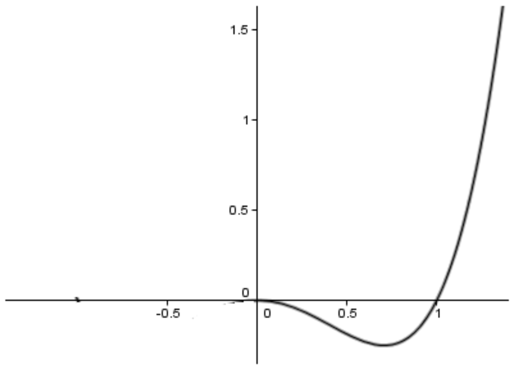
Première A

Mathématiques

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Leçon 3 : GENERALITES SUR LES FONCTIONS

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pendant une expérience en classe, un ordinateur donne différentes positions d'un objet mobile sur son écran. Le professeur affirme qu'on peut utiliser les propriétés d'une fonction paire pour obtenir toute la trajectoire du mobile. Curieux, les élèves décident d'approfondir leurs connaissances sur les fonctions paires ou impaires et leurs représentations graphiques.	

B. RESUME DE COURS

1- FONCTIONS PAIRES - FONCTIONS IMPAIRES

Soit f une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$. (C), sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, I, J).

1.1-Fonction paire

- **Définition**

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition D_f.

f est une **fonction paire** lorsque $\forall x \in D_f$, on a :

- $-x \in D_f$ et
- $f(-x) = f(x)$

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2$. Montrons que f est paire

- D'abord, déterminons l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

  $D_f = \mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme.

- Calculons $f(-x)$

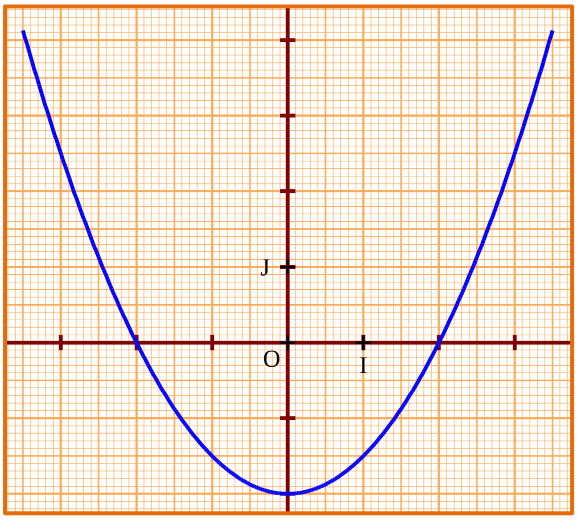
  Comme $D_f = \mathbb{R}$; on a : $\forall x \in D_f, -x \in D_f$.

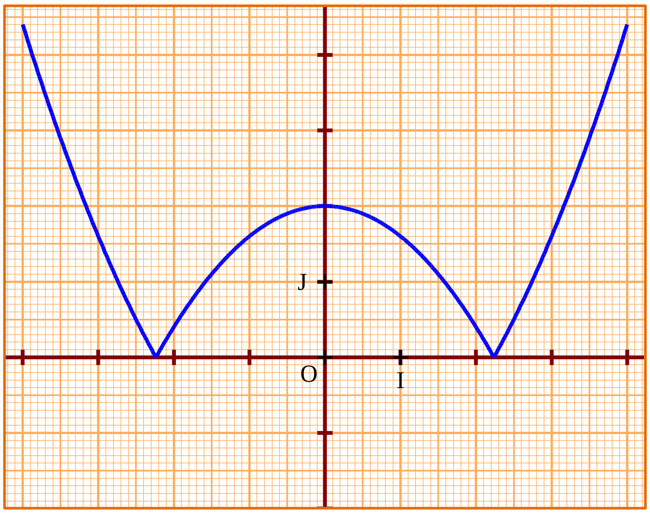
  De plus $f(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2 = f(x)$

En conclusion f est une fonction paire

● **Propriété**

Une fonction est paire si et seulement si l'axe des ordonnées (OJ) est un axe de symétrie de sa courbe représentative.





Exercice de fixation

Parmi les représentations graphiques ci-dessous, une seule est la représentation graphique d'une fonction paire.

Trouve la figure.

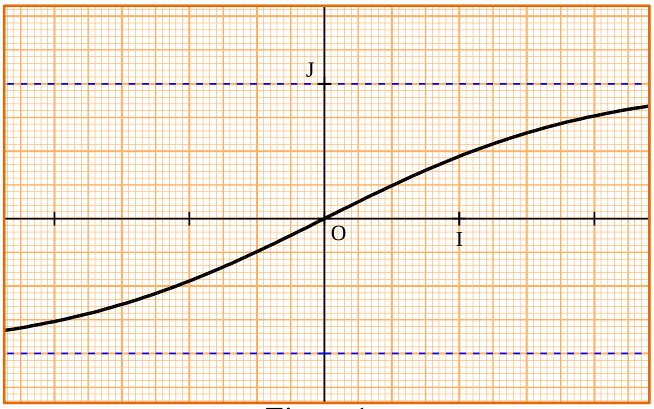


Figure 1

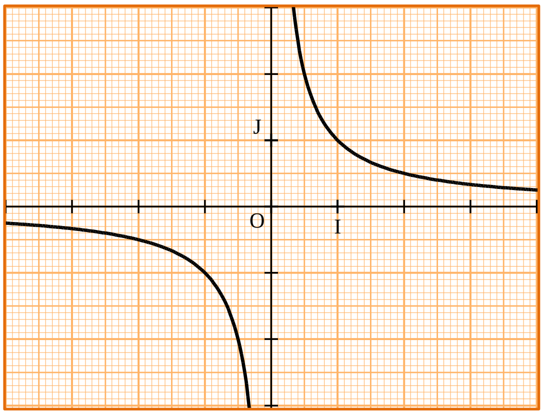


Figure 2

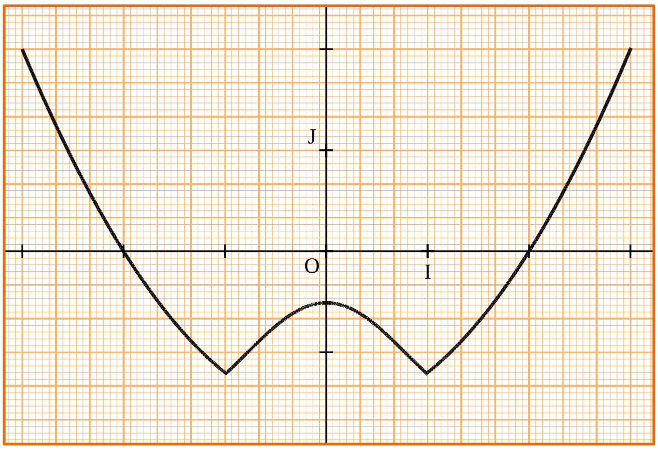


Figure 3

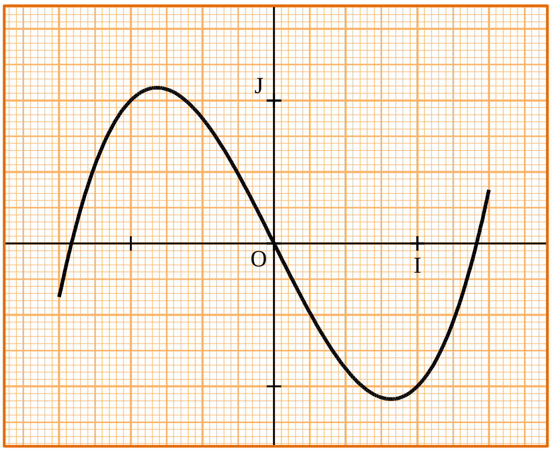


Figure 4

SOLUTION

Figure 3

1.2 Fonction impaire

●**<u>Définition</u>**

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition D_f.

f est une **fonction impaire** lorsque $\forall x \in D_f$, on a :

- $-x \in D_f$ et
- $f(-x) = -f(x)$

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x$. Montrons que la fonction f est impaire.

- Déterminons l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

  $D_f = \mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme.

- Calculons $f(-x)$.

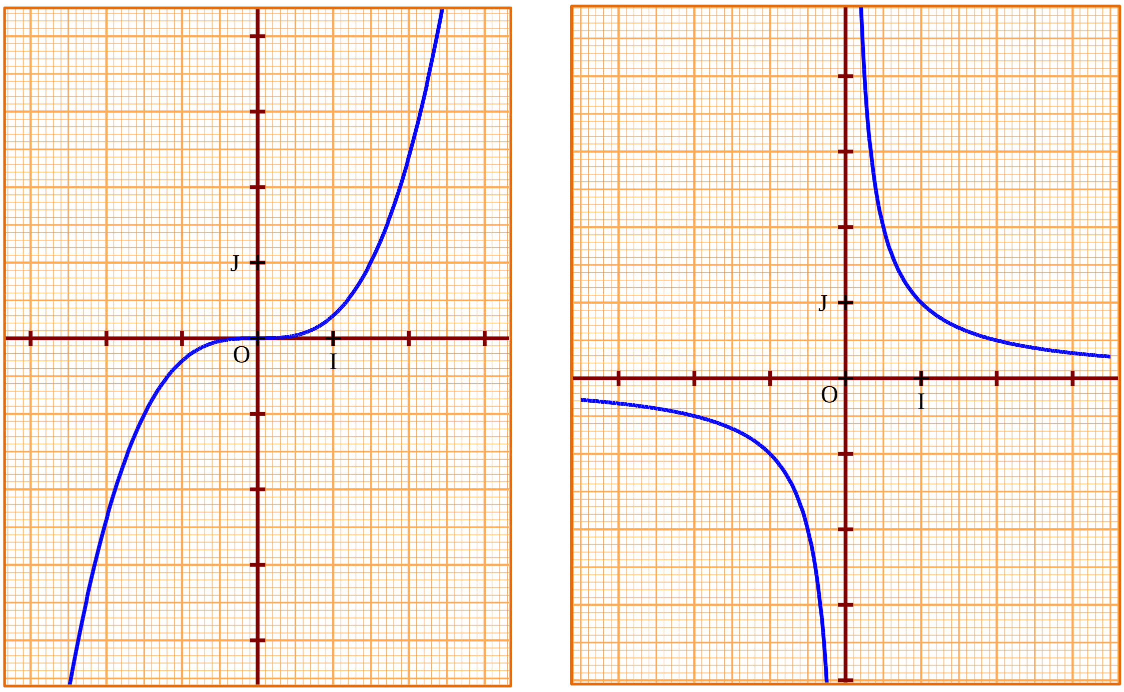
  Comme $D_f = \mathbb{R}$; on a : $\forall x \in D_f, -x \in D_f$.

  De plus $f(-x) = (-x)^3 - 6x = -x^3 + 6x = -(x^3 - 6x) = -f(x)$

  En conclusion f est une fonction impaire

● **<u>Propriété</u>**

Une fonction est impaire si et seulement si l'origine O du repère est un centre de symétrie de sa courbe représentative.



Exercice de fixation

Parmi les représentations graphiques ci-dessous, deux d'entre eux représentent la courbe d'une fonction impaire.

Figure 1

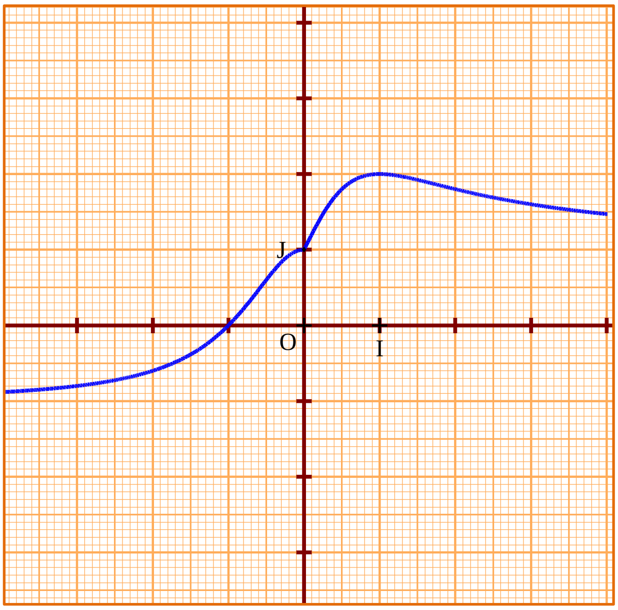


Figure 2

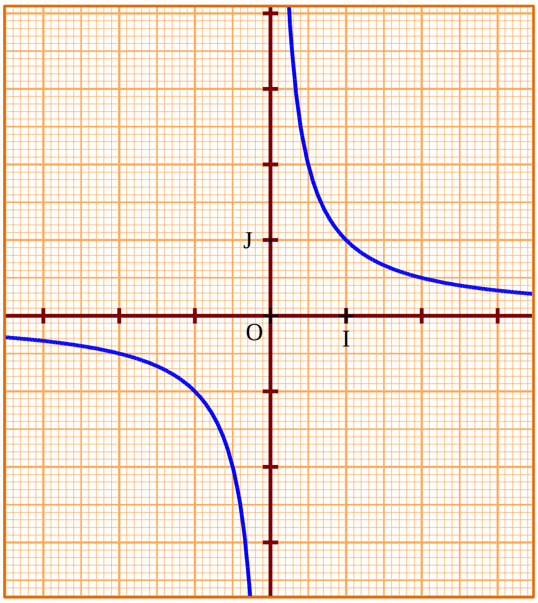


Figure 3

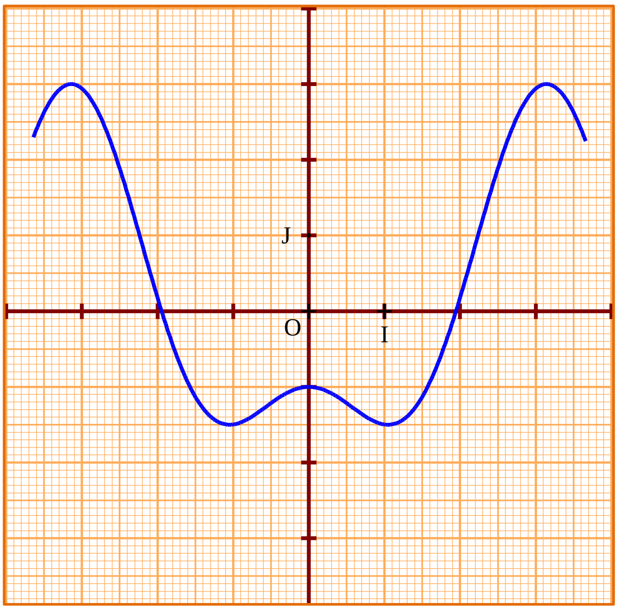
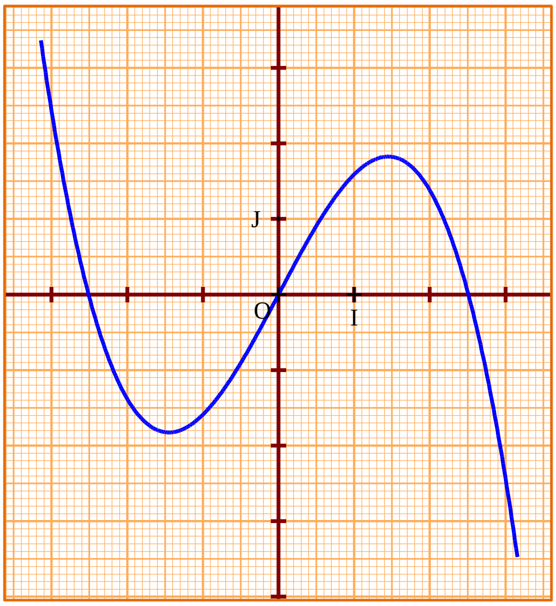


Figure 4



SOLUTION

Figure 2 et Figure 4

Remarque :

Il existe de nombreuses fonctions ne sont ni paires, ni impaires. Ainsi dans l'étude de la parité d'une fonction f, on arrive à l'une des conclusions suivantes : soit f est paire, soit f est impaire, soit f est ni paire ni impaire.

2- AXE DE SYMETRIE – CENTRE DE SYMETRIE

Soit f une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$. (C_f), sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, I, J).

2.1 Axe de symétrie

Propriété

Soit f une fonction de représentation graphique (C_f) et soit la droite (Δ) d'équation $x = a$.
(Δ) est un axe de symétrie de (C_f) si et seulement si pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $(a + h) \in D_f$, on a : $(a - h) \in D_f$ et $f(a+h) = f(a-h)$

Exercice de fixation

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)^2 + 1$.
Justifier que la droite (Δ) d'équation $f(x) = (x-2)^2 + 1$ est un axe de symétrie de (C_f).

SOLUTION

Justifions que la droite (Δ) d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de (C_f).

$f(x) = (x-2)^2 + 1$ et (Δ) : $x = 2$.

- $D_f = \mathbb{R}$. Alors pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $(2 + h) \in D_f$, on a : $(2 - h) \in D_f$.
- Calculons $f(2+h)$ et $f(2-h)$.
  $f(2+h) = (2+h-2)^2 + 1 = h^2 + 1$
  $f(2-h) = (2-h-2)^2 + 1 = (-h)^2 = h^2 + 1$
  D'où $f(2+h) = f(2-h)$ donc la droite (Δ) est bien un axe de symétrie de la courbe (C_f).

2.2 Centre de symétrie

Propriété

Soit f une fonction de représentation graphique (C_f) et $\Omega(a\,;b)$ un point du plan.
Ω est un centre de symétrie de (C_f) si et seulement si pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $(a + h) \in D_f$, on a : $(a - h) \in D_f$ et $\dfrac{f(a+h) + f(a-h)}{2} = b$

Exercice de fixation

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$.
Justifier que le point A(1 ; 2) est un centre de symétrie de (C_f).

SOLUTION

Justifions que le point A(1 ; 2) est un centre de symétrie de (C_f).

$f(x) = \dfrac{3x}{x-1}$ et A(1 ; 3).

- $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Alors pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $(1 + h) \in D_f$, on a : $(1 - h) \in D_f$.
- Calculons $f(1+h)$; $f(1-h)$ puis $\dfrac{f(1+h)+f(1-h)}{2}$.

$$f(1+h) = \frac{3(1+h)}{(1+h)-1} = \frac{3+3h}{h}$$

$$f(1-h) = \frac{3(1-h)}{(1-h)-1} = \frac{3-3h}{-h} = \frac{-3+3h}{h}$$

$$f(1+h)+f(1-h) = \frac{3+3h}{h} + \frac{-3+3h}{h} = \frac{6h}{h} = 6$$

$$\frac{f(1+h)+f(1-h)}{2} = 3$$

D'où $\dfrac{f(1+h)+f(1-h)}{2} = 3$ donc le point A est bien un centre de symétrie de la courbe (C_f).

C. SITUATION COMPLEXE

Pour compléter son rapport, Kouadio doit imprimer la figure 1 s'affichant à l'écran de son ordinateur. Son imprimante étant à court d'encre, l'impression produit la figure figure 2. Vu l'urgence et ne pouvant pas s'approvisionner en cartouche d'encre, Kouadio se propose de compléter soignement la fiche imprimée en observant les propriétés de la figure 1. Il sollicite ton aide à cette effet.

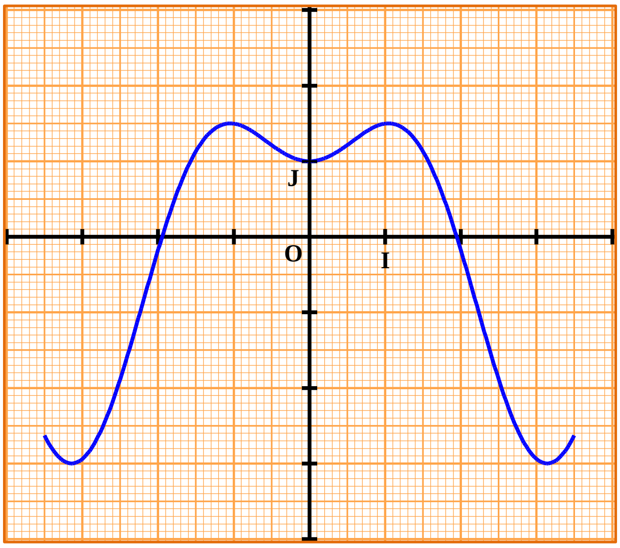


Figure 1

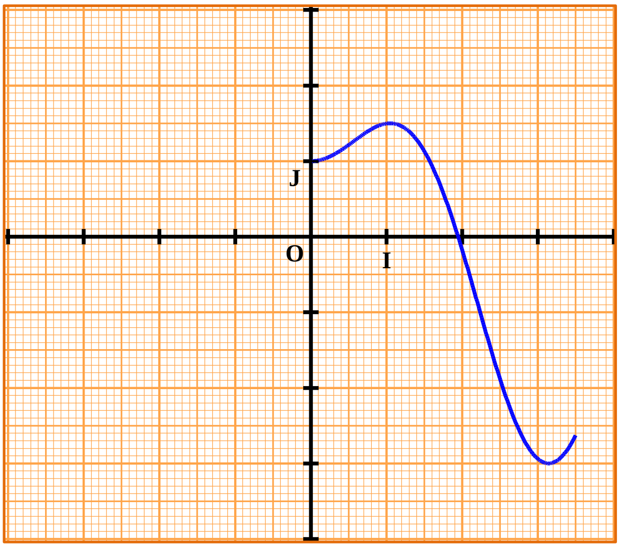


Figure 2

SOLUTION

1°) La représentation graphique de la figure 1 admet l'axe des ordonnées (OJ) comme axe de symétrie.

On peut donc compléter la figure en construisant le symétrique de la partie imprimée par rapport à l'axe (OJ).

D. EXERCICES

1- EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$; on a indiqué ci-dessous quatre expressions de $f(x)$.

Complète en cochant la case correspondant à la réponse juste.

$f(x)$	paire	impaire	Ni paire, ni impaire
x^2+1			
$2x^2-3x+1$			
$3x^3-6x$			
$\dfrac{-3}{x^2+1}$			

SOLUTION

$f(x)$	paire	impaire	Ni paire, ni impaire
x^2+1	X		
$2x^2-3x+1$			X
$3x^3-6x$		X	
$\dfrac{-3}{x^2+1}$	X		

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$. On donne le tableau de correspondance ci-dessous.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	7		2	-3		-4,5	

Recopie puis complète le tableau si

1) f est paire.
2) f est impaire.

SOLUTION

1. f est paire.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	7	-4,5	2	-3	2	-4.5	7

2. f est impaire.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	7	4,5	2	-3	-2	-4.5	-7

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur par $f(x)=3x^2-2x$.

1- Calcule $f(1)$ et $f(-1)$.
2- Justifie que f n'est pas paire.
3- a) La fonction est-elle impaire ?
   b) Si la fonction n'est par impaire, que peut-on conclure ?

SOLUTION

1. $f(1)=3\times1^2-2\times1=3-2=1$ et $f(-1)=3\times(-1)^2-2\times(-1)=3+2=5$

2. $f(1)=1$ et $f(-1)=5$. $f(1)\neq f(-1)$, f n'est pas une fonction paire.

3. a) $f(1)=1$ et $f(-1)=5 \Longrightarrow -f(-1)=-5$. $f(1)\neq -f(-1)$, f n'est pas une fonction impaire.

   b) f n'est pas paire et f n'est pas impaire. f est donc ni paire ni impaire.

2. EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 3

On considère les fonctions f ; g et h de IR vers IR définies par respectivement :

$f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$; $g(x)=2-x^2$ et $h(x)=\left(x-1\right)^2$. Étudier la parité de chacune de ces fonctions.

Solution

Étude de la parité de la fonction f

- Déterminons l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

  Pour tout $x\in$ IR, $x\in D_f \Leftrightarrow x^2-1\neq 0$

  $\Leftrightarrow (x-1)(x+1)\neq 0$

  $\Leftrightarrow x\neq 1$ et $x\neq -1$

  Donc D_f = IR\{– 1 ; 1}.

- Calculons $f(-x)$.

  Comme D_f = IR\{– 1 ; 1} ; on a : $\forall\, x\in D_f, -x\in D_f$.

  De plus $f(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2-1}=\dfrac{-x}{x^2-1}=-\dfrac{x}{x^2-1}=-f(x)$

  En conclusion f est une fonction impaire

Étude de la parité de la fonction g

- D'abord, déterminons l'ensemble de définition D_g de la fonction g.

  D_g = IR car g est une fonction polynôme.

- Calculons $g(-x)$

  Comme D_g = IR ; on a : $\forall\, x\in D_g, -x\in D_g$.

De plus $g(-x) = 2-(-x)^2 = 2-x^2 = g(x)$

En conclusion g est une fonction paire

Étude de la parité de la fonction h

- D'abord, déterminons l'ensemble de définition D_h de la fonction h.

  $D_h = \mathbb{R}$ car h est une fonction polynôme.
- Calculons $h(-x)$

  Comme $D_h = \mathbb{R}$; on a : $\forall\, x \in D_h, -x \in D_h$.

  De plus $h(-x) = (-x-1)^2 = (x+1)^2$

  On constate que $h(-x) \neq h(x)$ et $h(-x) \neq -h(x)$

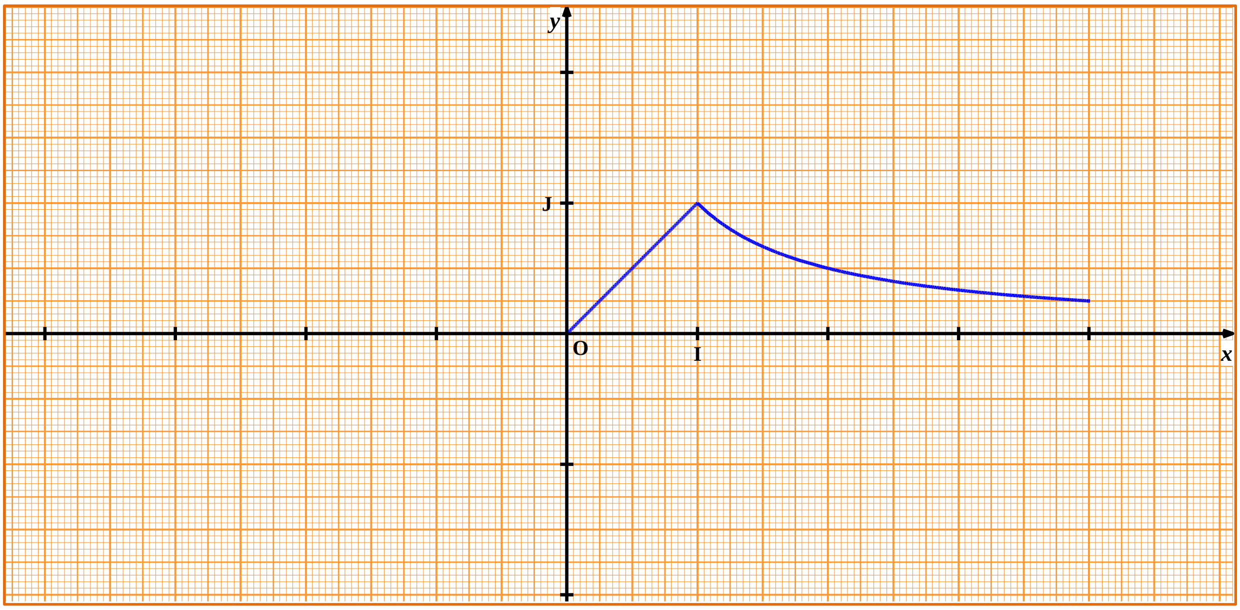
  En conclusion h est ni paire ni impaire.

Conclusion : f est impaire ; g est paire et h est ni paire ni impaire.

Exercice 4

La courbe ci-dessous est une partie de la représentation graphique (C) d'une fonction *f* ayant pour ensemble de définition [-4 ; 4]. Reproduis puis complète (C) pour que

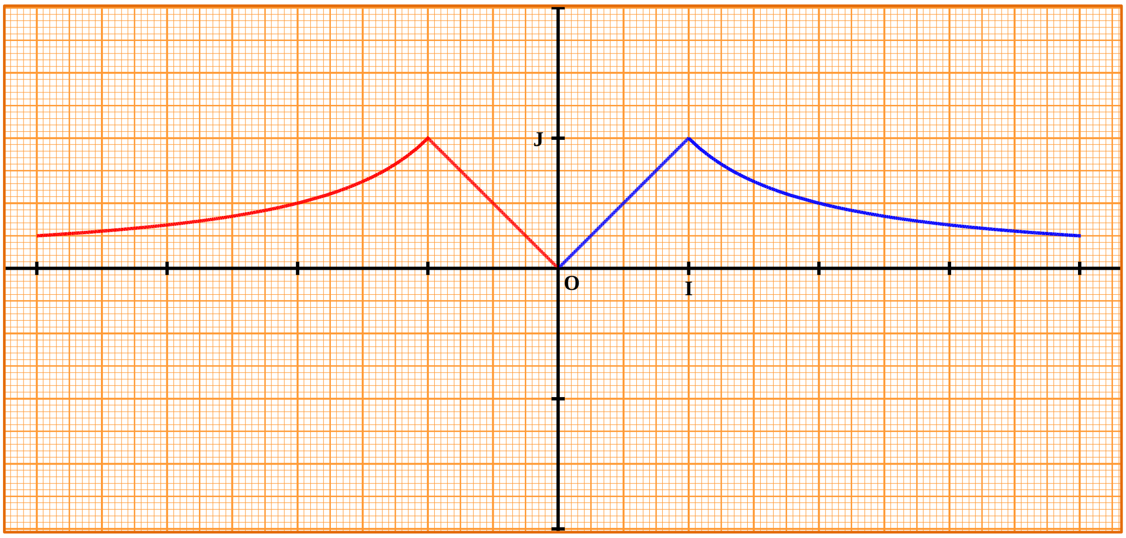
a) f soit une fonction paire.
b) f soit une fonction impaire.



SOLUTION

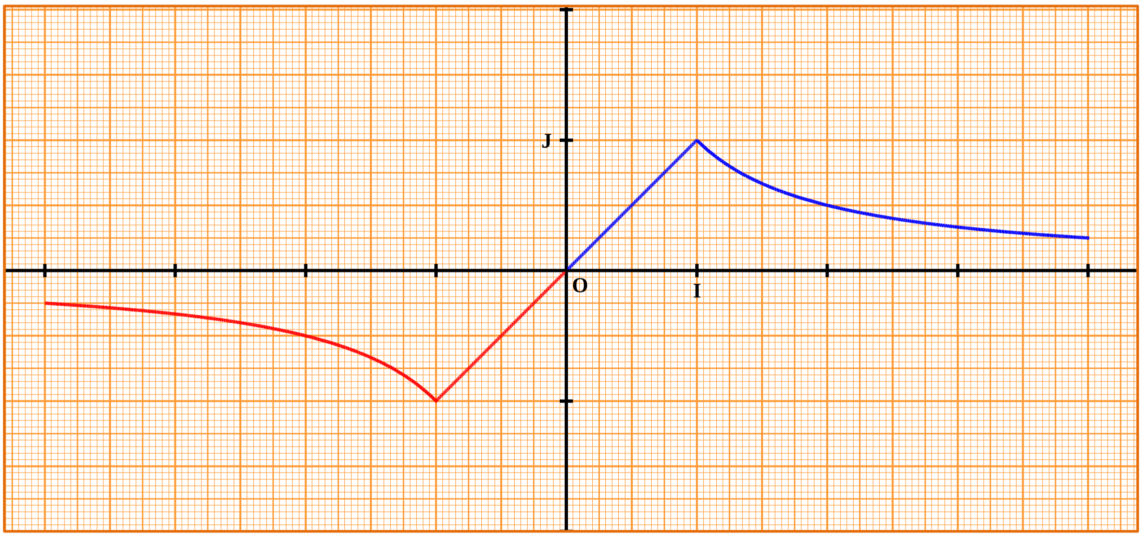
a) Cas où la fonction f est paire.

Il suffit de construire le symétrique de la courbe par rapport à la droite des ordonnées (OJ).



b) Cas où la fonction f impaire.

Il suffit de construire le symétrique de la courbe par rapport à l'origine du repère O.



Exercice 5

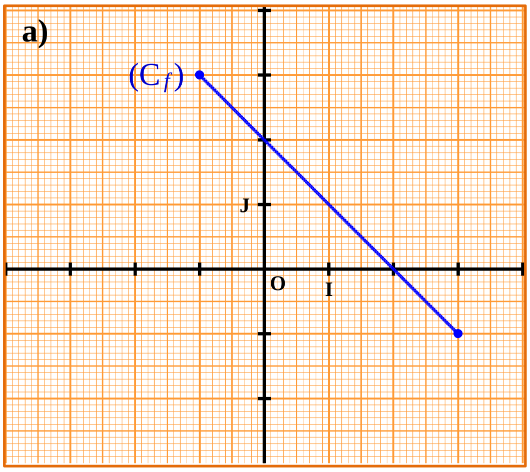
Le plan est muni d'un repère (O, I, J). (C_f) est la représentation graphique d'une fonction f. Dans chacun des cas suivants :

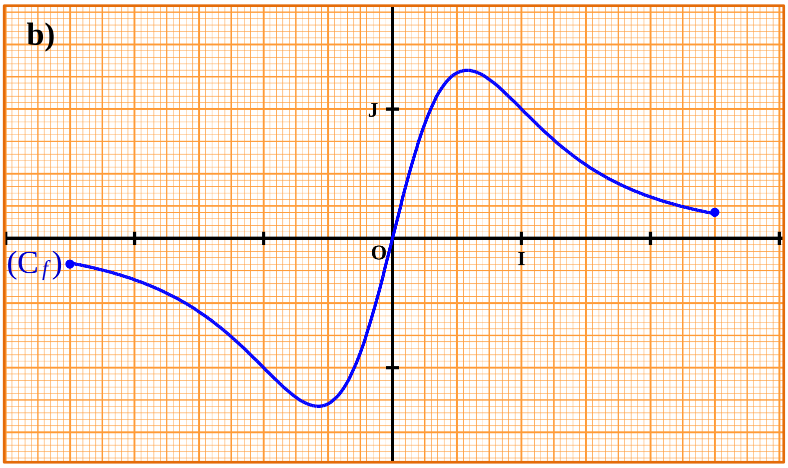
1- Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

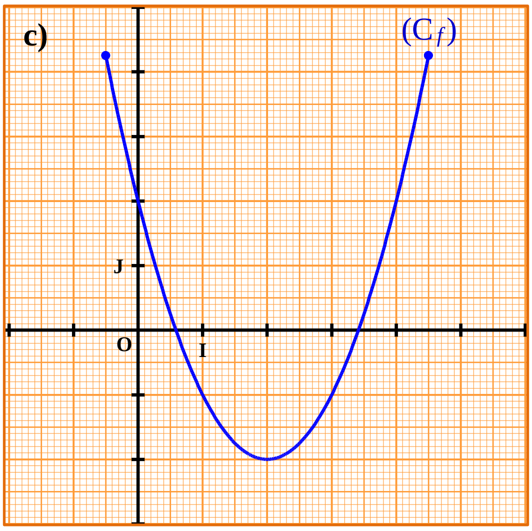
2- (C_f) admet un élément de symétrie (c'est-à-dire un centre ou un axe de symétrie) .

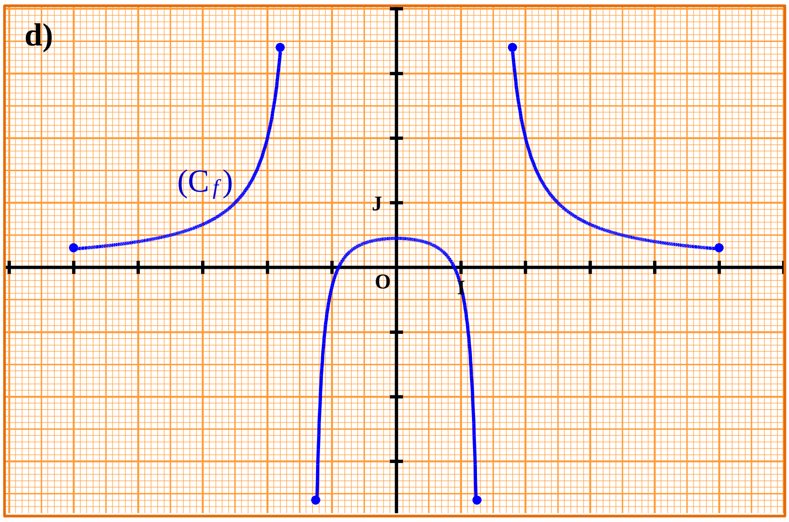
a) Détermine l'élément de symétrie.

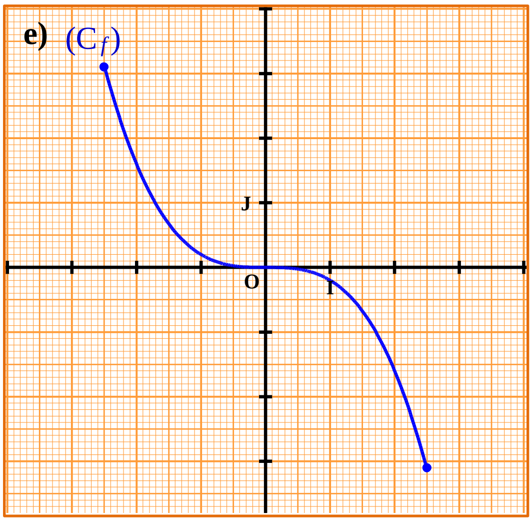
b) Précise la parité de f.

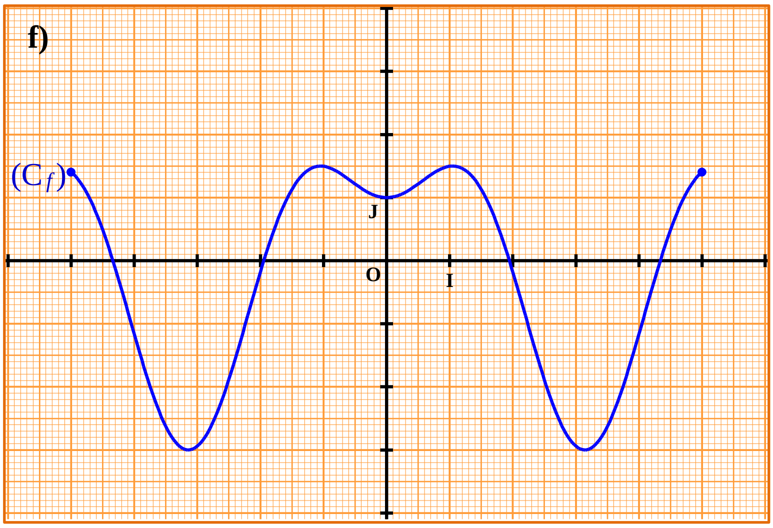












SOLUTION

Cas de la figure (a)

1. Ensembles de définition : [– 1 ; 3]
2. a) Élément de symétrie : centre de symétrie qui est le point A(1 ; 1)

   b) Parité : f est ni paire ni impaire (le centre est différent de l'origine du repère O)

Cas de la figure (b)

1. Ensembles de définition : [-2,5 ; 2,5]
2. a) Élément de symétrie : centre de symétrie qui est l'origine du repère O

   b) Parité : f est impaire

Cas de la figure (c)

1. Ensemble de définition : [-0,5 ; 4,5]
2. a) Élément de symétrie : axe de symétrie qui est la droite d’équation $x = 2$.
   b) Parité : f est ni paire ni impaire (l’axe de symétrie est différent de la droite (OJ))

Cas de la figure (d)

1. Ensemble de définition : [-5 ; -1,8] $\cup$ [-1,2 ; 1,2] $\cup$ [1,8 ; 5]
2. a) Élément de symétrie : axe de symétrie qui l’axe des ordonnées (OJ)
   b) Parité : f est ni paire ni impaire

Cas de la figure (e)

1. Ensemble de définition : [-2,5 ; 2,5]
2. a) Élément de symétrie : centre de symétrie qui est l’origine du repère O.
   b) Parité : f est impaire

Cas de la figure (f)

1. Ensembles de définition : [-5 ; 5]
2. a) Élément de symétrie : axe de symétrie qui l’axe des ordonnées (OJ)
   b) Parité : f est paire