MON ECOLE A LA MAISON

SECONDAIRE
$1^{ère}$ A
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Leçon 02 : DENOMBREMENT

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour l'organisation de la cérémonie de remise des prix d'excellence aux meilleurs élèves d'un lycée moderne, des jeunes filles d'une classe de première A sont choisies pour être des hôtesses. Celles-ci doivent faire asseoir chacun des quatre membres de la délégation officielle de la DRENET-FP sur quatre fauteuils prévus pour la circonstance.

Pendant les séances de répétitions, elles ont constaté qu'il y a plusieurs possibilités de faire asseoir les hôtes. L'une d'elle affirme qu'il y a 24 possibilités de faire asseoir les quatre membres de la délégation officielle. Ne parvenant pas à s'accorder sur ce nombre, elles en parlent à leurs camarades de classe puis, décident ensemble avec l'aide de leur professeur de mathématiques d'étudier les dénombrements.

B. CONTENU DE LA LEÇON

1-COMPLEMENTS SUR LES ENSEMBLES

1.1- Cardinal d'un ensemble fini

Définition

On appelle cardinal d'un ensemble fini E le nombre d'éléments de cet ensemble. On le note : Card(E).

Exemple : On donne A = {a ;b ;c ;d ;e ;f} et B = { 0 ;1}

Card(A)= 6 et card(B)=2

1.2-Complementaire d'un ensemble

Définition

Soit A une partie non vide d'un ensemble E.

On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A.

On le note C_E^A ou $\overline{A}$ et on lit « complémentaire de A dans E »

Exemple : on donne E={1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6 ;7} et A ={1 ;4 ;7} une partie de l'ensemble E.

$\overline{A} = \{2; 3; 5; 6\}$.

Propriété

Soit A une partie d'un ensemble fini E.

On a $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$

Exercice de fixation

Soit E un ensemble tel que E= {1 ; 2 ; 3 ; 4 ;5 ;7 ;8 ;9 ;10 ;11}

1- Détermine l'ensemble A des nombres impairs de E
2- Détermine $\text{Card}(\overline{A})$

Réponse attendue :

1- A= {1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11}

2- $\text{Card}(\overline{A})=\text{Card}(E) - \text{Card}(A)$

$= 10 - 6$

$\text{Card}(\overline{A})= 4$

2. PRODUIT CARTESIEN DE DEUX ENSEMBLES FINIS

2.1 Définition

A et B étant deux ensembles finis non vides.

On appelle produit cartésien de A par B l'ensemble des couples (a,b) tels que $a \in A$ et $b \in B$.

On note A×B et on lit « A croix B »

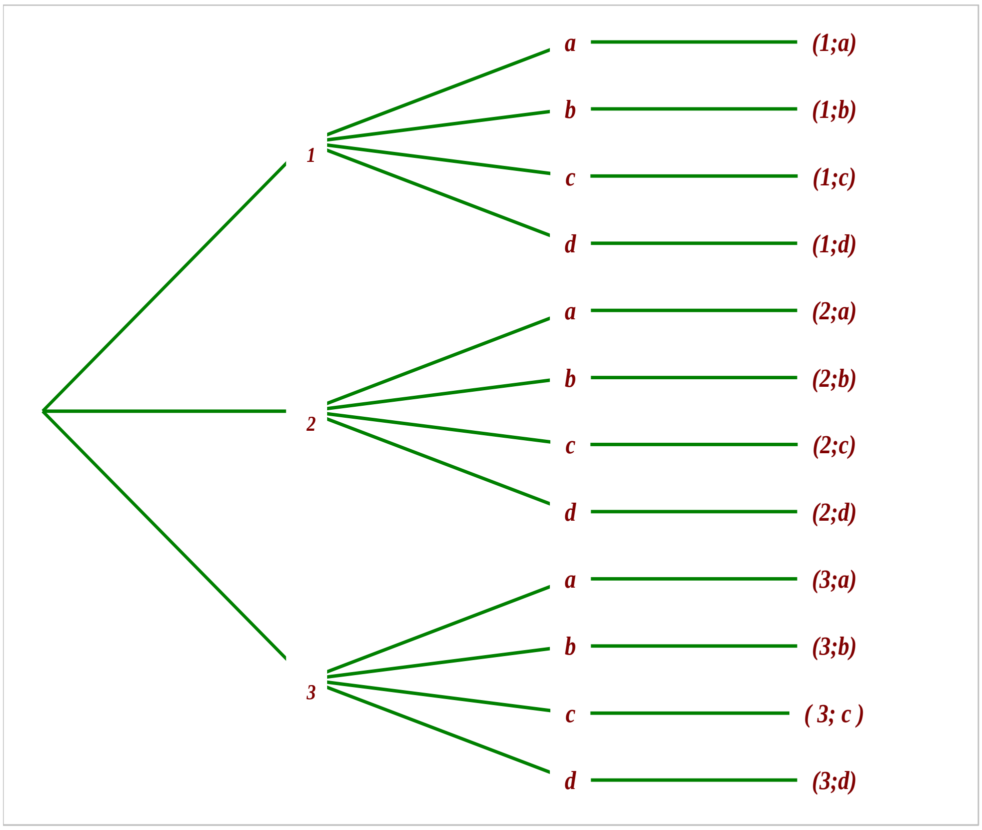
Exemple

Soit A et B des ensembles telle que A = {1 ; 2 ; 3} et B = {a ; b ; c ; d}

les éléments du produit cartésien de A×B sont :

(On pourra utiliser un arbre de choix ou un tableau à double entrées)

- Arbre de choix



- Tableau à double entrées

B / A	a	b	c	d
1	(1 ;a)	(1 ;b)	(1 ;c)	(1 ;d)
2	(2 ;a)	(2 ;b)	(2 ;c)	(2 ;d)
3	(3 ;a)	(3 ;b)	(3 ;c)	(3 ;d)

AxB = {(1 ;a);(1 ;b) ; (1 ;c) ; (1 ;d) ; (2 ;a) ; (2 ;b) ; (2 ;c) ; (2 ;d) ; (3 ;a) ; (3 ;b) ; (3 ;c) (3 ;d)**}**

Remarque : Dans un couple l'ordre des éléments est très important

Ainsi $(a,b) \neq (b,a)$.

2.2-Propriété

Soit A et B deux ensembles finis non vides.

Card(A×B)= Card(A)× Card(B)

Exercice de fixation

Soit A et B des ensembles telle que $A = \{1; 2; 3\}$ et $B = \{a, b, c, d\}$

Calcule Card(A×B)

Réponse attendue :

$Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B) = 3 \times 4 = 12$

3-P-LISTE D'UN ENSEMBLE FINI

3.1- Définitions

-Etant donné un ensemble E et un nombre entier naturel p non nul, on désigne par E^p le produit cartésien de p ensembles tous égaux à E.

-On appelle p-liste ou p-uplets de E tout élément de l'ensemble E^p.

3.2- Propriété

Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est n^p.

Exercice de fixation 1

E est un ensemble tel que card(E) = 6.

Détermine $card(E^3)$

Réponse attendue

$Card(E^3) = card(E) \times card(E) \times card(E)$

$= 6^3$

$= 216$

Exercice de fixation 2

Calcule le nombre de nombres à trois chiffres que l'on peut former avec les éléments de l'ensemble $A = \{2; 3; 5; 7; 8; 9\}$

Réponse attendue

357 est un élément du produit cartésien $A \times A \times A = A^3$.

Donc le nombre de nombres de trois chiffres formés à partir des éléments de A est :

$Card(A^3) = 6^3$

$=216$

4- ARRANGEMENT ET PERMUTATION

4.1- Arrangement

Définition

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel tel que $p \leq n$.

On appelle arrangement de p éléments de E tout p-uplet de E deux à deux distincts

Exemple

Soit E={0 ;1 ; 3 ; 4 }

- (0 ;3) est un arrangement de deux éléments de E.
- (1 ;4 ;3 ;1) n'est pas un arrangement de 4 éléments de E car 1 se répète deux fois dans l'ensemble.
- (0 ;4 ;1 ;3) est un arrangement de 4 éléments de E.
- (0 ;1 ;1 ;3) n'est pas un arrangement de 4 éléments de E

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel non nul tel que : $p \leq n$.

Le nombre d'arrangements de p éléments de l'ensemble E est :

$$\boldsymbol{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}$$

On le note A_n^p et se lit : « Arrangement de p dans n. »

Exercice de fixation :

Soit A= {a ;2 ; b ; e ; f ;5 }

Calcule le nombre d'arrangement à 3 éléments de A.

Réponse attendue :

A_6^3 = 6x5x4

= 120

4.2- Permutation

4.2.1-Factorielle

Définition

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle factorielle n, le produit : n x (n-1) x (n-2) x…x 3 x 2 x 1.

On le note : n !

On admet que : 0 !=1.

Exemple

●$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

●$\frac{8!}{5!} = \frac{8\times7\times6\times5!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$

Propriété

Soient n et p deux nombres entiers naturels tels que $p \leq n$. On a $A_n^P = \frac{n!}{(n-p)!}$

Exercice de fixation

Calcule : A_5^2 et A_6^3

Réponses attendues

$A_5^2 = \frac{5!}{3!}$

$= \frac{5\times4\times3!}{3!}$

$= 20$

$A_6^3 = \frac{6!}{3!}$

$= \frac{6\times5\times4\times3!}{3!}$

$= 120$

4.2.2-Permutation

Définition

Soit E un ensemble à n éléments.

-Une permutation des n éléments de E est un arrangement des n éléments de E.

-Le nombre de permutations des n éléments de E est : A_n^n .

On a A_n^n = n !

Exemple

Soit E= {1 ; 3 ; 0 ; 5}

1°) trois permutations des éléments de E sont : (1 ; 3 ; 0 ; 5) ; (3 ; 0 ; 5 ; 1) ;(0 ; 5 ; 1 ; 3)

2°) le nombre de permutations des éléments de E est : 4 ! = 4x3x2x1 = 24

5- COMBINAISON

5.1-Définitions

Définition1

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel tel que

$p \leq n$.

Une combinaison de p éléments de E est un sous ensemble de E ayant p éléments

Exemple

On donne A= {1 ; 3 ; 0 ; 2}

Exemple de deux combinaisons de 3 éléments de A sont :{1 ; 0 ; 2} et {3 ; 0 ; 2}

Définition2

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel non nul tel que : $p \leq n$.

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est : $\frac{A_n^p}{p!}$. On le note :
C_n^p ; se lit « Combinaison de p dans n »

Exemple

le nombre de combinaisons à 3 éléments d'un ensemble à 5 éléments est :

$C_5^3 = \frac{A_5^3}{3!}$

$=10$

5.2-<u>Propriété</u>

Soient n et p deux entiers naturels tels que: $p \leq n$

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Remarques : $C_n^n = 1$; $C_n^1 = n$; $C_n^0 = 1$

<u>Exercice de fixation</u>

Calcule C_5^2

<u>Réponse attendue</u>

$C_5^2 = \frac{5!}{2!x3!}$

$= \frac{5x4x3!}{2!x3!}$

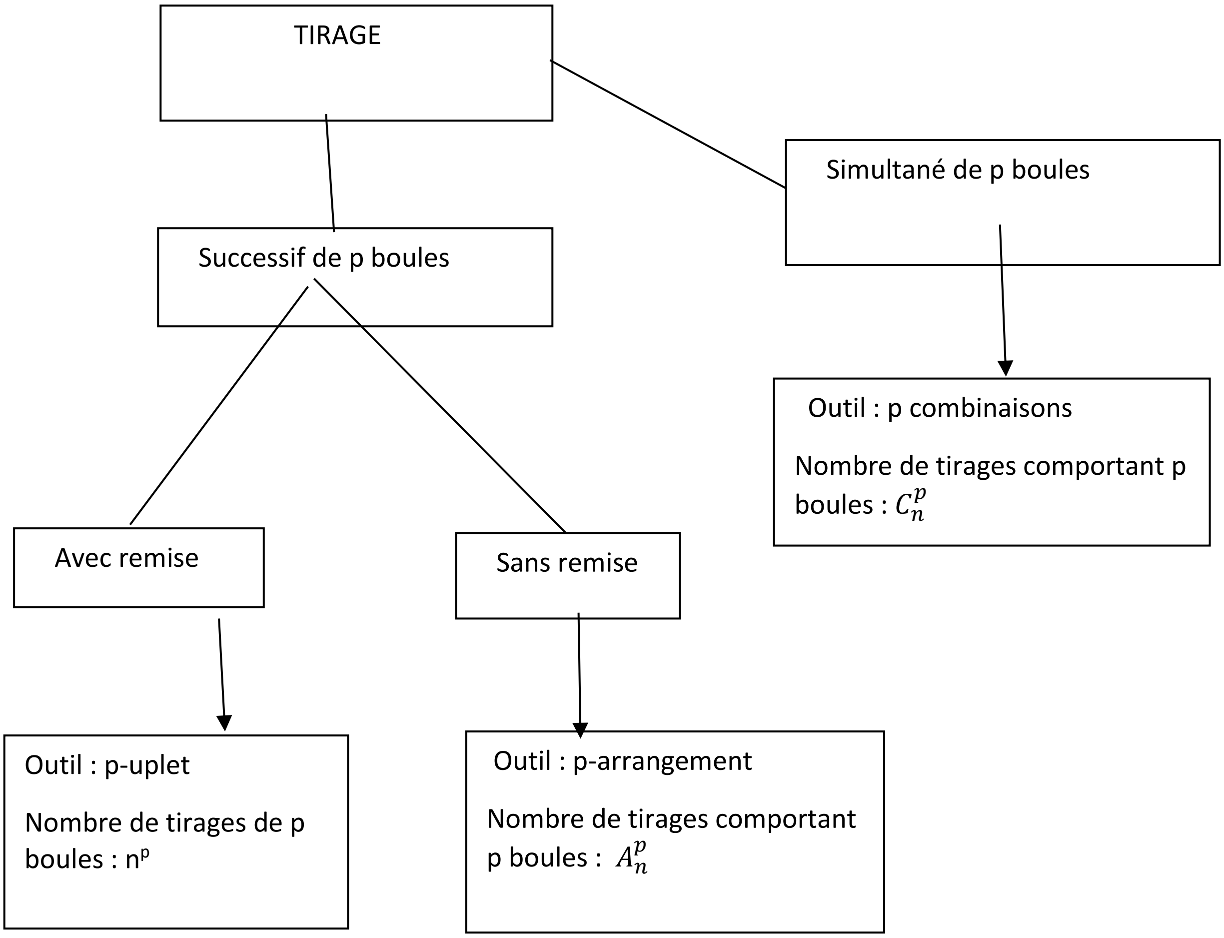
= 10

MODELISATION

Pour choisir une des notions : p-uplet, arrangement, permutation ou combinaison pour dénombrer, on peut ramener le problème posé au modèle de tirage de boules.

Une urne contient n boules. On tire p boules ($p \leq n$) de cette urne.

On veut déterminer le nombre de tirages possibles de p boules



C. SITUATION COMPLEXE

Pour l'organisation de la cérémonie de remise des prix d'excellence aux meilleurs élèves d'un lycée moderne, des jeunes filles d'une classe de première A sont choisies pour être des hôtesses. Celles-ci doivent faire asseoir chacun des quatre membres de la délégation officielle de la DRENET-FP sur quatre fauteuils prévus pour la circonstance.

Pendant les séances de répétitions, elles ont constaté qu'il y a plusieurs possibilités de faire asseoir les hôtes. L'une d'elle affirme qu'il y a 24 possibilités de faire asseoir les quatre membres de la délégation officielle. Elles ne parviennent pas à s'accorder.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances des dénombrements, tu es sollicité pour trancher cette discussion.

Proposition de correction

Pour trancher cette discussion, je vais utiliser le dénombrement.

Je vais déterminer le mode de rangement dont il est question ici afin de trouver la formule idéale à utiliser.

Je vais faire le calcule approprié en fonction du mode de calcul choisi ;

Je vais comparer le résultat obtenu à 24 afin de trancher la discussion.

Une manière de faire asseoir les 4 personnalités, qui sont toutes distinctes deux à deux, sur les 4 fauteuils est un arrangement de 4 fauteuils dans l'ensemble constitués par les 4 personnalités.

Donc le nombre total de manières de les faire asseoir est égal au nombre de permutations de 4 éléments de l'ensemble des 4 personnalités.

D'où on a:4 ! = 4x3x2x1

= 24

Il y a 24 manières. Celle qui affirme qu'il y a 24 possibilités a raison.

D. EXERCICES

Exercice de fixation

Exercice1

A, B et C sont des ensembles tels que : A = {a ; b} ; B = {1 ; 2} et

C= {α ; β ; γ}

Entoure la bonne réponse dans chacun des cas suivants :

N°	Enoncé	Réponses		
1	Le couple (a ;1) est un élément du produit cartésien	A x B	A x C	B x A
2	Le couple (γ ;b) est un élément du produit cartésien	A x C	A x B	C x A
3	Le couple (a ;γ) est un élément du produit cartésien	A x C	A x B	C x A
4	Le couple (2 ; β) est un élément du produit cartésien	C x B	A x B	B x C

Correction de l'exercice 1

1. **Réponse1**
2. **Réponse 3**
3. **Réponse 1**
4. **Réponse 3**

Exercice 2

On donne A = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5}

Entoure la bonne réponse dans chacun des cas suivants :

N°	Enoncés	Réponses		
1	Une 2-liste ou couple d'éléments de A est :	(2 ; 5)	(1 ; 7)	(8 ; 3)
2	Un 3-uplet ou 3-liste ou un triplet d'éléments de A est :	(1 ; 0 ; 6)	(4 ; 4 ; 0)	(3 ; 9 ; 2)

3	Une 5-liste ou 5-uplet d'éléments de A est :	(9 ;2 ;2 ;3 ;5)	(0 ;1 ;1 ;6 ;4)	(0 ;0 ;0 ;0 ;0)

Correction de l'exercice 2

1.Réponse1

2.Réponse 2

3.Réponse 3

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 3

Une classe comporte 36 élèves, dont 18 filles et 18 garçons. On veut constituer une équipe de 5 élèves pour participer à un concours.

1- Détermine le nombre d'équipes qu'on peut former

2- Détermine le nombre d'équipes constituées de 3filles et de 2 garçons

Correction de l'exercice 3

1-Avoir des équipes de 5 personnes dans une classe de 36 élèves constitue une combinaison de 5 éléments dans un ensemble à 36 éléments. Donc le nombre d'équipes est :

$$C_{36}^{5} = \frac{36!}{5!(36-5)!} = \frac{36!}{5!\times 31!} = \frac{36\times35\times34\times33\times32}{5\times4\times3\times2\times1} = 376\,992$$

2-Avoir des équipes constituées de 3 filles et de 2 garçons consiste à faire une combinaison de 3 éléments dans un ensemble à 18 éléments et une combinaison de 2 éléments dans un ensemble à 18 éléments. Donc le nombre d'équipe est :

$$C_{18}^{3} \times C_{18}^{2} = 816 \times 153 = 124\,848$$

Exercice 4

Une urne contient 3 boules noires, 2 boules blanches et 5 boules rouges. On tire successivement 3 boules avec remise de l'urne.

1- Calcule le nombre de tirage possible

2- Calcule le nombre de tirage contenant :

a- Trois boules de mêmes couleurs

b- Trois boules de couleurs différentes

c- Exactement deux boules de mêmes couleurs

d- Au moins une boule noire

Correction de l'exercice 4

Résumé : $\begin{cases} 3\ boules\ noires \\ 2\ boules\ blanches \\ 5\ boules\ rouges \end{cases}$;

Il s'agit d'un tirage successif avec remise : l'outil de dénombrement utilisé est le P- uplet.

1- le nombre de tirage possible est : $10^3 = 1000$.

2- a- Former des tirages de trois boules de mêmes couleurs constitue un 3-uplets (triplet). Le tirage se fera alors dans l'ensemble des 3 boules noirs ou dans l'ensembles des 5 boules rouge ou dans l'ensemble des deux boules blanche. Donc le nombre de tirage est :

$$3^3+5^3+2^3=27+125+8=160$$

b- Former des tirages de trois boules de couleurs différentes consiste à tirer une boule noire et une boule blanche et une boule rouge. En tenant compte de la position des couleurs on obtient 6 cas possible. Donc le nombre de tirage est :

$$3^1 \times 2^1 \times 5^1 \times 6 = 180$$

c - Former des tirages de trois boules contenant exactement deux boules de mêmes couleurs consiste à tirer soit: 2 boules noires et 1 boule parmi les 7 restantes ou 2 boules blanches et 1 boule parmi les 8 restantes ou deux boules rouges et 1 parmi les 5 restantes. Tenant compte des différentes positions, on a :

$$(3^2 \times 7^1 + 2^2 \times 8^1 + 5^2 \times 5^1) \times 3 = 660$$

d – le nombre de tirages contenant aucune boule noire est $7^3 = 343$

L'ensemble constitué par les tirages contenant aucunes boule noire est le complémentaire de l'ensemble constitué par les tirages contenant au moins une boule noire ». Par conséquent le nombre de tirage contenant au moins une boule noire est :

$$10^3 - 7^3 = 1000 - 343 = 657$$

EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 5

Combien de mots de 4 lettres deux à deux distincts ayant un sens ou non peut-on former avec les lettres du nom CHANSLY dans chacun des cas suivants :

1- Le mot commence par C

2- Le mot commence par C et se termine par Y.

3- Aucune restriction n'est faite.

Correction de l'exercice 5

Le nom CHANSLY comporte 7 lettres, donc former des mots de 4 lettres deux à deux distincts ayant un sens ou non à parti du nom CHANSLY revient à utiliser un arrangement.

1- Le mot commence par C, donc on a une seule disposition possible pour cette lettre, alors on va prendre les trois autres lettres dans l'ensemble des 6 lettres restantes :

{H ; A ; N ; S ; L ; Y}, le nombre de mot est donc :

$$1 \times A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

2- Le mot commence par C et se termine par Y, alors la position de ses deux lettres reste connue. Alors pour les deux autres lettres du milieu, on va les choisir parmi les 5 lettres restantes ; le nombre de mot est donc :

$$1 \times A_5^2 \times 1 = 20.$$

<u>Exercice 6</u>

Dans le souci de mieux organiser leur quartier, les habitants décident de se regrouper en association. Cette association composée de 20 membres dont 12 hommes et 8 femmes, désire former un comité de 5 personnes, dans lequel doivent se trouver au moins deux hommes et deux femmes. Un élève de $1^{\text{ère}}$ A, habitant ce quartier, décide de trouver les différents comités susceptibles d'être formés.

Détermine le nombre de façons qu'on peut former ce comité dans les cas suivants :

1- Chaque membre accepte de faire partie du comité.

2- M. Konan et Mme Yéo font partie des 20 membres de l'association et refusent de siéger ensemble.

Correction de l'exercice 6

1- L'association se compose de 5 personnes avec au moins 2 hommes et 2 femmes, alors on aura le cas où le comité va se constituer de 2 hommes et 3 femmes ou le cas où le comité aura en son sein 3 hommes et 2 femmes. Dans ses deux cas, aucune personne ne pourra occuper deux post en même temps ; on va donc utiliser des combinaisons vues que l'ordre n'a pas d'importance ici. Le nombre de cas possible est donc :

$$C_{12}^2 \times C_8^3 + C_{12}^3 \times C_8^2 = 8008$$

2- M. Konan et Mme Yéo refusent de siéger ensemble, donc on aura deux cas de figures ici ; si M. Konan est dans le bureau, Mme Yéo n'en fera pas parti ou si Mme Yéo est dans le bureau, M. Konan n'y sera pas. Le nombre de possibilités est déterminé presque de la même manière que dans la question1, mais tout en réservant la place de M. Konan ou Mme Yéo et en évitant de les mettre ensemble. Le nombre de possibilités est donc :

$$1 \times C_{11}^1 \times C_7^3 + C_{11}^3 \times 1 \times C_7^1 = 1540$$