B$ et $A \neq C$. Donc il existe une similitude directe de centre A telle que $s(B) = C$

3 Similitude directe déterminée par deux points distincts et leurs images

Propriété
Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que : $A \neq B$ et $C \neq D$.
Il existe une unique similitude directe qui transforme A en C et B en D.

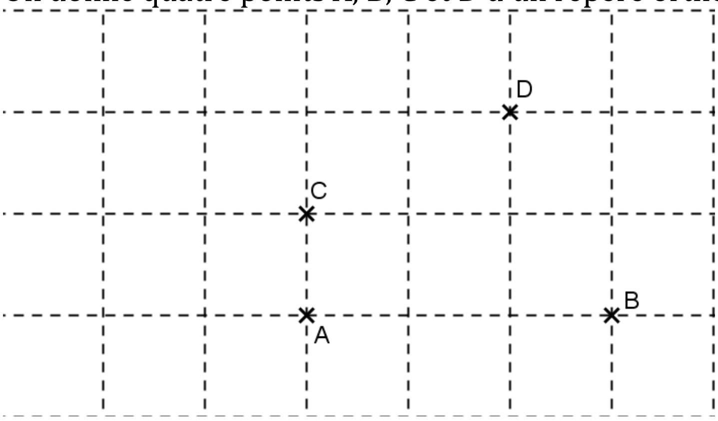
Exercice de fixation 1
Dans le plan orienté, on considère deux carrés de sens direct ABCD et DCEF.
On note O le centre du carré ABCD.
Soit la similitude directe s telle que : $s(B) = C$ et $s(O) = D$.
a) Détermine le centre de s.
b) Détermine l'image du point C par s.

Solution

a) Les triangles ABC et AOD sont rectangles isocèles respectivement en B et O et de sens direct et de sommet commun A. D'où, le centre de s est A. b) Les triangles ABC et ACF sont rectangles isocèles respectivement en B et C, de sens direct et de sommet commun A. D'où, $s(C) = F$.	

Exercice de fixation 2

On donne quatre points A, B, C et D d'un repère orthonormé où l'unité graphique est 1cm.



Construis le centre Ω de la similitude directe s telle que : $s(A) = C$ et $s(B) = D$.

Solution

$s(A) = C$, $s(B) = D$ et $AB \neq CD$.
$AB \neq CD$ donc s n'est pas un déplacement.
(AB) et (CD) ne sont pas parallèles donc s n'est pas une homothétie.
Soit Ω le centre de la similitude directe s.
Notons K le point d'intersection des droites (CD) et (AB) et θ la mesure principale de l'angle de S.
D'après la propriété caractéristique des similitudes directes :

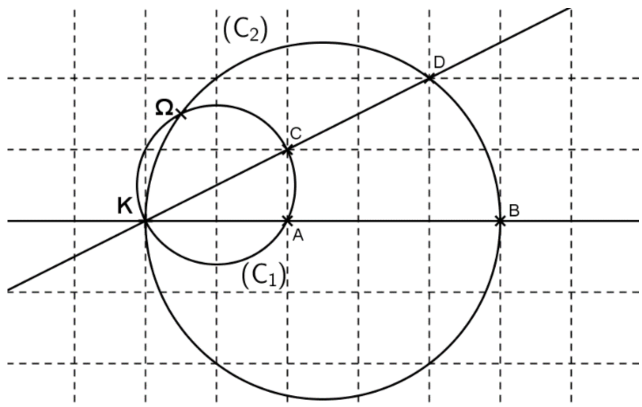
$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KC}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KD}}\right) = (\hat{\theta}).$$

$$\begin{cases} \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}}\right) = (\hat{\theta}) \\ \left(\widehat{\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KC}}\right) = (\hat{\theta}) \end{cases}$$

D'où, les points Ω, K, A et C appartiennent à un même cercle (C_1).

$$\begin{cases} \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega D}}\right) = (\hat{\theta}) \\ \left(\widehat{\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KD}}\right) = (\hat{\theta}) \end{cases}.$$

D'où, les points Ω, K, B et D appartiennent à un même cercle (C_2).
* Ω est le point d'intersection de (C_1) et (C_2) autre que le point K.



Conséquence 1

Soit A, B et C trois points du plan tels que : $A \neq B$ et $B \neq C$.
Il existe une unique similitude directe qui transforme A en B et B en C.

Conséquence 2

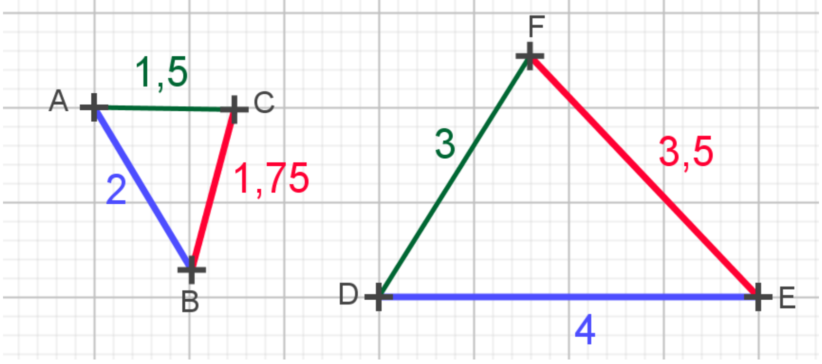
Soit ABC et A'B'C' deux triangles de même sens, de sommets homologues A et A', B et B' et C et C' tels que $mes(\hat{A}) = mes(\widehat{A'})$ et $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$.
Il existe une unique similitude directe qui transforme A en A', B en B' et C en C'.

Vocabulaire
De tels triangles sont dits directement semblables.

Définition
Deux figures $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont dites directement semblables s'il existe une similitude directe transformant l'une en l'autre.

Propriétés des triangles directement semblables
• Si deux triangles ABC et DEF sont de même sens et $\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{AC}}$; alors, il existe une unique similitude directe qui transforme A en D, B en E et C en F.
• Si deux triangles ABC et DEF sont de même sens et $\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{AC}}$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})=(\widehat{\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DF}})$, alors, il existe une unique similitude directe qui transforme A en D, B en E et C en F.

Exercice de fixation
Dans le plan orienté, on donne les triangles ABC et DEF suivants :



Justifie que les triangles ABC et DEF sont directement semblables.

Solution
* $\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AB}} = 2$, $\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{BC}} = 2$ et $\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{AC}} = 2$.

* Les triangles ABC et DEF sont de même sens et $\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{AC}}$, d'où les triangles ABC et DEF sont directement semblables.

4. Similitude directe déterminée par son rapport, son angle, un point et son image

Propriété
Soit k un nombre réel strictement positif, θ un nombre réel, A et B deux points distincts du plan.
Il existe une similitude directe de rapport k, d'angle θ qui transforme A en B.

Exercice de fixation 1

L'unité graphique est le centimètre.
On donne deux points distincts A et B du plan orienté tel que : AB = 6.
On considère la similitude directe s de rapport 4, d'angle $\frac{\pi}{4}$ qui transforme A en B.

1) Détermine et construis l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que :
$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\text{MA}}, \overrightarrow{\text{MB}}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

2) Détermine et construis l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que : $\frac{\text{MB}}{\text{MA}} = 4$.

3) Justifie que le centre K de s appartient à (E_1) et à (E_2). Place le point K.

Solution

1) (E_1) est l'arc capable du segment [AB] et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

* Traçons la droite passant par le point A et dirigée par un vecteur $\vec{u}$ tel que :
$\text{Mes}\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{\text{AB}}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

* Traçons la droite (D_1) perpendiculaire à la droite (T) en A.
* La médiatrice (D_2) de [AB] coupe la droite (D_1) au point O, centre du cercle (C) passant par A.
* (E_1) est la partie de (C) située au-dessus de la droite (AB) et privée des points A et B.

2) Notons : I est le barycentre des points pondérés (A, 4) et (B, 1).
J est le barycentre des points pondérés (A, -4) et (B, 1).

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{1+4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{1-4}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

(E_2) est le cercle de diamètre [IJ].

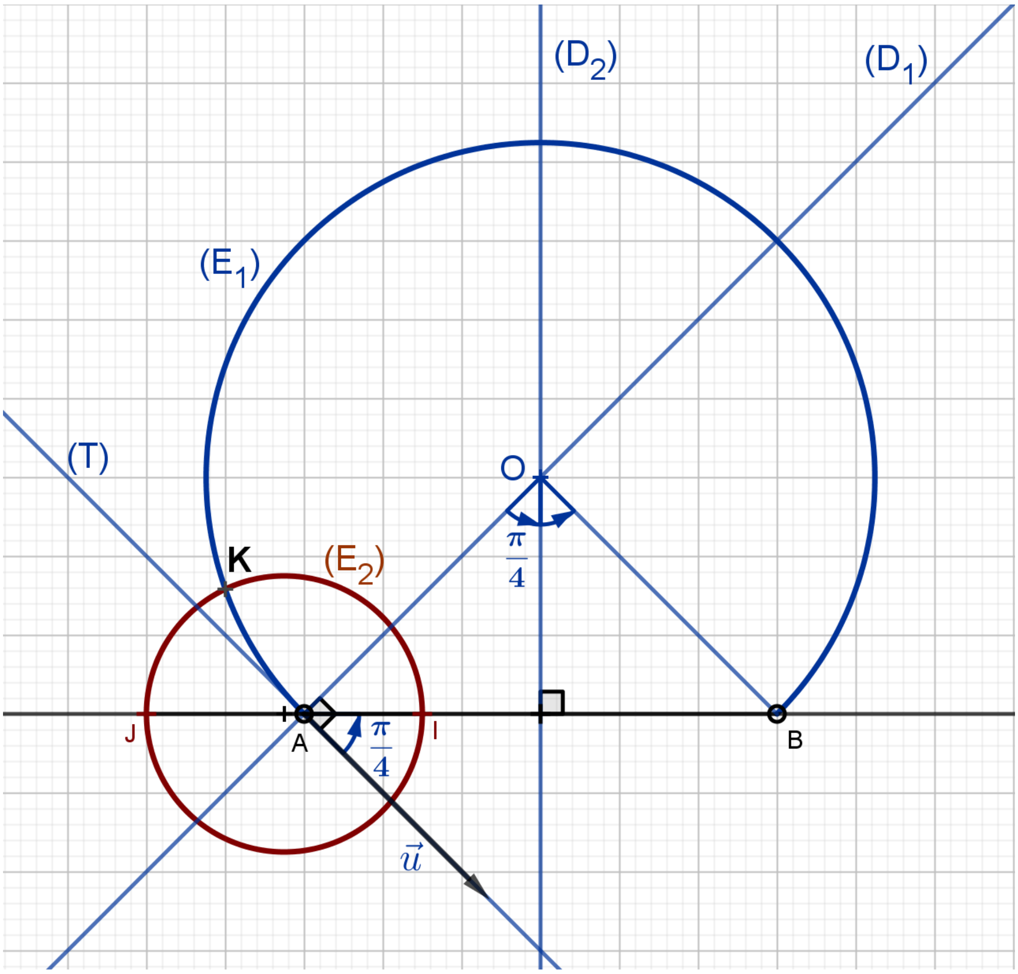
3.

$\xrightarrow{s}$

K	K
A	B

$$s(A) = B \Leftrightarrow \begin{cases} KB = 4KA \\ \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\text{KA}}, \overrightarrow{\text{KB}}}\right) = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{KB}{KA} = 4 \\ \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\text{KA}}, \overrightarrow{\text{KB}}}\right) = \frac{\pi}{4} \end{cases},$$

d'où, le centre K de s appartient à (E_1) et à (E_2). (Voir construction).


(D2)
(D1)
(E1)
(T)
O
π/4
K
(E2)
J
A
π/4
I
B
u

Exercice de fixation 2

On donne un triangle ABC rectangle en C et de sens direct du plan orienté tel que :

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

On considère la similitude directe de rapport 3, d'angle $\frac{\pi}{6}$ tel que : $s(A) = B$.

Construis le point D tel que : $s(C) = D$.

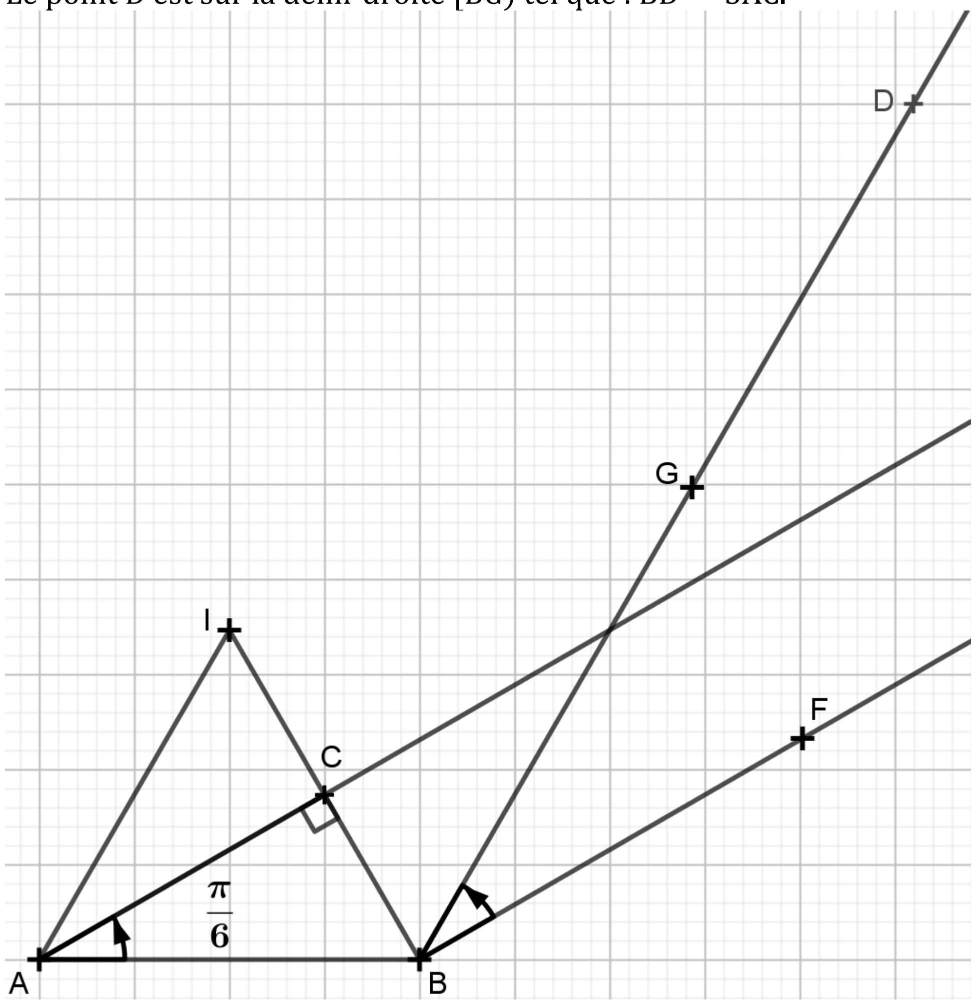
solution de l'exercice 2

$$\begin{cases} s(A) = B \\ s(C) = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BD = 3AC \\ \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}}\right) = \frac{\pi}{6} \end{cases}.$$

On place un point F tel que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires et de même sens.

On place un point G tel que : $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BG}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Le point D est sur la demi-droite [BG) tel que : $BD = 3AC$.

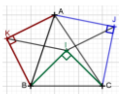


IV. Utilisation des similitudes directes

1. Pour démontrer une propriété

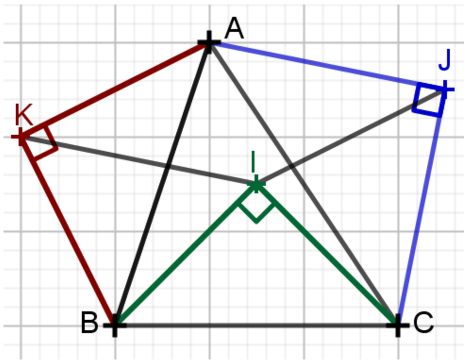
Exercice

ABC est un triangle de sens direct.
I, J et K sont des points tels que les triangles IBC, JAC et KBA sont de sens direct, rectangles et isocèles respectivement en I, J et K.
1. a) Détermine l'angle et le rapport de la similitude directe s_1 de centre A, qui transforme C en J.
b) Détermine l'angle et le rapport de la similitude directe s_2 qui transforme A en K et C en I.
2) Déduis de ce qui précède que le quadrilatère IJAK est un parallélogramme.



Solution

1. a) Notons θ_1 la mesure principale de l'angle de s_1 et k_1 son rapport.



Le triangle ACJ est rectangle isocèle en J et de sens direct.
$k_1=\frac{AJ}{AC} = \frac{AJ}{AJ\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
$\theta_1 = \text{Mes}(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AJ})=\frac{\pi}{4}$.

D'où : $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ et $k_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Notons θ_2 la mesure principale de l'angle de s et k_2 son rapport.
Les triangles BAK et BCI sont de sens direct, rectangles et isocèles respectivement en I et K et de sommet commun B.

D'où, le centre de s_2 est B et $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ et $k_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Posons : $s = s_1 \circ s_2^{-1}$

* s_2^{-1} est la similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

* Notons θ la mesure principale de l'angle de s et k son rapport.

$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$ et $k = k_1 \times (k_2)^{-1} = 1$.

D'où, s est une translation.

* $s(K) = (s_1 \circ s_2^{-1})(K)$
$= s_1(s_2^{-1}(K))$
$= s_1(A)$ car $s_2^{-1}(K) = A$
$= A$ car $s_1(A) = A$.

Et, $s(I) = (s_1 \circ s_2^{-1})(I)$
$= s_1(s_2^{-1}(I))$
$= s_1(C)$ car $s_2^{-1}(I) = C$
$= J$ car $s_1(C) = J$.

Donc, le quadrilatère IJAK est un parallélogramme.

2. Pour résoudre un problème de construction

Exercice

Soit (D_1) et (D_2) deux droites disjointes et horizontales, du plan orienté, telles que (D1) est au-dessus de (D2).

Et, soit A un point appartenant à la bande de plan comprise entre (D_1) et (D_2).

Construis un triangle ABC, rectangle en B, tel que : $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{3}$, $B \in (D_2)$ et $C \in (D_1)$.

Solution de l'exercice

* ABC est un demi-triangle équilatéral tel que : $\begin{cases} AC = 2AB \\ \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$.

D'où, C est l'image de B par la similitude directe s de centre A, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

* $B \in (D_2)$, d'où, C appartient à l'image (D_2') de (D_2) par s.

Par suite, C est le point d'intersection de (D_1) et (D_2').

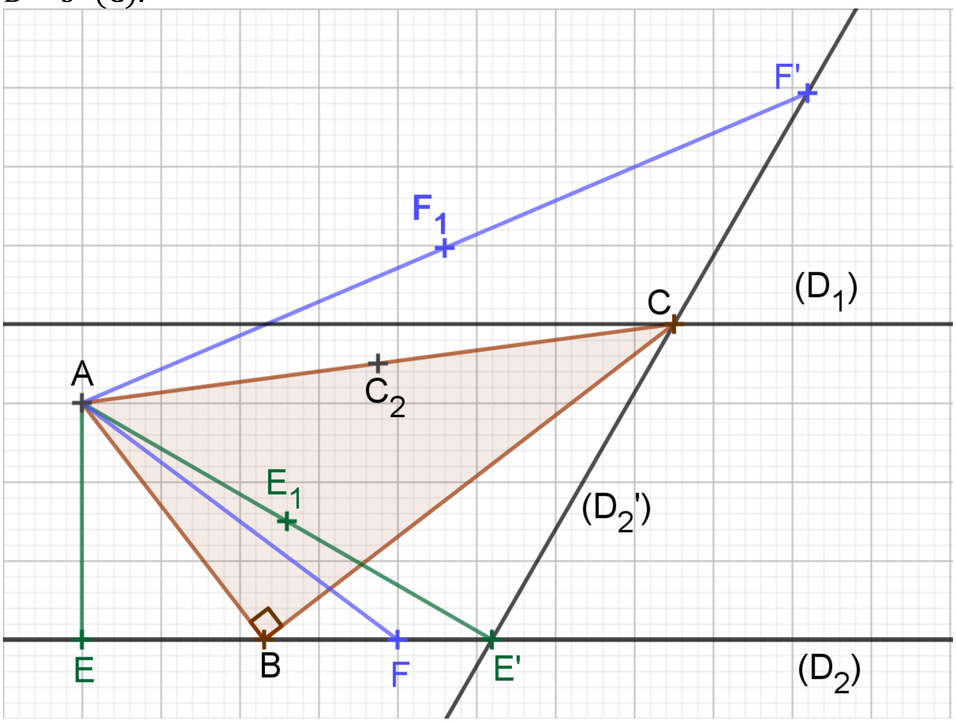
* Soit E et F deux points distincts de (D_2).

Construisons les points E' et F' tels que : s(E) = E' et s(F) = F'

$(D_2') = (E'F')$, d'où, le point C.

* La transformation réciproque s^{-1} de s a pour centre A, pour rapport $\frac{1}{2}$ et pour angle $-\frac{\pi}{3}$.

$B = s^{-1}(C)$.



3. Pour rechercher un lieu géométrique

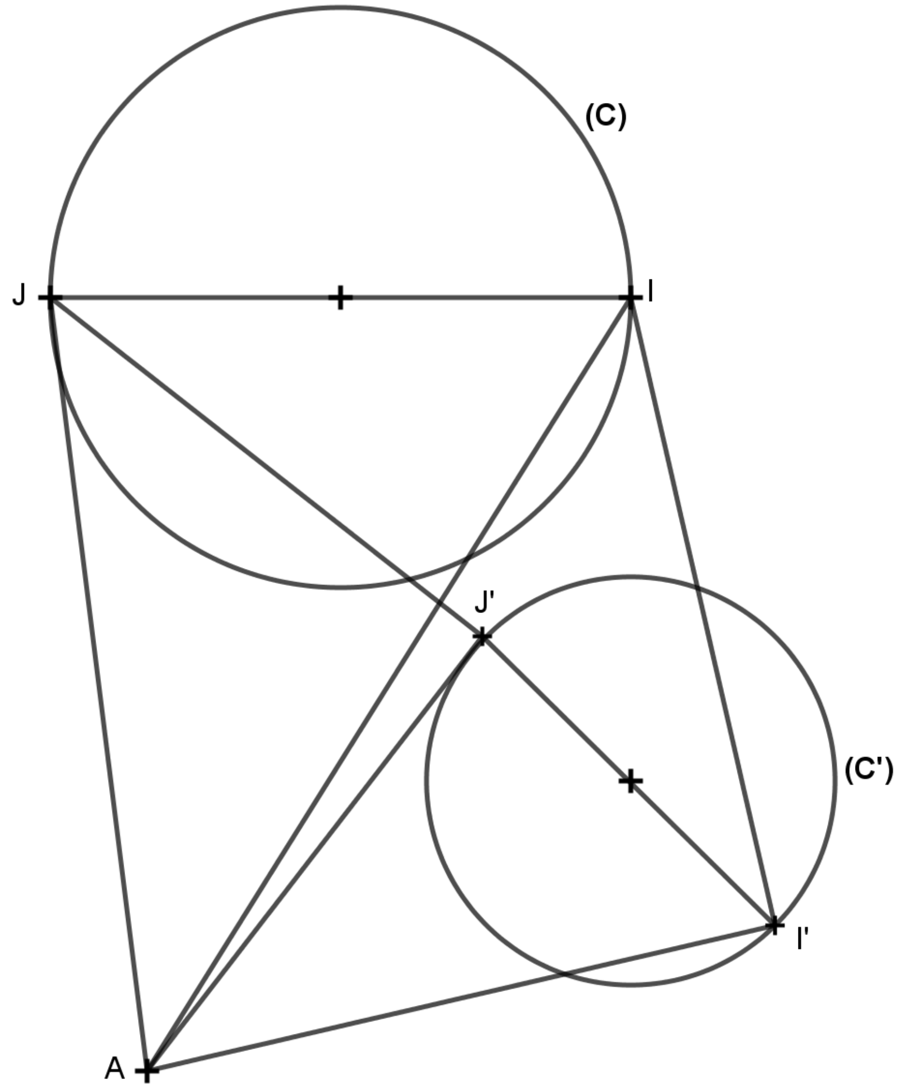
Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.
On donne un cercle (C) de diamètre [IJ] et un point A extérieur à (C).
Soit K un point de (C) et B le point tel que le triangle AKB est rectangle isocèle en B et de sens indirect.
Détermine et construis le lieu du point B lorsque K décrit (C).

Solution de l'exercice

B est l'image de K par la similitude directe s de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Posons : s(I) = I' et s(J) = J'
Le triangle AII' est rectangle isocèle en I' et de sens indirect.
Le triangle AJJ' est rectangle isocèle en J' et de sens indirect.
K décrit (C).
D'où, le lieu de B est le cercle (C') de diamètre [I'J'] image de (C) par s.



V. Exercices de synthèse corrigés

Exercice 1

[**On suppose que l'image d'une ellipse de sommets A, A', B et B' par une similitude directe s est une ellipse de sommets s(A), s(A'), s(B) et s(B')**].

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.
On considère la courbe (E) d'équation : $25x^2 + 25y^2 + 14xy - 144 = 0$.
On donne la similitude directe s d'écriture complexe : $z' = (1 - i)z$.
On pose : $z = x + iy$ et $z' = x'+iy'$ où x, y, x' et y' sont des nombres réels.
Et, on note M' le point d'affixe z', l'image du point M d'affixe z par s.

1) Justifie que : $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x'-y') \\ y = \frac{1}{2}(x'+y') \end{cases}$.

2) Justifie que M appartient à la courbe (E) si et seulement si M' appartient à la courbe (E_0) d'équation : $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$.

3) Justifie que (E) est une ellipse puis détermine les coordonnées de ses sommets.

4) Construis (E) et (E_0) dans le même repère (O, I, J).

Exercice 2

[**On suppose que l'image d'une ellipse de sommets A, A', B et B' par une similitude directe s est une ellipse de sommets s(A), s(A'), s(B) et s(B')**]

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.
On considère la courbe (E) d'équation : $25x^2 + 25y^2 + 14xy - 144 = 0$.
On donne la similitude directe s d'écriture complexe : $z' = (1 - i)z$.
On pose : $z = x + iy$ et $z' = x'+iy'$ où x, y, x' et y' sont des nombres réels.
Et, on note M' le point d'affixe z', l'image du point M d'affixe z par s.

1) Justifie que : $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x'-y') \\ y = \frac{1}{2}(x'+y') \end{cases}$.

2) Justifie que M appartient à la courbe (E) si et seulement si M' appartient à la courbe (E_0) d'équation : $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$.

3) Justifie que (E) est une ellipse puis détermine les coordonnées de ses sommets.

4) Construis (E) et (E_0) dans le même repère (O, I, J).

Résolution de l'exercice 2

1) $z' = (1 - i)z \Leftrightarrow z = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)z'$

$\Leftrightarrow x + iy = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)(x' + iy')$

$\Leftrightarrow x + iy = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y' + i(\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y')$

Donc : $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x'-y') \\ y = \frac{1}{2}(x'+y') \end{cases}$.

2) * $\begin{cases} x^2 = \frac{1}{4}(x'^2 - y'^2 - 2x'y') \\ y^2 = \frac{1}{4}(x'^2 + y'^2 + 2x'y') \\ xy = \frac{1}{4}(x'^2 - y'^2) \end{cases}$

* S est la transformation du plan, on a :
$M \in (E) \Leftrightarrow 25x^2 + 25y^2 + 14xy - 144 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{25}{4}(2x'^2 + 2y'^2) + \frac{14}{4}(x'^2 - y'^2) - 144 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{64}{4}x'^2 + \frac{36}{4}y'^2 - 144 = 0$

$\Leftrightarrow 16x'^2 + 9y'^2 - 144 = 0$

$\Leftrightarrow M' \in (E_0)$

Donc, M appartient à la courbe (E) si et seulement si M' appartient à la courbe (E_0) d'équation : $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$.

3) * $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow 9x^2 + 16y^2 = 144$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{144}{9}} + \frac{y^2}{\frac{144}{16}} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

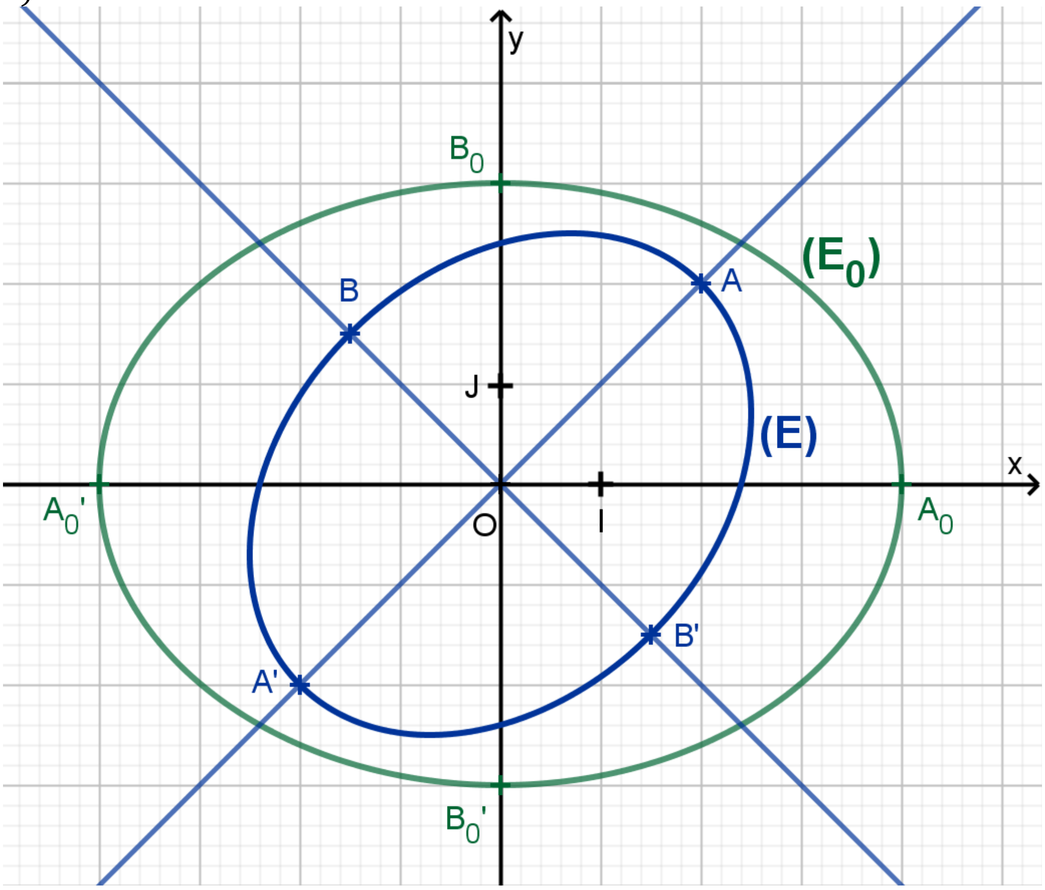
$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

D'où, (E_0) est une ellipse de sommets $A_0(4 ; 0)$, $A_0'(-4 ; 0)$, $B_0(0 ; 3)$ et $B_0'(0 ; -3)$.

* (E) est l'image de (E_0) par s^{-1}.
D'où, (E) est une ellipse de sommets A, A', B' et B' tels que :
$A = s^{-1}(A_0)$, $A' = s^{-1}(A_0')$, $B = s^{-1}(B_0)$ et $B' = s^{-1}(B_0')$.

Sommet de (E_0)	A_0	A_0'	B_0	B_0'
x'	4	-4	0	0
y'	0	0	3	-3
X	2	-2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
Y	2	-2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
Sommet de (E) image par s^{-1} du sommet de (E_0)	A(2 ; 2)	A'(-2 ; -2)	$B(-\frac{3}{2} ; \frac{3}{2})$	$B'(\frac{3}{2} ; -\frac{3}{2})$

4)



EXERCICES D'APPLICATION

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

Exercice 1

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre I.
Soit la similitude directe de centre A telle que s(B) = C
Détermine l'image du point I par s.

Solution

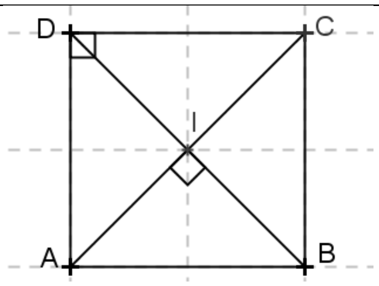
Les triangles ABC et AID sont rectangles isocèles respectivement en B et I et, de sens direct.
s(A)=A et s(B)=C.

on a donc $\begin{cases} AC = kAB \\ \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \theta \end{cases}$

C'est-à-dire : $\begin{cases} AC = \sqrt{2}AB \\ \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

De même $\begin{cases} AD = \sqrt{2}AI \\ \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}}\right) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

D'où, s(I) = D.



Solution

s(B) = C et le triangle ABC est rectangle isocèle en B et de sens direct.
D'après la conséquence de la propriété III.1, pour tout point M du plan distinct de A et d'image M' par s, les triangles AMM' sont rectangles isocèles en M, de sens direct et de sommet commun A.
Or, le triangle AID est rectangle isocèle en I et de sens direct.
D'où, s(I) = D.

Exercice 2

On donne un carré direct ABCD, de centre O, du plan orienté.
On considère la similitude directe s telle que : s(D) = O et s(C) = B.
Détermine le rapport et l'angle de s.

Exercice 3

Détermine dans chaque cas, la nature et les éléments caractéristiques de la similitude directe s définie par son écriture complexe :

a) $z' = (-\frac{1}{2} + \frac{i}{2})z + 4 - 3i$	b) $z' = (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2})z - \sqrt{3} + (5-2\sqrt{3})i$	c) $z' = z + 5 - 7i$
d) $z' = -4z + \frac{15}{2} - \frac{5}{2}i$	e) $z' = -z + 2 - 6i$	f) $z' = -(1 + i)z$

Exercice 4

On donne 3 points A, B et C trois points du plan.
On considère la similitude directe s de rapport k telle que :
s(A) = A', s(B) = B' et s(C) = C'.
Démontre que : $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} = k^2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Exercice 5

Soit A et M deux points distincts du plan.

Construis l'image M'du point M donné par la similitude directe S(A ; 3 ; $\frac{3\pi}{4}$).

Exercice 6

a) Détermine l'écriture complexe de la similitude directe s_1 de centre A d'affixe *3-2i*, de rapport $2\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$.

b) Détermine l'écriture complexe de la similitude directe s_2 de centre B d'affixe $i\sqrt{3}$, de rapport 4 et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

c) Détermine l'écriture complexe de la similitude directe s_3 de centre O, de rapport 3 et d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

Exercice 7

On donne un losange ABCD de centre O, tel que : $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}}) = \left(\frac{\hat{\pi}}{3}\right)$ et AB = 4 cm.

On note I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [AD].

On considère la similitude directe de centre A telle que s(B) = O.

a) Détermine l'image du point C par s.

b) Construis le point E tel que s(E) = C.

c) Etudie la composée s o s o s.

Exercice 8

On donne un triangle équilatéral direct ABC.

On considère la similitude directe de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{3}$ tel que s(A) = B.

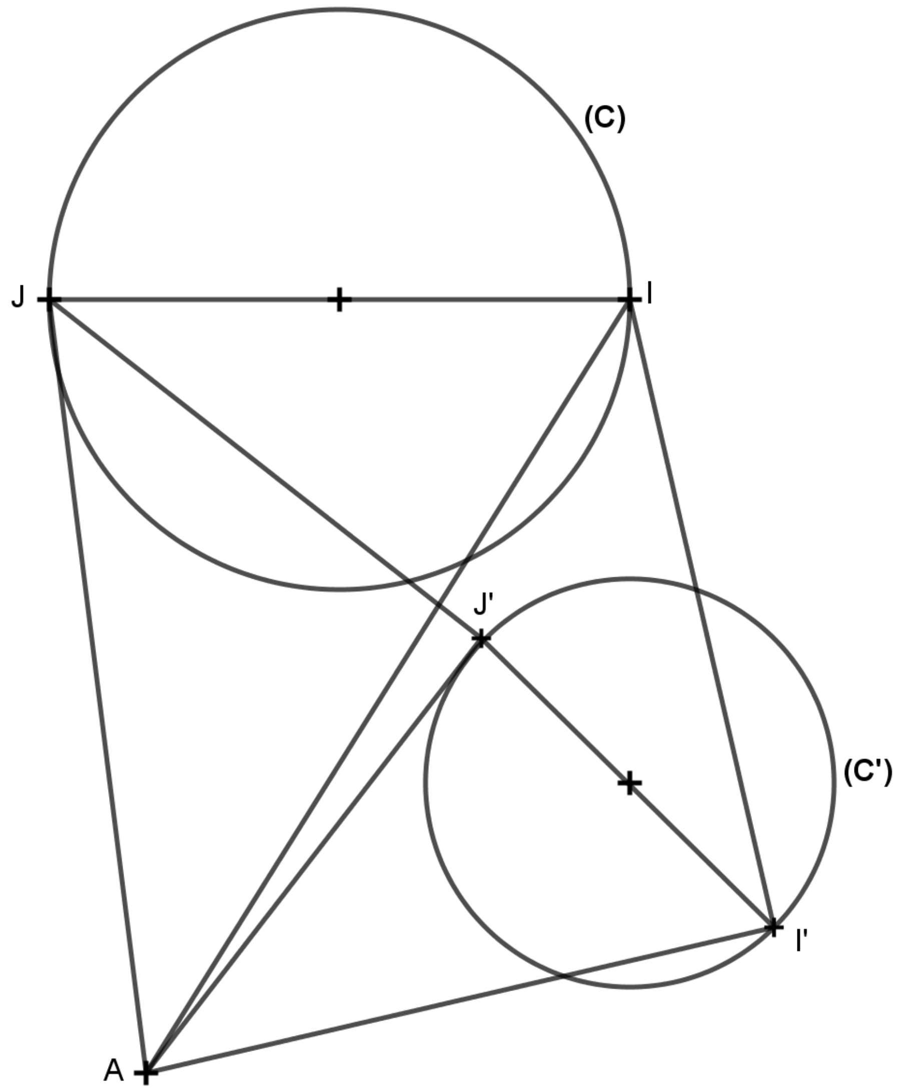
Construis le point D tel que : s(C) = D.

Exercice 9
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.
On considère l'application du plan dans lui-même, d'écriture complexe :
$z' = (-1 + i)z + 3 - 4i$.
1) Etudie s.
2) Déduis de l'étude précédente, l'ensemble (C) des points M du plan d'affixes z telles que : $|(-1 + i)z + 3 - 4i| = 2\sqrt{2}$.
3) Retrouve l'ensemble (C) sans utiliser les similitudes directes.

Exercice 10
Soit (D_1) et (D_2) deux droites disjointes et horizontales, du plan orienté, telles que (D_1) est au-dessus de (D_2).
Et, soit A un point appartenant à la bande de plan comprise entre (D_1) et (D_2).
Construis un carré de sens indirect ABCD, rectangle tel que : $B \in (D_2)$ et $C \in (D_1)$.

EXERCICES DE RENFORCEMENT ET D'APPROFONDISSEMENT

EXERCICE 1
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.
On donne un cercle (C) de diamètre [IJ] et un point A extérieur à (C).
Soit K un point de (C) et B le point tel que le triangle AKB est rectangle isocèle en B et de sens indirect.
Détermine et construis le lieu du point B lorsque K décrit (C).
SOLUTION DE L'EXERCICE 1
B est l'image de K par la similitude directe s de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
Posons : $s(I) = I'$ et $s(J) = J'$
Le triangle AII' est rectangle isocèle en I' et de sens indirect.
Le triangle AJJ' est rectangle isocèle en J' et de sens indirect.
K décrit (C).
D'où, le lieu de B est le cercle (C') de diamètre [I'J'] image de (C) par s.


(C)
J
I
J'
(C')
I'
A

EXERCICE 2

On considère l'application s du plan d'expression analytique : $\begin{cases} x' = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + 1 \\ y' = -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + 1 \end{cases}$.

On donne les points A et B d'affixes respectives 10 et 2.
Pour tout n élément de ℕ, on considère les points A_n tels que $A_0 = A$ et $A_{n+1} = s(A_n)$.
On note z_n l'affixe de A_n.

1) a) Justifie que s a pour écriture complexe : $z' = \frac{1-i}{2} z + 1 + i$. Déduis-en que s est une similitude directe.
b) Trouve les éléments caractéristiques de s.

2) Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = 2 + 8\left(\frac{1-i}{2}\right)^n$.

3) a) Justifie qu'une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{BA_n}})$ est : $-\frac{n\pi}{4}$.
b) Trouve les valeurs de n telles que le point A_n appartient à la droite (OI).
c) Trouve les valeurs de n telles que la droite (BA_n) est perpendiculaire à la droite (OI).

4) a) Justifie que : $BA_n = \frac{8}{(\sqrt{2})^n}$.
b) Trouve la plus petite valeur de n telle que le point A_n appartient au disque de centre B et de rayon 10^{-2}.

5) Pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, on note L_n la longueur de la ligne brisée reliant les points de la suite (An) de A_0 à A_n [Exemples : $L_1 = A_0A_1$, $L_2 = A_0A_1 + A_1A_2$].

a) Calcule L_1.

b) Justifie que : $L_n = (8\sqrt{2} + 8)\left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right]$

c) Calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n$.

<u>SOLUTION DE L'EXERCICE 2</u>

On considère l'application s du plan d'expression analytique : $\begin{cases} x' = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + 1 \\ y' = -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + 1 \end{cases}$.

On donne les points A et B d'affixes respectives 10 et 2.
Pour tout n élément de , on considère les points A_n tels que $A_0 = A$ et $A_{n+1} = s(A_n)$.
On note z_n l'affixe de A_n.

1) a) * $\begin{cases} x' = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + 1 \\ iy' = -i\frac{x}{2} + i\frac{y}{2} + i \end{cases}$

$z' = x' + iy'$

$= (\frac{1}{2} - i\frac{1}{2})x + (\frac{1}{2} + i\frac{1}{2})y + 1 + i$

$= (\frac{1}{2} - i\frac{1}{2})x + (\frac{1}{2} - i\frac{1}{2})iy + 1 + i$ |on met *i* en facteur dans le bloc en y

$= (\frac{1}{2} - i\frac{1}{2})(x + iy) + 1 + i$

$= (\frac{1}{2} - \frac{i}{2})z + 1 + i$

$z' = (\frac{1}{2} - \frac{i}{2})z + 1 + i$.

* z' est de la forme az + b où : $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$
D'où, s est une similitude directe.

b) * $\left|\frac{1-i}{2}\right| = \frac{1}{2}|1 - i| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

* $\text{Arg}(\frac{1-i}{2}) = \theta$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{-1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$

* $\dfrac{1+i}{1-\frac{1-i}{2}} = 2 = z_B$

* D'où, s est la similitude directe de centre B, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

2) $z_0 = z_A = 10$.

Et, $2 + 8\left(\frac{1-i}{2}\right)^0 = 2 + 8 = 10$

On a bien $z_0 = 2 + 8\left(\frac{1-i}{2}\right)^0$.

Soit k un élément de ℕ, supposons : $z_k = 2 + 8\left(\frac{1-i}{2}\right)^k$.

$z_{k+1} = \frac{1-i}{2} z_k + 1 + i$ | $A_{k+1} = s(A_k)$

$= \frac{1-i}{2}\left[2+8\left(\frac{1-i}{2}\right)^n\right] + 1 + i$

$= 1 - i + 8\left(\frac{1-i}{2}\right)^{k+1} + 1 + i$

$= 2 + 8\left(\frac{1-i}{2}\right)^{k+1}$

En définitive : $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = 2 + 8\left(\frac{1-i}{2}\right)^n$.

3) a) $\text{mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{BA_n}) = \arg(z_{\overrightarrow{BA_n}}) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$

$= \arg(z_n - 2) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$

$= \arg(8\left(\frac{1-i}{2}\right)^n) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$

$= \arg(8) + n \arg\left(\frac{1-i}{2}\right) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$

$= 0 + n\frac{-\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$

$= -\frac{n\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$

D'où, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{BA_n})$ est : $-\frac{n\pi}{4}$.

b) $A_n \in (OI) \Rightarrow \text{mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{BA_n}) = k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow -\frac{n\pi}{4} = k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow n = -4k$ $(k \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow n = 4k$ $(k \in \mathbb{N})$ |On remplace k par -k car k est quelconque.

$n = 4k$ $(k \in \mathbb{N})$

c) $(BA_n) \perp (OI) \Rightarrow \text{mes}(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{BA_n}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow -\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow n = -4k - 2$ $(k \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow n = 4k + 2$ $(k \in \mathbb{N})$ |On remplace k par -k-1

$n = 4k + 2$ $(k \in \mathbb{N})$

4) a) $BA_n = |z_n - 2|$

$= \left|8\left(\frac{1-i}{2}\right)^n\right|$

$= 8\left|\frac{1-i}{2}\right|^n$

$= 8\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

$= 8\frac{1}{(\sqrt{2})^n}$

$BA_n = \frac{8}{(\sqrt{2})^n}$.

b) $BA_n \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{8}{(\sqrt{2})^n} \leq 10^{-2}$

$\Leftrightarrow \log 8 - n\log(\sqrt{2}) \leq -2$

|on applique log membre à membre

$\Leftrightarrow n \geq \frac{2+\log 8}{\log(\sqrt{2})}$

Et, $\frac{2+\log 8}{\log(\sqrt{2})} \approx 19{,}28$ à 10^{-2} près

D'où, n = 20

5) Pour tout n élément de *, on note L_n la longueur de la ligne brisée reliant les points de la suite (A_n) de A0 à An (Exemples : $L_1 = A_0A_1$, $L_2 = A_0A_1 + A_1A_2$).

a) * $z_1 = 2 + 8\frac{1-i}{2} = 2 + 4 - 4i = 6 - 4i$

* $L_1 = |z_1 - z_0| = |-4 - 4i| = 4|1 + i|$

$L_1 = 4\sqrt{2}$

b) *Après le segment $[A_0A_1]$, chaque segment est l'image du segment précédent par s.
Et, toute similitude directe de rapport k multiplie les distances par k.
D'où, L_n est la somme de n termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme L_1 tels que :

$q = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$L_1 = 4\sqrt{2}$

* $L_n = L_1\frac{1-q^n}{1-q} = 4\sqrt{2}\,\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 8\sqrt{2}\,\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{2-\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}\,(2+\sqrt{2})\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{2}$

$L_n = 4\sqrt{2}\,(2+\sqrt{2})\left[1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right]$

$L_n = (8\sqrt{2} + 8)\left[1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right]$

c) $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$

D'où : $\lim_{n\to+\infty} L_n = 8\sqrt{2} + 8$

<u>**EXERCICE 3**</u> (**Similitude directe et suite numérique**)

1) Etudie la transformation du plan s : $z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)z + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.

2) Pour tout point M du plan, distinct de I et d'image M' par s, démontre que le triangle IMM' est rectangle isocèle en M' et de sens indirect.

3) Construis successivement les points A, B, C, D et E tels que : $z_A = -7$, s(A) = B, s(B) = C, s(C) = D et s(D) = E.

4) On considère les points M_n tels que $M_0 = A$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = s(M_n)$.
On pose : pour tout n élément de , $a_n = \text{aire}(IM_nM_{n+1})$ et

$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

a) Justifie que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera le 1[er] terme et la raison q.

b) Trouve une expression de A_n en fonction de n.
Déduis-en l'aire du polygone IABCDE et $\lim_{n\to+\infty} A_n$.

5) $AB = 4\sqrt{2}$. Déduis-en la distance DE.

<u>**SOLUTION DE L'EXERCICE 3**</u>

1) L'écriture complexe de s est de la forme z'=az + b où : $a\in\mathbb{C}^*$ et $b\in\mathbb{C}$.
D'où, s est une similitude directe.

* $\frac{1}{2}-\frac{i}{2} = \frac{1}{2}(1 - i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

$\left|\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\mathrm{Arg}(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}) = -\frac{\pi}{4}$.

$z' = z \iff (\frac{1}{2}+\frac{i}{2})z = \frac{1}{2}+\frac{i}{2}$

$\iff z = 1$

Donc, s est la similitude directe de centre I, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{4}$.

2) $s(M) = M' \iff \begin{cases} \mathrm{Mes}(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM'}) = -\frac{\pi}{4} \\ IM' = \frac{\sqrt{2}}{2} IM \end{cases}$ où : $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(-\frac{\pi}{4})$ et $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

D'où, le triangle IMM' est rectangle isocèle en M' et de sens indirect.

s

A	B
B	C
C	D
D	E
I	I

3) * IAB est rectangle isocèle en B et de sens indirect.

* IBC, ICD et IDE sont respectivement rectangles isocèles en C, D et E et de sens indirect.

(Voir construction)

4) Les points M_n sont tels que $M_0 = A$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = s(M_n)$.

Pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $a_n = \mathrm{aire}(IM_nM_{n+1})$ et $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$.

a) ua = 1cm x 1cm = 1cm^2 (Les a_n et A_n sont en cm^2)

$M_0=A$, $M_1= B$, $M_2=C$, $M_3=D$, ...

Toute similitude directe de rapport k multiplie les aires par k^2.

D'où, la suite (a_n) est une suite géométrique de 1er terme a_0 et la raison q tels que :

$a_0 = \mathrm{aire}(IM_0M_1) = \mathrm{aire}(IAB) = \frac{IA \times HB}{2} = \frac{8 \times 4}{2} = 16$ | $\frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2}$

$q = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

b) * Pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $A_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$

$= a_0 \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$

$= 16[1- (\frac{1}{2})^{n+1}]$

* $\mathrm{aire}(IABCDE) = A_3 = 16[1- (\frac{1}{2})^4] = 16[1 - \frac{1}{16}] = 16 - 1$

aire(IABCDE) = 15

* $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{2})^{n+1} = 0$

D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 16$.

5) Toute similitude directe de rapport k multiplie les distances par k.

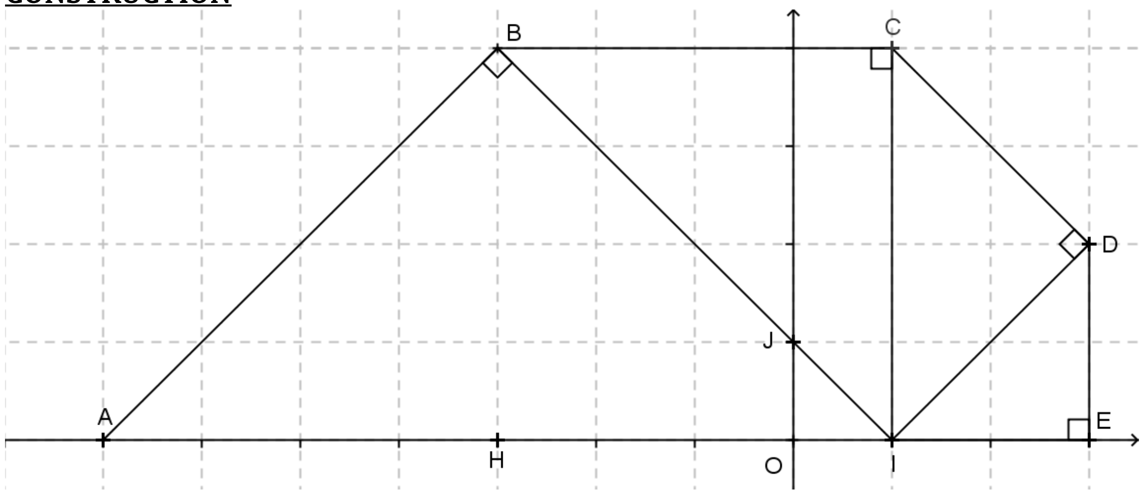
s

A	B
B	C
C	D
D	E
I	I

$DE = \frac{\sqrt{2}}{2} CD = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} BC\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} AB\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 AB = \frac{2\sqrt{2}}{8} 4\sqrt{2}$

DE = 2

CONSTRUCTION



Exercice 4 de maison **(Extrait, Bac C Côte d'Ivoire 1998)**

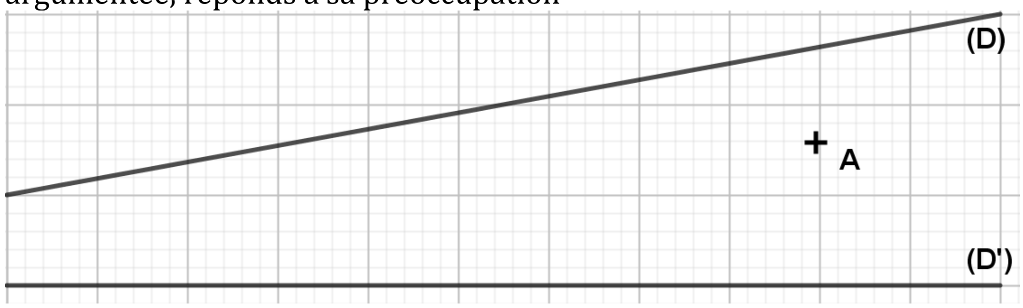
Dans le plan orienté, ABCD est un carré de centre O tel que Mes$(\widehat{\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AD}})= \frac{\pi}{2}$.

Soit M un point de la droite (DC), N un point de la droite (BC) et de la perpendiculaire à la droite (AM) passant par A et I le milieu de [MN].

1) Fais une figure.
2) On considère la rotation r de centre A telle que : r(D) = B.
a) Démontre que N est l'image de N par r.
b) Déduis de la question précédente la nature du triangle AMN.
3) a) Détermine l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre A telle que : s(D) = O.
b) Détermine l'image de C par s.
c) Déduis de la question précédente, l'ensemble de points I lorsque M décrit la droite (D).

SITUATION COMPLEXE

Deux chevrons (D) et(D’) devraient se couper en un point O hors de la toiture. Pour éviter que la toiture ne se décoiffe à la suite d’une éventuelle intempérie , le charpentier propose de fixer un troisième chevron qui doit penser par le point A et l’intersection des deux chevrons. Il sollicite le fils du propriétaire .Celui-ci te demande de l’aide. A l’aide d’une rédaction argumentée, réponds à sa préoccupation



SOLUTION

Pour répondre au problème posé je vais utiliser les similitudes directes en particulier les homothéties.

Considérons h l’homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

On choisit un point B sur la droit (D) et on construit son image par h.
On choisit ensuite un point E sur la droite (D’) et on construit son image par h.
On obtient l’image de (D) par h en traçant la parallèle à (D) passant h(B).
On obtient de même l’image de (D’) par h.

Soit O le point d’intersection des deux droites images, la droite cherchée est la droite (AO)