MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE L'ALPHABETISATION

MENET - FP

INISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT TECHN
ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ECOLE A LA MAISON

SECONDAIRE

1ère D
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 9 heures   Code :

Compétence 1 — **Traiter des situations relatives aux calculs algébriques et aux fonctions**

Thème 2 — **Fonctions**

Leçon 8 : EXTENSION DE LA NOTION DE LA LIMITE

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

Dans la perspective d'aborder le prochain cours dans ta classe de 1ère D, ton professeur de mathématiques présente la courbe suivante qui décrit dans un repère orthonormé, la trajectoire de deux projectiles à l'aide de l'équation horaire suivante :

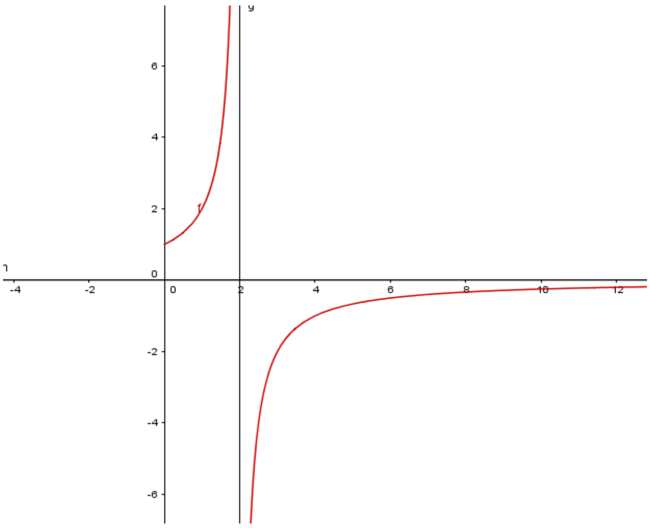
$\boldsymbol{y(t) = \frac{2}{2-t}}$, $\boldsymbol{t \in [0; +\infty[}$

où pour le premier projectile,

$\boldsymbol{t \in [0;\ 2[}$ et pour le deuxième,

$\boldsymbol{t \in\ ]2; +\infty[}$.

Tes amis et toi constatez que sur $]2; +\infty[$ lorsque t tend vers $+\infty$, la trajectoire du projectile se rapproche de la droite d'équation y = 0 comme l'indique le graphique ci-contre. Dans le but d'expliquer ce résultat le professeur



vous organise en groupe afin de traduire ce résultat en limite de la fonction.

B– RESUME DE COURS

I. LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION EN UN POINT

1) Limite infinie d'une fonction en a (a est un nombre réel)

Propriété

Soit a un nombre réel.

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on a :

- $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{1}{(x-a)^n} \right) = +\infty$ si n est pair
- $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \left(\dfrac{1}{(x-a)^n} \right) = +\infty$ si n est impair ou pair
- $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \left(\dfrac{1}{(x-a)^n} \right) = -\infty$ si n est impair

Cas particuliers

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \left(\dfrac{1}{x-a} \right) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \left(\dfrac{1}{x-a} \right) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\dfrac{1}{x} \right) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(\dfrac{1}{x} \right) = -\infty$

Exercice d'application

Complète chacune des égalités suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} (\dfrac{1}{x-4}) = ...$ b) $\lim\limits_{x \to 0} (\dfrac{1}{x^2}) = ...$ c) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (\dfrac{1}{(x-4)^5}) = ...$ d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\dfrac{1}{x}) = ...$

Corrigé

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ >}} (\dfrac{1}{x-4}) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to 0} (\dfrac{1}{x^2}) = +\infty$ c) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (\dfrac{1}{(x-4)^5}) = -\infty$ d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\dfrac{1}{x}) = +\infty$

2) Asymptote verticale

Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

a est un nombre réel et f est une fonction de représentation graphique (C_f)

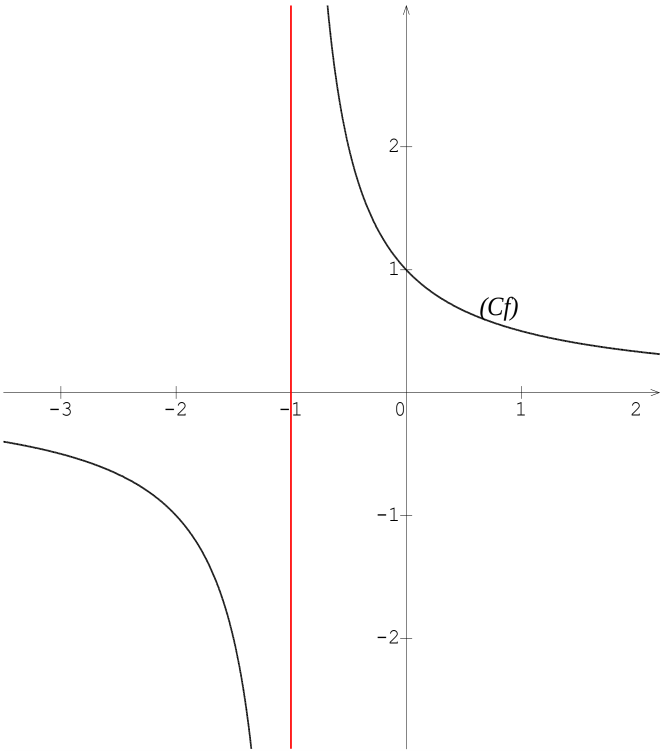
Lorsque $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ <}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ est infinie, on dit que la droite d'équation : $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f).

Exemple

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f).



$x = -1$

II – LIMITE A L'INFINI D'UNE FONCTION

1) Limite à l'infini des fonctions élémentaires

Propriétés

On a :

- Pour tout nombre réel c :
  $\lim\limits_{x\to +\infty} (c) = c$; $\lim\limits_{x\to -\infty} (c) = c$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x}) = +\infty$
- Pour tout nombre entier naturel non nul n :
  - ✓ $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^n) = +\infty$
  - ✓ $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^n) = +\infty$ si n est pair
  - ✓ $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^n) = -\infty$ si n est impair
  - ✓ $\lim\limits_{x\to +\infty} (\dfrac{1}{x^n}) = 0$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} (\dfrac{1}{x^n}) = 0$

Exercice de fixation

Complète les égalités suivantes:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\dfrac{1}{x^5}) = ...$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^6) = ...$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^{15}) = ...$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\dfrac{1}{x^4}) = ...$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^7) = ...$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\dfrac{1}{x^3}) = ...$

Corrigé

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\dfrac{1}{x^5}) = 0$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^6) = +\infty$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^{15}) = -\infty$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\dfrac{1}{x^4}) = 0$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^7) = +\infty$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\dfrac{1}{x^3}) = 0$

2) Asymptote horizontale

Définition

Soit f une fonction numérique et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

- Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ $(b \in \mathbb{R})$ on dit que la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$.

- Lorsque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ $(b \in \mathbb{R})$ on dit que la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à (C_f) en $-\infty$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^3}$ et (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

. On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{x^3}) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

III – Opérations sur les limites

1) Limite de la somme de deux fonctions

Propriétés

l *et* l' sont deux nombres réels et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$

On admet:

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	l	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	l'	l'	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x)$	$l + l'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Résultat pas immédiat

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^7 + x^3)$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\frac{1}{x^5} + \sqrt{x})$

Corrigé

1) On a $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^7)=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^7+x^3)=-\infty$

2) On a $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}(\frac{1}{x^5})=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}(\sqrt{x})=0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}(\frac{1}{x^5}+\sqrt{x})=+\infty$

b) Limite du produit de deux fonctions

Propriétés

l *et* l' sont deux nombres réels et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$

On admet:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a}(f\times g)(x)$	$l \times l'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Résultat pas immédiat

Exemples

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}(-10)=-10$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(-10x^3)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}(2)=2$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3)=-\infty$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^7)=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^7(x^3))=+\infty$

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}}(\frac{1}{x-2}(3x-5))$ *b)* $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3(-2+\frac{1}{x^7}))$ *c)* $\lim\limits_{x\to+\infty}((6+\frac{1}{x})(-2+\frac{1}{x^7}))$ *d)* $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}(x^3))$

Corrigé

On a :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}}(\frac{1}{x-2})=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}}(3x-5)=1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}}((\frac{1}{x-2})(3x-5))=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2+\frac{1}{x^7})=-2$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3(-2+\frac{1}{x^7}))=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(6+\frac{1}{x})=6$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2+\frac{1}{x^7})=-2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}((6+\frac{1}{x})(-2+\frac{1}{x^7}))=6\times(-2)=-12$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x})=0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^7)=+\infty$ donc il est impossible de conclure $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}x^3)$ sans transformation.

On peut remarquer que :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}(x^7)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^7}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}(x^6)=+\infty$$

3) Limite de l'inverse d'une fonction

Propriétés

l désigne un nombre réel non nul et $a \in \mathbb{R}\cup\{+\infty;-\infty\}$

On admet:

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	0 et *f(x)>0*	0 et *f(x)<0*
$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f}\right)(x)$	$\frac{1}{l}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{\substack{x\to0\\>}}\frac{1}{\sqrt{x}}$ b) $\lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{x^2+3}\right)$ c) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2+3}\right)$

Corrigé

a) $\lim_{\substack{x\to0\\>}}\sqrt{x}=0$ *et* $\sqrt{x}\geq0$ donc $\lim_{\substack{x\to0\\>}}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

b) $\lim_{x\to-1}(x^2+3)=4$ donc $\lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{x^2+3}\right)=\frac{1}{4}$

c) $\lim_{x\to-\infty}(x^2+3)=+\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2+3}\right)=0$

4) Limite du quotient de deux fonctions

Propriétés

l *et* l' sont deux nombres réels et $a \in \mathbb{R}\cup\{+\infty;-\infty\}$

On admet :

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	l' non nul	$+\infty$ *ou* $-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'<0$	$l'>0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Résultat pas immédiat	

Exercice de fixation

f *et* g sont deux fonctions. Complète les égalités suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = -6$ donc $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ldots$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 15$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ldots$

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 15$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = -3$ donc $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ldots$

Corrigé

1) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = -6$ donc $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 15$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 15$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = -3$ donc $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{15}{-3} = -5$

Remarque

Pour calculer la limite du quotient d'une fonction f par une fonction g, on peut écrire le quotient comme produit de f par l'inverse de g. ($\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\left(f(x) \times \dfrac{1}{g(x)}\right)$).

5) Limite en l'infini des fonctions polynômes

Propriété

La limite en l'infini d'une fonction polynôme f est la limite en l'infini de la fonction monôme définie par le terme de plus haut degré de $f(x)$.

$$\lim_{x\to -\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to -\infty} (a_n x^n)$$
$$\lim_{x\to +\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to +\infty} (a_n x^n)$$

NB : a_n est un nombre réel non nul

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} (-4x^3 + 2x^2 - 6x + 8)$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-4x^3 + 2x^2 - 6x^7 + 8x - 9)$

Corrigé

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} (-4x^3 + 2x^2 - 6x + 8) = \lim\limits_{x\to +\infty} (-4x^3) = -\infty$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-4x^3 + 2x^2 - 6x^7 + 8x - 9) = \lim\limits_{x\to -\infty} (-6x^7) = +\infty$

6) Limite en l'infini des fonctions rationnelles

Propriété

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle $\frac{p}{q}$ est la limite en l'infini de la fonction rationnelle définie par le quotient des monômes de plus hauts degrés de $p(x)$ et de $q(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$$

NB : a_n et b_p sont des nombres réels non nuls

Exercice de fixation

Calcule les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^5-6x+8}{5x^3+2x^2-x+7}\right)$ 2) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+8}{2x^2-x+7}\right)$

Corrigé

1) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^5-6x+8}{5x^3+2x^2-x+7}\right) = \lim_{x\to-\infty}(\frac{3x^5}{5x^3}) = \lim_{x\to-\infty}(\frac{3x^2}{5}) = \lim_{x\to a}(\frac{3}{5}x^2) = +\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+8}{2x^2-x+7}\right) = \lim_{x\to+\infty}(\frac{3x}{2x^2}) = \lim_{x\to+\infty}(\frac{3}{2x}) = 0$

7) Propriétés de comparaison

Propriété 1

Soit f une fonction et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$

.

- S'il existe une fonction g telle que $g \le f$ et $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$
- S'il existe une fonction g telle que $f \le g$ et $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

Exercice de fixation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + \cos(x^2)$.

Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Corrigé

Pour tout nombre réel x, $-1 \le \cos(x^2) \le 1$ donc $2x-1 \le f(x) \le 2x+1$.

Comme $f(x) \le 2x+1$ et $\lim_{x\to-\infty}(2x+1) = -\infty$ alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Comme $2x-1 \le f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}(2x-1) = +\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

C-Situation complexe

Lors d'une recherche pour le cours de géographie, les élèves d'une classe de première scientifique d'un lycée découvrent une ville d'Afrique créée en 1960. La population de cette ville évolue selon une

fonction croissante f telle que : $f(x) = \frac{60x+40}{x+10}$ où x est le nombre d'années écoulées depuis la fin de l'année 1960 et $f(x)$ est exprimée en dizaines de milliers d'habitants.
Un élève de la classe affirme que la population de cette ville ne pourra jamais dépasser 600000 habitants mais certains élèves de la classe pensent le contraire. Une discussion s'engage entre eux.
En tant que major de ta classe en mathématiques, utilise tes connaissances mathématiques pour les départager.

Corrigé
Pour départager ces élèves nous allons utiliser :
- la notion d'extension de limite
- Calculer la limite de la fonction quand x tend vers $+\infty$
- Et comparer a 60000

Comme la fonction définissant l'évolution de la population est croissante alors lorsque x devient de plus en plus grand, la population de cette ville est aussi de plus en plus élevée. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ déterminera la population limite.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{60x+40}{x+10}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{60x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}(60) = 60$$

La population limite est : $60\times10000 = 600000$ habitants
L'élève qui a fait l'affirmation a raison.

D– EXERCICES
Exercices de fixation

Exercice 1
Le plan est muni d'un repère orthonormé
(O, I, J). f est une fonction de représentation graphique (C) et $\lim\limits_{\substack{x\to6\\<}} f(x) = +\infty$.

Interprète graphiquement la limite de f à gauche en 6.
Corrigé
On a $\lim\limits_{\substack{x\to6\\<}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x=6$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

Exercice 2
Calcule chacune des limites suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\>}} \frac{3x}{x+4}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(9-7x^2+6x-8x^4)$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{9-7x^2+6x}{x^3+2x-4}\right)$

Corrigé

a) $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\>}}\left(\frac{3x}{x+4}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to-4\\>}}(3x)\times\left(\frac{1}{x-(-4)}\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\>}}(3x) = -12$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\>}}\left(\frac{1}{x-(-4)}\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(9-7x^2+6x-8x^4) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-8x^4) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{9-7x^2+6x}{x^3+2x-4}) = \lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{-7x^2}{x^3}) = \lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{-7}{x}) = 0$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par : $f(x) = \frac{1}{(x+2)^3}$ et de représentation graphique (C) dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1) Justifie que la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale à (C).

2) Justifie que la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.

Corrigé

1) On a : $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{1}{(x+2)^3} = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{1}{(x-(-2))^3} = +\infty$ donc la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale à (C).

2) On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{(x+2)^3} = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.

Exercices de renforcement

Exercice 4

A chaque affirmation réponds par Vrai si elle est juste et réponds par Faux si elle est incorrecte

1) Si $\lim\limits_{x \to -7} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $x = -7$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f).

2) $\lim\limits_{x \to -1} (3x^2 + 2x - 8) = \lim\limits_{x \to -1} (3x^2)$

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 8 \\ <}} \left(\frac{1}{(x-8)^4}\right) = -\infty$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{-x+9}{3x-8}\right) = -\frac{1}{3}$

Corrigé

1) Faux 2) Faux 3) Faux 4) Faux

Exercice 5

(C_f) est la courbe représentative d'une fonction f dans le plan rapporté au repère (O, I, J).

(OI), (D) et (D') sont asymptotes à (C_f).

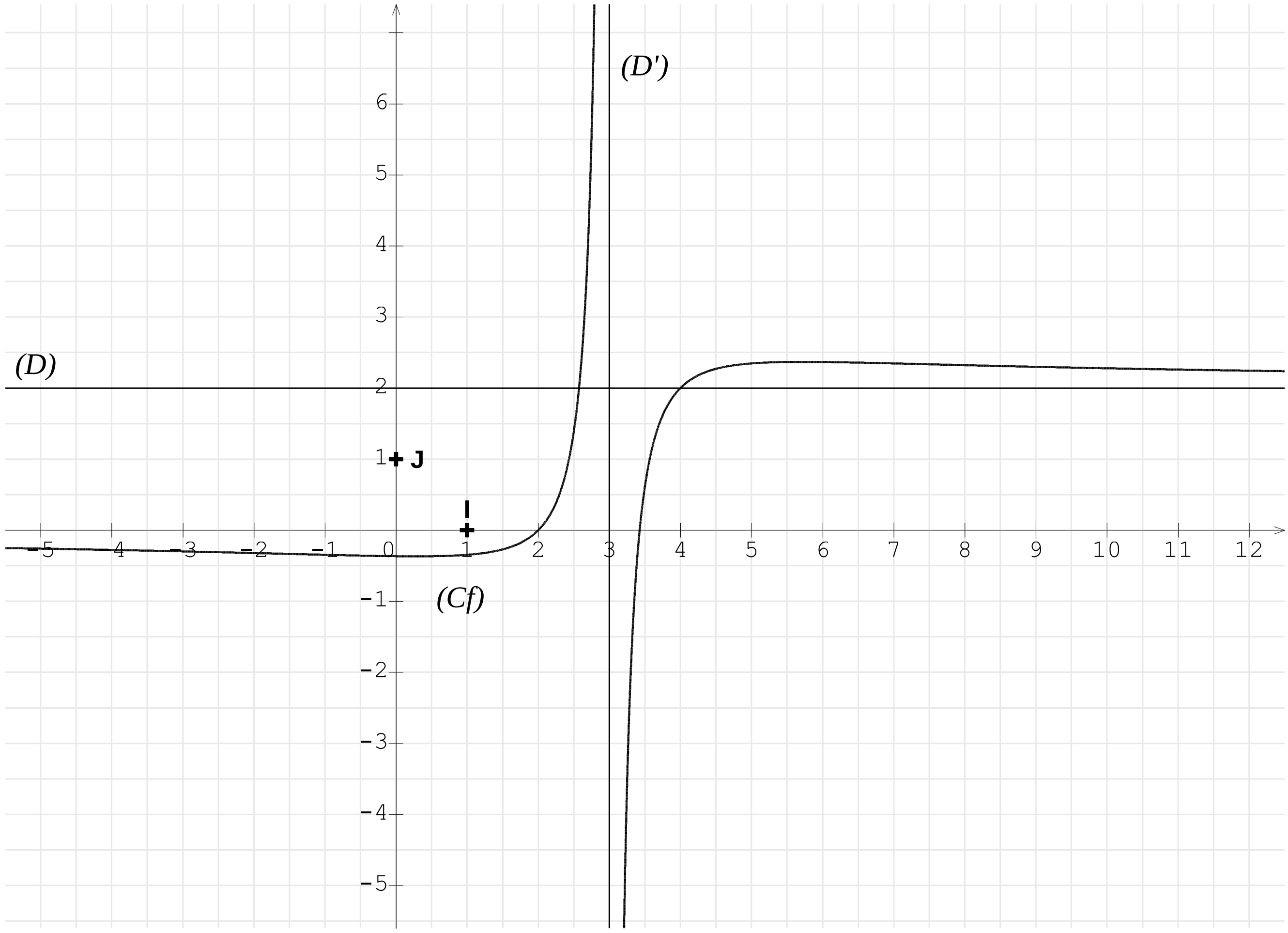
Observe attentivement la figure et donne chacune des limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x)$.

Corrigé

On a :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = +\infty$



Exercices d'approfondissement

Exercice 6

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-\sqrt{x})$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{2x+3}{1-\sqrt{x}}\right)$

Corrigé

a) On a : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}(\sqrt{1+x^2}-1)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)=\frac{0}{2}=0$

b) On a : $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x}-1)=+\infty$

c) Posons $X=\sqrt{x}$.

On a $x=X^2$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x})=+\infty$ donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{1-\sqrt{x}}\right)=\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{2X^2+3}{1-X}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2X^2}{-X}\right)=\lim_{x\to+\infty}(-2X)=-\infty$$

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par : $f(x)=\frac{5x-2}{3-x}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1) Calcule $\lim_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x)$ puis interprète graphiquement ton résultat.

2) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis interprète graphiquement ton résultat.

Corrigé

1) On a : $\lim_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 3\\ <}}\frac{5x-2}{3-x}=\lim_{\substack{x\to 3\\ <}}\left((-5x+2)\times\frac{1}{x-3}\right)=+\infty$ car

$\lim_{\substack{x\to 3\\ <}}(-5x+2)=-13$ *et* $\lim_{\substack{x\to 3\\ <}}\frac{1}{x-3}=-\infty$

Comme $\lim_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x)=+\infty$ alors la droite d'équation $x=3$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f).

2) On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x-2}{3-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x}{-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}(-5)=-5$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-5$ alors la droite d'équation $y=-5$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) en $+\infty$.