MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MENET - FP

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE
2nde C
MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 8 heures Code :

Compétence 1 Traiter une situation relative aux calculs algébriques et aux fonctions

Thème2 : Fonctions

Leçon : SYSTEMES D'INEQUATIONS LINEAIRES DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

En raison du jeûne de ramadan un père de famille veut faire des provisions de vivres. Il achète du riz et du sucre dont la masse totale est inférieure à $72\ kg$ .Il déclare avoir dépensé au maximum la somme de 45 600 FCFA où le kilogramme du riz coûte 600 FCFA et celui du sucre 800 FCFA. Curieuse, sa fille en classe de première A souhaitant connaitre la masse totale correspondante à chaque article acheté, sollicite l'aide de ses camarades de classe qui décident d'en savoir plus sur les méthodes de résolutions des systèmes linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

B- CONTENU DE LA LECON

1. Inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1-1. Définition

Soit a, b et c des nombres réels non tous nuls. Une inéquation du premier degré dans ℝ×ℝ se présente sous la forme : . $ax + by + c < 0$; $ax + by + c > 0$; $ax + by + c \leq 0$; $ax + by + c \geq 0$

Exemple

a) $3x + y \leq 7$; b) $-x + 5y = 9$; c) $x^2 + 3y < 5$; d) $3y \leq 0$; e) $6x \leq 9$; f) $x + y = 8$

parmi les expressions ci-dessous celles qui sont des inéquations du premier degré dans ℝ×ℝ. sont

a ; d ; e

mais b et f ne sont pas des inéquations dans ℝ×ℝ ; ce sont des équations du premier degré dans ℝ×ℝ.

Méthode de résolution d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Soit l'inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. $ax + by + c < 0$.

●Un couple $(x_0; y_0)$de nombres réels est solution d'une inéquation (I)

s'il vérifie l'inéquation . $ax + by + c < 0$ c'est-à-dire.$ax_0 + by_0 + c < 0$.

● la représentation graphique de l'ensemble des solutions de (I)dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$est un demi plan de frontière la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$;ne contenant pas la droite (D)

Remarque : si l'inégalité est large alors la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$.est contenu dans

l'ensemble des solutions

Exercice de fixation 1

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations ci-dessous :

N°	Affirmations	Réponses
1	Le couple $(1; -5)$ est une solution de l'inéquation $x + y + 6 > 0$	
2	Le couple $(1; 1)$ n'est pas une solution de l'inéquation $2x - y + 2 > 0$	
3	Le couple$(12; 3)$ est une solution de l'inéquation $x - y - 5 > 0$	

SOLUTION :

1- vrai ; 2- faux ; 3-faux

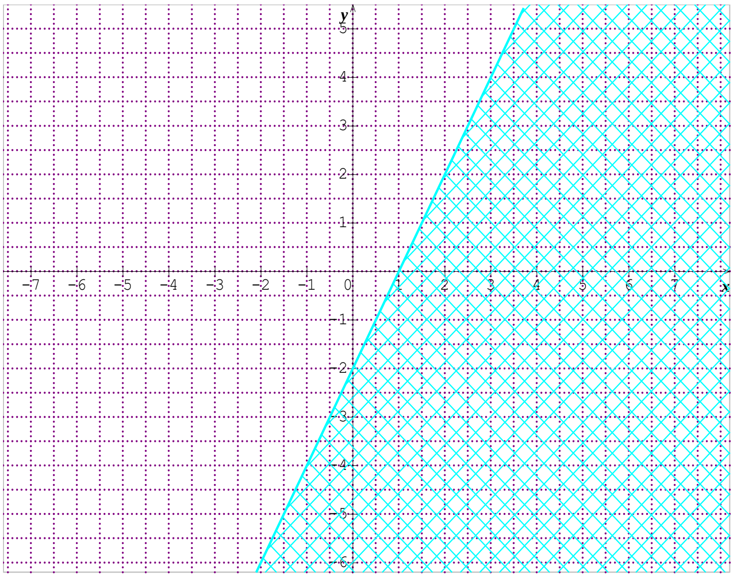
Exercice de fixation 2

On donne l'inéquation du premier dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suivant : $(I): 2x - y + 2 > 0$. Représente graphiquement les solutions de cette inéquation dans le plan muni d'un repère$(O; I; J)$.

SOLUTION

▪Le couple $(0; O)$n'est pas solution de l'inéquation (I) car Le couple $(0; O)$ ne vérifie pas l'inégalité de l'inéquation (I) ; en effet$2 \times 0 - 0 = -2$. ET $-2 < 0$

▪Le couple $(0; O)$n'étant pas solution de4, alors l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est représenté graphiquement dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ par le demi plan ouvert limité par la droite d'équation $2x - y + 2 = 0$ ne contenant pas le point O.



2. Système d'inéquations du premier dégré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

2.1. Définition

Un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est composé d'au moins deux inéquations du premier degré qui contiennent chacune les deux mêmes inconnues.

Exemple :

le système $\begin{cases} .ax + by + c < 0 \\ a'x + b'y + c' > 0 \end{cases}$ est un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

2.2. Méthode de résolution d'un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Soit le système (S) d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\begin{cases} .ax + by + c < 0 \\ a'x + b'y + c' > 0 \end{cases}$.

●Un couple $(x_0; y_0)$de nombres réels est solution du système (S) si et seulement si $(x_0; y_0)$est slution de chacune des inéquations du systhème c'est-à-dire

$.ax_0 + by_0 + c < 0$ et $a'x_0 + b'y_0 + c' > 0$

●L'ensemble des solutions de ce système est représenté graphiquement dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$par l'intersection des deux demi-plans limités par les droites (D) et (D')d'équations respectives $.\, ax + by + c = 0$ et $.\, a'x + b'y + c' = 0$

Exercice de fixation

On donne le système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suivant :

$$(S) \begin{cases} .x + y - 2 < 0 \\ -x + 2y - 6 < 0 \end{cases}$$

a-Justifie que le couple est $(-1; 1)$solution du système (S).

b-Détermine graphiquement les solutions du système (S).

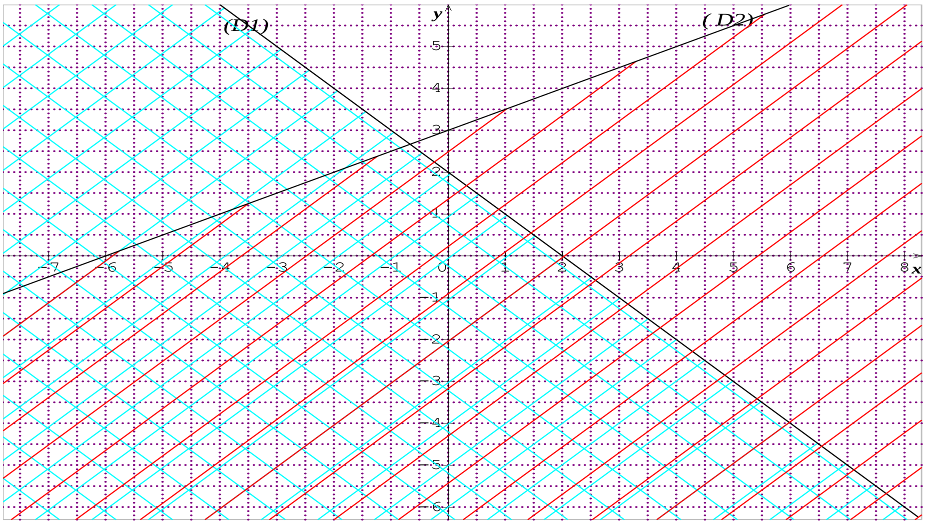
SOLUTION

a- le couple $(-1; 1)$ vérifie chacune des inéquations : . $x + y - 2 < 0$ et $-x + 2y - 6 < 0$.
Donc le couple $(-1; 1)$ est solution du système (S).

b- Je détermine graphiquement les solutions du système (S).

On pose (D) : . $x + y - 2 = 0$ et $-x + 2y - 6 = 0$.
.

Le demi plan (P_1)privé de la droite (D_1)contenant le point de coordonnées $(-1; 1)$ représente l'ensemble des solutions de l'inéquation $x + y - 2 < 0$.
Le demi plan $(P_2$privé de la droite (D_2)contenant le point de coordonnées $(-1; 1)$ représente l'ensemble des solutions de l'inéquation $x + y - 2 < 0$.
En conclusion : l'ensemble des solutions du système (S) est représenté l'intersection des demi-plans(P_1) et (P_2).



C- SITUATION COMPLEXE

En prélude au pèlerinage enfants dans une paroisse de Bondoukou, un père de famille dispose de 10 mètres de tissus pour la confection de chemises et de pantalons pour ces enfants.
Le chef de l'atelier de couture informe le père qu'une chemise pour enfant nécessite 1 mètre de tissus et un pantalon nécessite 1,2 mètre de tissus.

Certains enfants ayant des pantalons neufs, le père voudrait coudre plus de chemises que de pantalons. Ce père te demande de l'aider à déterminer les nombres possibles de chemises et de pantalons à commander en tenant compte aussi des indications données par le couturier si ce dernier fait un minimum de déchets de tissus.

Réponds à la préoccupation du père

SOLUTION

Pour répondre à la préoccupation du père, on doit résoudre un système d'inéquations linéaires dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Pour y parvenir, je détermine les inéquations linéaires en fonction des variables : x le nombre de chemises à commander et y le nombre de pantalons à commander.

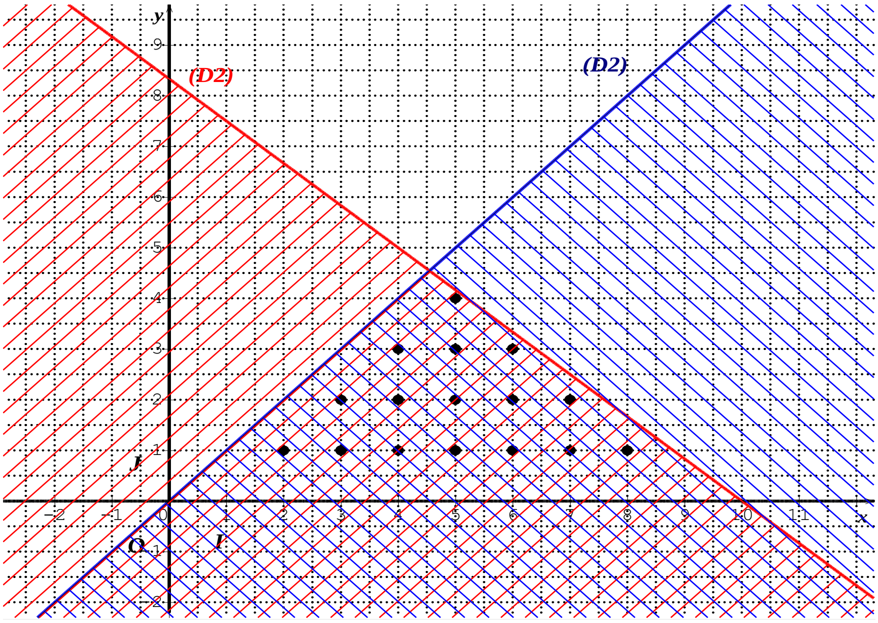
Ensuite je résous le système obtenu

Je détermine l'ensemble des couples solutions possibles etant donné que les valeurs sont des entiers naturels

Pour minimiser les déchets je détermine le couple qui utilise plus de tissus

Résolvons le système : $(S)\begin{cases}.x+1{,}2y<1\\ y<x\end{cases}$

Traçons les droites (D$_1$) :$x+1{,}2y=10$ et (D$_2$) : $y-x=0$



Les couples solutions du système d'inéquations sont : (2 ; 1) ; (3 ; 1) ; (4 ; 1) ; (5 ; 1) ; (6 ; 1) ; (7 ; 1) ; (8 ; 1) (3 ; 2) ; (4 ; 2) ; (5; 2) ; (6 ; 2) ; (7 ; 2) ; (4 ; 3) ; (5 ; 3) ; (6 ; 3) ; (5 ; 4).

Pour le couple (5 ; 4), on a : $5+1{,}2\times 4=9{,}8$ et 9,8 est très proche de 10.

Donc le couple (5 ; 4) est le couple pour lequel il y moins de déchets. Donc le nombre de pantalons est 5 et le nombre de chemises est 4.

- EXERCICES

1- Exercices de fixation

Exercice 1

On donne l'inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ suivant: $(I)\colon 2x-y-2>0$
Justifie que le couple $(2;1)$est solution de l'inéquation. : (I):

SOLUTION

On a : $2\times 2-1-2=1$ et $1>0$ donc le couple $(2;1)$est solution de l'inéquation(I).

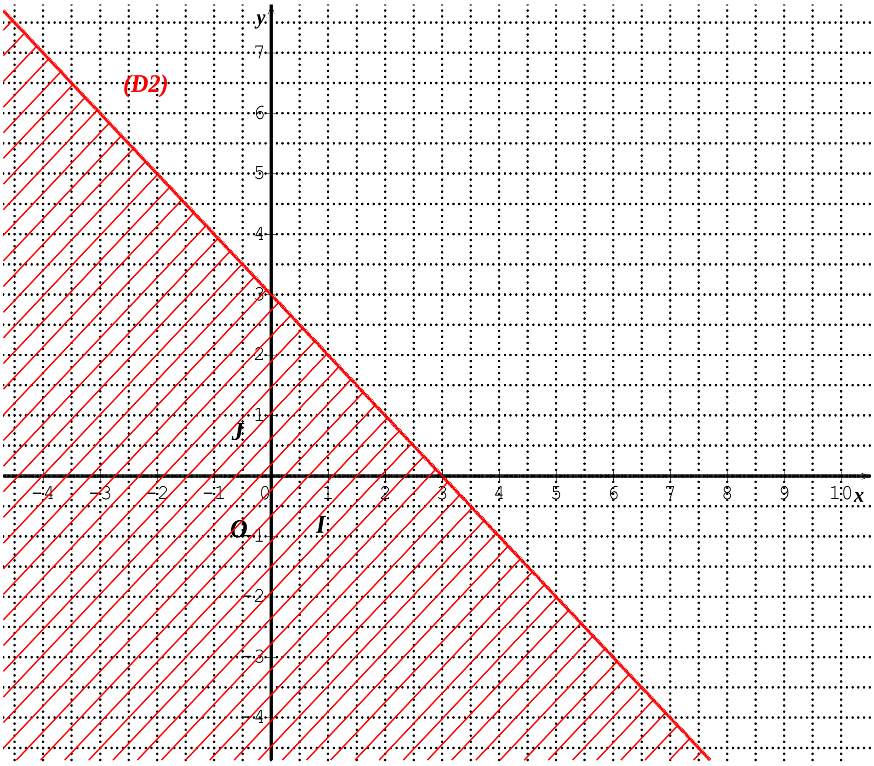
Exercice 2

Détermine graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation $x+y<3$

SOLUTION

Résolvons l'inéquation $x+y<3$.

Traçons la droite (D$_2$) : $x+y=3$



Le demi plan (P_2)privé de la droite (D_2)contenant le point de coordonnées (0 ;0) représente l'ensemble des solutions de l'inéquation . C'est-à-dire la partie du plan hachurée en rouge.

D.Exercices de renforcement

Exercice 3

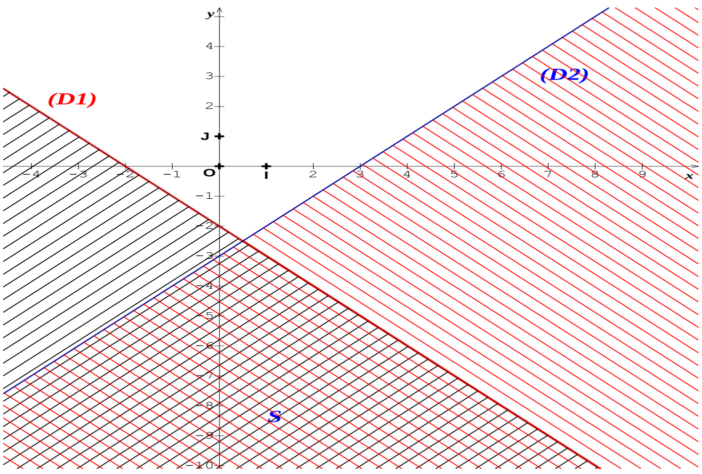
Détermine graphiquement l'ensemble des solutions des systèmes d'inéquations

$$(S)\begin{cases} x+y<-2 \\ x-y>3 \end{cases} \qquad (S):\begin{cases} 2x-y-3>0 \\ -x+3y-1<0 \end{cases}$$

SOLUTION

- Résolvons le système $(S):\begin{cases} x+y<-2 \\ x-y>3 \end{cases}$

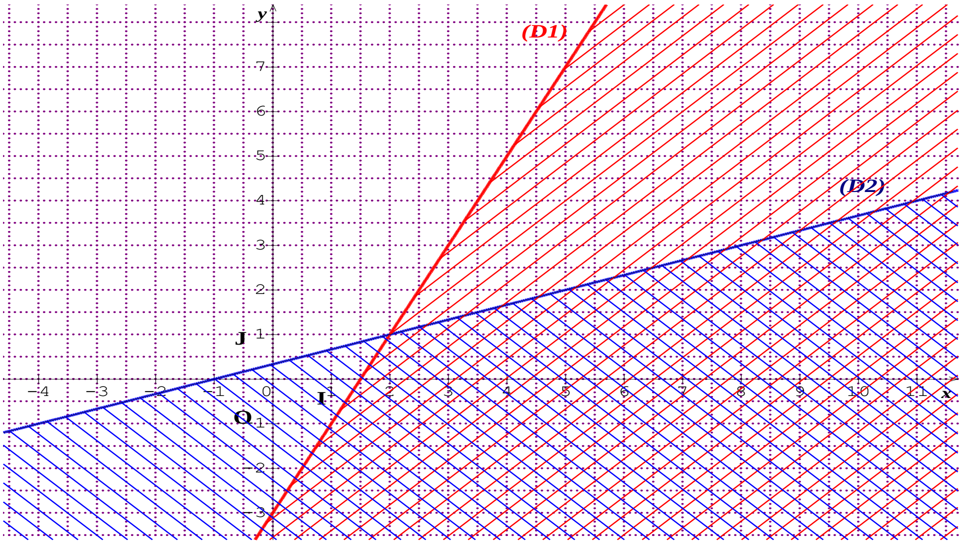
Traçons les droites (D_1) :$x+y=-2$ et (D_2) : $y-x=3$



Le demi plan (P_1) *privé* de la droite (D1) contenant le point de coordonnées $(0; -3)$représente l'ensemble des solutions de l'inéquation $x + y < -2$.
Le demi plan (p_2) privé de la droite (D_2) ne contenant pas le point de coordonnées (-1 ;1) représente l'ensemble des solutions de l'inéquation. $x - y > 3$
Donc l'ensemble des solutions du système (S) est représenté l'intersection des demi-plans (p_1) et(p_2).

- Résolvons le système (S): $\begin{cases} 2x - y - 3 \geq 0 \\ -x + 3y - 1 < 0 \end{cases}$

Traçons les droites (D_2) :$2x - y - 3 = 0$ et (D_1) : $-x + 3y - 1 = 0$



Le demi plan (p_1)privé de la droite (D_1)contenant le point de coordonnées $(0;-3)$ représente l'ensemble des solutions de l'inéquation $-x+3y-1<0$.
Le demi plan (p_2)contenant la droite (D_2)ne contenant pas le point de coordonnées (1 ;1)représente l'ensemble des solutions de l'inéquation. $2x - y - 3 \geq 0$
Donc l'ensemble des solutions du système (S) est représenté l'intersection des demi-plans (P_1)et(P_2).

Exercice 4

Deux amis Seka et Ali jouent aux billes. Seka demande à son ami de trouver le nombre de billes dont il dispose à partir des informations suivantes :

- Le double du nombre de mes billes dépasse 8
- Le nombre de mes billes augmenté de 3 n'atteint pas 10
- Le nombre de mes billes n'est pas pair

Trouve le nombre de billes dont dispose Seka

SOLUTION

Soit x le nombre de billes. Donc x est solution du système : $\begin{cases} 2x > 8 \\ x + 3 < 10 \end{cases}$

On a : $x > 4$ et $x < 7$. Donc $x \in \{5; 6\}$. Comme x n'est pas pair. Par conséquent $x = 5$

Le nombre de billes de Séka est 5

Exercice 5

Traduire les données suivantes par une inéquation à deux inconnues, puis représente les couples solutions dans un repère orthogonal

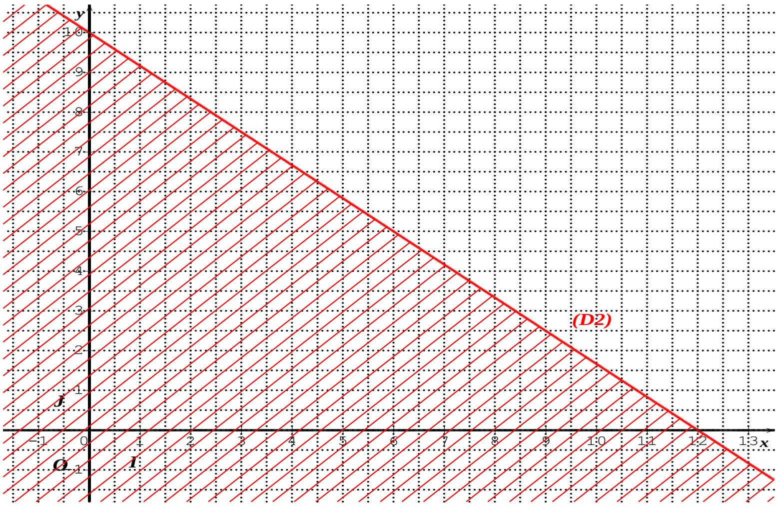
Maud achète x livres à 25F et y bandes dessinées à 30F pour une dépense maximale de 300F.

SOLUTION

On a : $25x + 30y \leq 300$

Résolvons l'inéquation : $25x + 30y \leq 300$.

Traçons la droite (D_2) : $25x + 30y = 300$.



Donc les couples solutions du système sont les coordonnées entières des points de la partie du plan délimité par la droite (D_2) , l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées, contenant le point de coordonnées (1 ; 1).

E .Exercices d'approfondissement

Exercice 6

Lors de son anniversaire, Karim veut faire un cocktail de jus de fruits.

Elle achète x litres de jus d'oranges à 600F le litre et y litres de jus d'ananas à 400F le litre.

Karim veut avoir au moins 10 litres de ce cocktail de jus de fruit, mais elle dispose pour cela que de 6000F.

1. Montre que les contraintes du problème conduisent au système suivant : $\begin{cases} 3x + 2y \leq 30 \\ x + y \geq 10 \end{cases}$.
2. Détermine graphiquement cinq possibilités d'achat de jus de fruits pour l'anniversaire de Karim

SOLUTION

1. Montrons que les contraintes du problème conduisent au système suivant : $\begin{cases} 3x + 2y \leq 30 \\ x + y \geq 10 \end{cases}$.

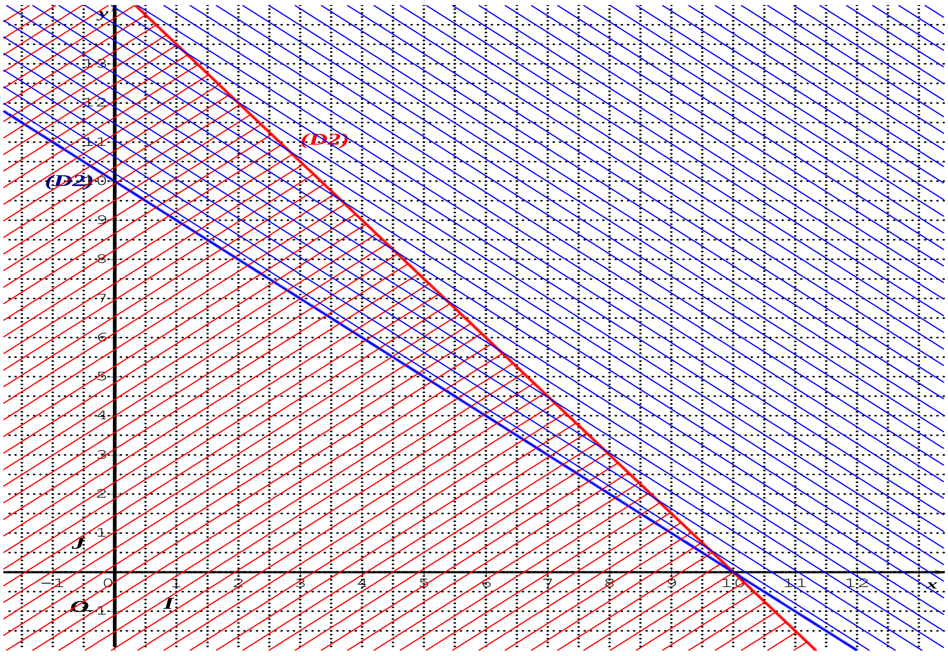
On a : $600x + 400y \leq 6000$ et $x + y \geq 10$, donc le couple (x ; y) est solution du système d'inéquations suivant : $\begin{cases} 600x + 400y \leq 600 \\ x + y \geq 10 \end{cases}$.

D'où le système $\begin{cases} 3x + 2y \leq 30 \\ x + y \geq 10 \end{cases}$.

2. <u>Déterminons cinq possibilités d'achats.</u>

Représentons l'ensemble des solutions du système : $\begin{cases} 3x + 2y \leq 30 \\ x + y \geq 10 \end{cases}$.

Traçons les droites (D_1) : $3x + 2y - 30 = 0$ et (D_2) : $x + y - 10 = 0$



Les couples (1 ; 10) ; (1 ; 11) ; (1 ; 12) ; (2 ; 9) ; (2 ; 10) ; (2 ; 11) ; (2 ; 12) sont des solutions du système $\begin{cases} 3x + 2y \leq 30 \\ x + y \geq 10 \end{cases}$.

Donc les achats possibles sont :

- 1L de jus de fruit et 10L de jus d'ananas.
- 1L de jus de fruit et 11L de jus d'ananas.
- 1L de jus de fruit et 12L de jus d'ananas.
- 2L de jus de fruit et 9L de jus d'ananas.
- 2L de jus de fruit et 10L de jus d'ananas.

Exercice 7

Une entreprise dispose d'un budget maximal de 2500000F pour acheter des ordinateurs de bureau à 70000F pièce et des ordinateurs portables à 120000F chacun.

Elle souhaite acquérir au moins 20 ordinateurs parmi lesquels doivent figurer au moins 5 portables.

1- Montre que les contraintes du problème posé conduit au système suivant :
2- Détermine graphiquement des nombres possibles d'ordinateurs de chaque type que l'entreprise peut acheter.

SOLUTION

1. <u>Montrons que les contraintes du problème conduisent au système suivant</u> : $\begin{cases} 7x + 12y \leq 250 \\ x + y \geq 20 \end{cases}$.

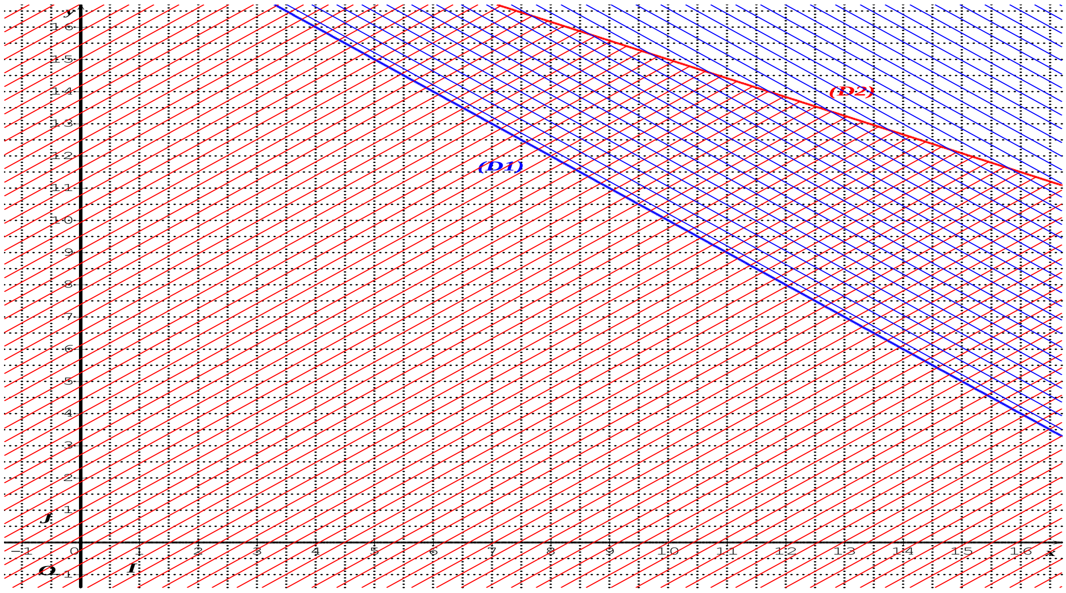
On a : $70000x + 120000y \leq 2500000$; $x + y \geq 20$ et $y \geq 5$, donc le couple (x ; y) est solution du système d'inéquations suivant : $\begin{cases} 70000x + 120000y \leq 2500000 \\ x + y \geq 20 \end{cases}$; où $x > 0$ et $y \geq 5$.

D'où le système $\begin{cases} 7x + 12y \leq 250 \\ x + y \geq 20 \end{cases}$ où $x > 0$ et $y \geq 5$.

2. <u>Déterminons cinq possibilités d'achats.</u>

Représentons l'ensemble des solutions du système : $\begin{cases} 7x + 12y \leq 250 \\ x + y \geq 20 \end{cases}$.

Traçons les droites (D_1) :$7x + 12y - 250 = 0$ et (D_2) : $x + y - 20 = 0$



Donc des nombres possibles d'ordinateurs de chaque type est :

- 12 ordinateurs de bureau et 12 ordinateurs portables
- 12 ordinateurs de bureau et 11 ordinateurs portables
- 12 ordinateurs de bureau et 10 ordinateurs portables
- 12 ordinateurs de bureau et 9 ordinateurs portables