SECONDAIRE

1$^{\text{ère}}$A
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Leçon 4 : DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTIONS

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Une entreprise produit et commercialise des pièces destinées à l'industrie automobile. Pour des raisons matérielles, sa capacité journalière de production est comprise entre 0 et 30 pièces. On suppose que toute la production est commercialisée. Une étude a révélé que le bénéfice journalier, exprimé en millions de francs CFA, réalisé pour la production et la vente de x pièces peut être modélisé sur l'intervalle [0 ; 30] par une fonction B définie par :

$B(x) = -2x^2 + 60x - 400$.

Désireux d'accroître son bénéfice, le directeur de l'entreprise cherche le nombre de pièces à produire en un jour, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal.
Ayant découvert un brouillon de ces recherches, son fils très curieux, en classe de première A, sollicite l'aide de ses camarades de classe.
Ceux-ci décident d'étudier et représenter une fonction.

B. CONTENU DE LA LECON

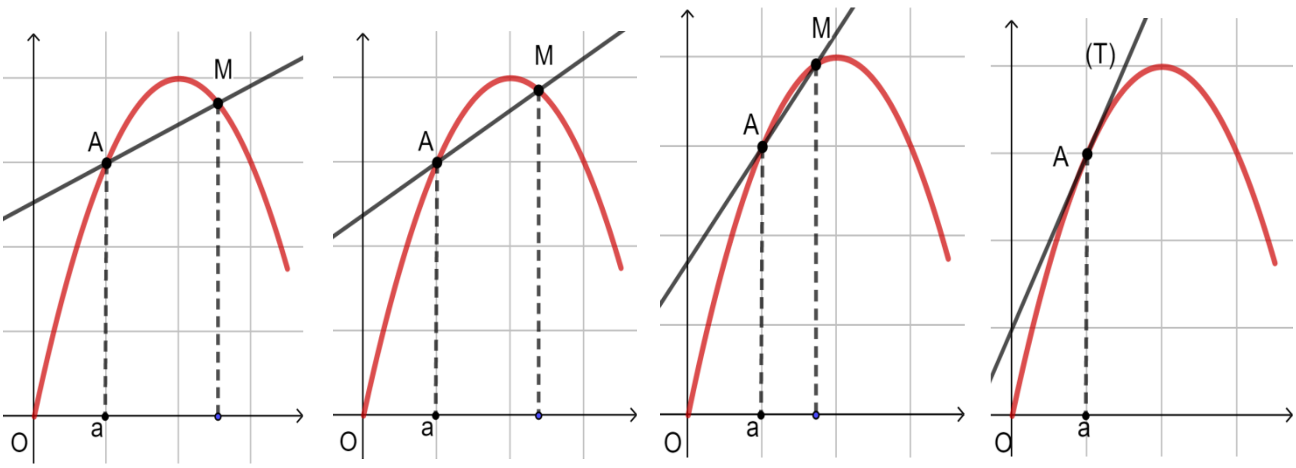
I- DERIVATION

1- Tangente à une courbe en un point

Présentation

Soient f une fonction . (C_f) sa courbe representative, $A(a; f(a))$ et $M(x; f(x))$ deux points de (C_f).
Lorsque le point M se deplace sur la courbe (C_f) et se rapproche de plus en plus du point A la secante (AM) à cette courbe finit par prendre une « position limite » representée par la droite (T) (voir figures ci-dessous). On dit que la droite (T) est la tangente en A à la courbe (C_f).

Illustration :



Rappel : Le coefficient directeur de la droite (AM) est $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

2- Nombre derive d'une fonction en un point

Definition

Soit f une fonction definie sur un intervalle ouvert I et a un element de I.

- On dit que f est derivable en a , lorsque la representation graphique de f admet en son point d'abscisse a une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées.
- On appelle nombre derivé de f en a le coefficient directeur de cette tangente.

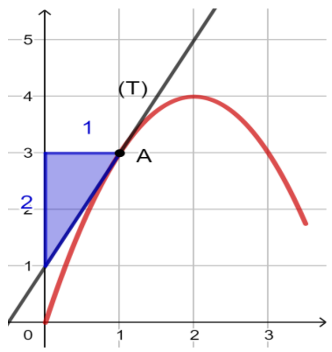
On note : $f'(a)$; on lit : f prime de a .

Exemple :

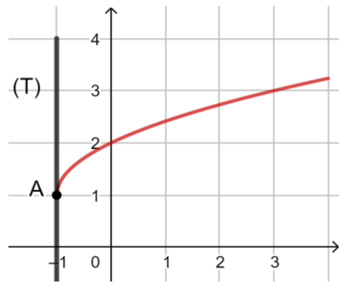
Soit (C_f) la courbe representative d'une fonction f dans le plan muni d'un repere orthonormé (O,I,J).

La courbe (C_f) admet au point $A(1;3)$ une tangente (T) de coefficient directeur 2.

La fonction f est donc derivable en 1 et $f'(1)=2$.



Au point A d'abscisse -1, la courbe ci-contre admet une tangente parallèle à l'axe des ordonnées . donc la fonction representée ci-contre n'est pas derivable au point d'abscisse -1.



3- CALCULS DE DERIVEES

a- Fonction dérivée

Définition

Soit une fonction f dérivable en tout élément d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$

La fonction qui a tout nombre x élément de I associe $f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f .

Elle se note f'.

On a : $\begin{array}{l} f':I \to IR \\ \quad x \mapsto f'(x) \end{array}$.

b- Dérivée de fonctions de référence

Fonction f	Fonction dérivée f'	f est dérivable sur l'intervalle
$x \mapsto k \ (k \in IR)$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax+b$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^3$	$x \mapsto 3x^2$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$

Exercice de fixation

Répond par Vrai si l'affirmation est vraie et par Faux si l'affirmation est fausse.

1- La dérivée de la fonction $x \mapsto x^3$ est la fonction $x \mapsto 3x$ sur $\mathbb{R}$.

2- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ sur $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$.

3- La dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto -120x$ est la fonction $x \mapsto -120$

corrigé

1- Faux
2- Faux
3- Vrai

c- Derivées et operations sur les fonctions

u et v sont deux fonctions definies et derivables sur un intervalle ouvert I

Fonction	Fonctions dérivée	Dérivable sur
Somme : $u+v$	$u'+v'$	I
Produit : $u\ v$	$u'v+uv'$	I
Produit par un nombre réel : ku	ku'	I
Quotient : $\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\{x \in I \ / \ v(x) \neq 0\}$
Inverse : $\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\{x \in I \ / \ v(x) \neq 0\}$

Exercice de fixation

Calcule la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur les intervalles indiqués

$Q(x) = x + x^3$; $\quad I = IR$

$J(x) = \sqrt{2}\ x$; $\quad I = IR$

$V(x) = \frac{2}{x}$; $\quad I =]1; +\infty[$

corrigé

$Q'(x) = 1 + 3x^2$; $\quad J'(x) = \sqrt{2}$; $\quad V'(x) = \frac{-2}{x^2}$

d- Equation de la tangente à une courbe

Proprieté

Soient f une fonction, (C_f) sa courbe representative dans le plan muni d'un repère (O,I,J) et A un point de (C_f) d'abscisse a. Lorsque f est derivable en a ,une équation de la tangente à (C_f) au point A d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

<u>Cas particulier</u> : Tangente horizontale.

Lorsque $f'(a)=0$, la tangente à (C_f) au point d'abscisse a est parallèle à l'axe des abscisses.

On dit que (C_f) admet **une tangente horizontale** au point d'abscisse a dans le cas d'un plan muni d'un repère orthogonal ou orthonormé (O,I,J).

<u>Exercice de fixation</u>

On considère la fonction *f* définie sur IR par $f(x) = -x^3 + 1$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, I, J).

1. Justifie que $f'(1) = -3$.
2. Détermine une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 1.

Corrigé

1- On a : $f'(x) = -3x^2$ et $f'(1) = -3 \times 1^2$. Donc $f'(1) = -3$

2- On a : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ or $f(1) = 0$. Donc $y = -3x + 3$

II- <u>ETUDE DE FONCTION</u>

1- <u>Sens de variation d'une fonction</u>

<u>Propriété</u>

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I de IR.

▪Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ alors la fonction f est croissante sur I.

▪Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$ alors la fonction f est décroissante sur I.

▪Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$ alors la fonction f est constante sur I.

<u>Exercice de fixation</u>

On considere la fonction g derivable sur [-1 ; 3].

On suppose que la fonction derivée g' est tel que : $\begin{cases} \forall\, x \in [-1;1], & g'(x) \leq 0 \\ \forall\, x \in [1;3], & g'(x) \geq 0 \end{cases}$

Determine le sens de variation de la fonction de la fonction g sur [-1 ; 3].

<u>corrigé</u>

2- La fonction g est decroissante sur $[-1;1]$

3- La fonction g est croissante sur $[1;3]$.

<u>Remarque</u>

Le tableau de variation d'une fonction peut être un tableau du type ci-dessous :

x	a	x_0	b
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$

►la flêche « monte » pour indiquer que la fonction est croissante sur l'intervalle $]a;x_0]$.

►la flêche « descend » pour indiquer que la fonction est decroissante sur l'intervalle$[x_0;b[$.

Exercice de fixation

On considère la fonction f définie sur [-1 ;3] par $f(x = x^2 - 2x + 5$, croissante sur $[1;3]$et décroissante sur $[-1;1]$.

dresse le tableau de variation de f sur [-1 ; 3].

corrigé

x	-1		1		3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	8	↘	4	↗	8

2 Extremum relatif d'une fonction sur un intervalle

2-2-1. Propriété

Soit f une fonction derivable sur un intervalle $]a;b[$ et x_0 un element de $]a;b[$ .Si f's'annule en x_0 et change de signe alors f admet un extremum relatif en x_0 .

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	M	↘	

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	m	↗	

f admet un maximum relatif M en x_0 . f admet un minimum relatif m en x_0 .

Remarque :

Un maximun relatif ou un minimum relatif est appele simplement un **extremum relatif.**

Exercice de fixation

On donne le tableau de variation d'une fonction f ci-dessous :

x	-4		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-5	↗	

La fonction f admet un extremum relatif sur l'intervalle $]-4;3[$.

Precise la nature de cet extremum , sa valeur et en quel nombre cet extremum existe

corrigé:

D'après le tableau de variation de f , la fonction f admet sur l'intervalle $]-4;3[$ un minimum relatif égal à -5 en 1.

C-. SITUATION COMPLEXE

Une entreprise produit et commercialise des pièces destinées à l'industrie automobile. Pour des raisons matérielles, sa capacité journalière de production est comprise entre 0 et 30 pièces. On suppose que toute la production est commercialisée. Une étude a révélé que le bénéfice journalier, exprimé en millions de francs CFA, réalisé pour la production et la vente de x pièces peut être modélisé sur l'intervalle [0 ; 30] par une fonction B définie par :
$B(x) = -2x^2 + 60x - 400$.

N'ayant pas de personnel qualifié mais désireux d'accroître son bénéfice, le directeur de l'entreprise désire déterminer le nombre de pièces à produire en un jour, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal. Le père sollicite son fils élève de1ere A, Qui décide a l'aide de ses acquits mathématiques de Répondre à la préoccupation de son père.

<u>Corrigé</u>

Pour repondre à la preoccupation du directeur,on utilise :

- la lecon derivabilité et etude de fonction
- Pour cela
- on étudie les variations de la fonction B sur [0 ; 30]
- on dresse son tableau de variation.
- _On Calcule la derivée de la fonction B.
- on doit determiner sil existe le maximum de la fonction B.

- <u>Calculons la derivée de la fonction B</u>

$\forall x \in [0; 30], B'(x) = -4x + 60$

- <u>Determinons le signe de la derivée</u>

On a : $B'(x) = -4x + 60$

Tableau de signe

x	0	15	60
$B'(x)$	+		−

- <u>Etudions le sens de variation de B.</u>

$\forall x \in [0; 15], B'(x) \geq 0$; donc B est croissante sur $[0; 15]$
$\forall x \in [15; 60], B'(x) \leq 0$; donc B est croissante sur $[15; 60]$

- <u>Dressons le tableau de variation</u>

x	0		15		60
$B'(x)$		+	0	−	
$B(x)$		↗	50	↘	
	-400				-1300

- <u>Conclusion</u>

La fonction B atteint son maximum au point d'abscisse 15.
Pour réaliser un bénéfice maximal, l'entreprise doit produire 15 pièces.

D. EXERCICES

1- Exercices d'application

Exercice 1

On donne le tableau de variation ci-dessous d'une fonction g.

x	-3		0		5
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	8	$\searrow$	-1	$\nearrow$	24

Justifie que la fonction g admet un extremum relatif en 0

Corrigé

D'après le tableau de variation, la fonction dérivée g' de g s'annule en 0 en changeant de signe, donc g admet un extremum relatif en 0.

Exercice 2

Dans chacun des cas ci-dessous, détermine la dérivée de la fonction f sur l'intervalle K donné.

a- $f : x \mapsto 7\sqrt{3}$ avec $K = \mathbb{R}$
b- $f : x \mapsto \frac{-3}{x}$ avec $K == [1;5]$
c- $f : x \mapsto 3x^2 + 7x$ avec $K = \mathbb{R}$

Corrigé

a- $f'(x) = 0$

b- $f'(x) = \frac{3}{x^2}$

c- $f'(x) = 6x + 7$

2- Exercices de renforcement

Exercice 3

On donne le tableau de variation ci-dessous d'une fonction g.

x	-3		-1		1		4
$g'(x)$		-	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$	8	$\searrow$	-2	$\nearrow$	5	$\nearrow$	24

1. Justifie que la fonction g admet un extremum relatif en -1.
2. Justifie que 5 n'est pas un extremum relatif.

Corrigé

D'après le tableau de variation, la fonction dérivée g' de g s'annule en -1 en changeant de signe, donc g admet un extremum relatif en -1

D'après le tableau de variation, la fonction dérivée g' de g s'annule en 1 et ne change pas de signe, donc g n'admet pas d'extremum relatif en 1.

Exercice 4

On considère la fonction h de IR vers IR, définie par $h(x) = x^3 - 3x + 5$, (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, I, J).

1. Calcule la dérivée de la fonction h.
2. Détermine une équation de la tangente au point d'abscisse 0.
3. Etudie le sens de variation de h sur [-2 ; 2]
4. Etablis le tableau le tableau de variation de h sur [-2 ; 2].
5. a- Complète le tableau suivant.

x	-2	$-1{,}5$	-1	$1{,}5$	2
$h'(x)$		$6{,}1$		$3{,}9$	

b- Construis la courbe (C_f) dans un repère orthogonal (O, I, J).

1. corrigé
2. Calculons la dérivée de la fonction h.

$\forall x \in IR, h'(x) = 3x^2 - 3$

3. Déterminons une équation de la tangente au point d'abscisse 0.

On a : $y = h'(0)(x - 0) + f(0)$ or $h(0) = 5$ et $h'(0) = -3$. Donc $y = -3x + 5$

4. Etudions le sens de variation de h sur [-2 ; 2]

Signe de la derivée

On a : $h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$

Tableau de signe

x	-2 -1	1	2
3	+	+	+
$x-1$	-	-	+
$x+1$	-	+	+
$h'(x)$	+	-	+

Sens de variations

$\forall x \in [-2; -1] \cup [1; 5], h'(x) \geq 0$; donc h est croissante sur les intervalles $[-2; -1]$ et $[1; 2]$

$\forall x \in [-1; 1], h'(x) \leq 0$; donc h est croissante sur $[-1; 1]$

5. Etablissons le tableau le tableau de variation de h sur [-2 ; 5]

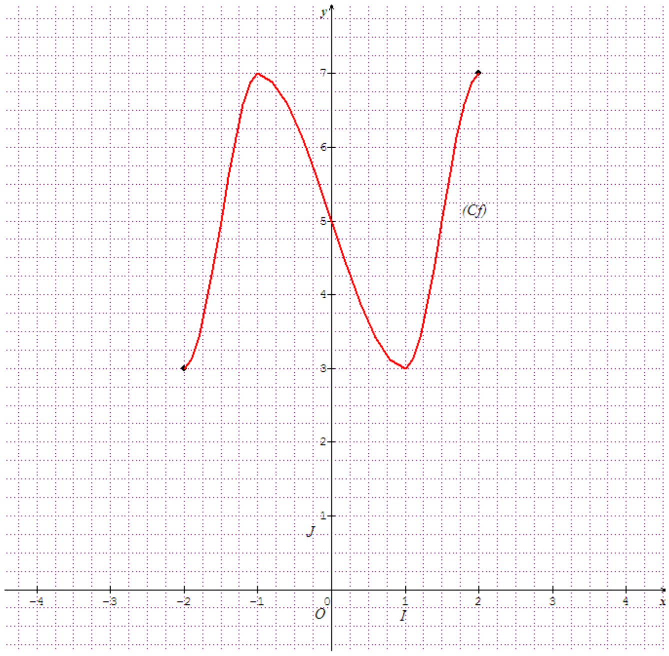
x	-2		-1		1		2
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$		↗	7	↘		↗	7

	3	3

6. a- Complétons le tableau suivant.

x	*-2*	*-1,5*	*-1*	*1,5*	*2*
h'(x)	*3*	*6,1*	*7*	*3,9*	*7*

b- Construis la courbe (C_f) dans un repère orthogonal (O, I, J).



3- Exercices d'approfondissement

<u>Exercice 5</u>

On considère la fonction h de IR vers IR, définie par $h(x) = x^3 + 5x^2 + 3x$, (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, I, J).

1. Justifie que la dérivée de la fonction h est $h'(x) = 3x^2 + 10x + 3$.
2. Etudie le signe de $h'(x)$
3. Démontre que h est croissante sur les intervalles $[-5; -3]$ et $\left[-\frac{1}{3}; 3\right]$ et décroissante sur $\left[-3; -\frac{1}{3}\right]$
4. Dresse le tableau de variation de h sur [-5 ; 3].

1. Corrigé

2. Justifions que la dérivée de la fonction h est $\boldsymbol{h'(x) = 3x^2 + 10x + 3}$.

On a : $h'(x) = (x^3 - 5x^2 + 3x)' = 3x^2 - 10x + 3$

3. Etudions le signe de $\boldsymbol{h'}$

On a : $h'(x) = 3x^2 - 10x + 3$

$\Delta = 10^2 - 4 \times (3) \times 3 = 100 - 36 = 64$, donc $h'(x)$ admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{-10+\sqrt{64}}{2\times3} = -\frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{-10-\sqrt{64}}{2\times3} = -3$,

Tableau de signe de $h'(x)$:

x	-5		-3		$-\frac{1}{3}$		3
$h'(x)$		+	0	-	0	+	

Donc

Pour tout $x \in [-5;-3] \cup \left[-\frac{1}{3};3\right]$, $h'(x) \geq 0$

Pour tout $x \in \left[-3;-\frac{1}{3}\right]$, $h'(x) \geq 0$

4. Démontrons que h est croissante sur les intervalles $[-5;-3]$ et $\left[-\frac{1}{3};3\right]$ et décroissante sur $\left[-3;-\frac{1}{3}\right]$

$\forall\ x \in [-5;-3] \cup \left[-\frac{1}{3};3\right]$, $h'(x) \geq 0$, h est croissante sur les intervalles $[-5;-3]$ et $\left[-\frac{1}{3};3\right]$

$\forall\ x \in \left[-3;-\frac{1}{3}\right]$, $h'(x) \leq 0$, h est décroissante sur $\left[-3;-\frac{1}{3}\right]$.

5. Dressons le tableau le tableau de variation de h sur [-5 ; 3].

x	-5		-3		$-\frac{1}{3}$		3
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	-15	↗	3	↘	$-\frac{13}{27}$	↗	81

V. DOCUMENTS

Mon cahier d'habiletés MATHS 1ère A (JD editions) ; mon cahier de la reussite 1ère A (VALLESSE edition) ; CIAM 1ère A.