Niveau : Terminales C, D

Discipline : Physique-Chimie

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

THEME : MECANIQUE

TITRE DE LA LEÇON : MOUVEMENT DU CENTRE D'INERTIE D'UN SOLIDE

I. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Dans le car de transport le ramenant d'ABIDJAN, un élève de la Terminale C du Lycée Moderne Abengourou observe le mouvement d'une petite poupée suspendue au rétroviseur interne, par l'intermédiaire d'un fil inextensible. Il constate que :

- la poupée reste fixe et le fil reste vertical lorsque le véhicule est immobile ;
- la poupée s'incline vers l'arrière quand le car accélère ;
- la poupée s'incline vers l'avant quand le car ralentit.

Arrivé en classe, il informe ses camarades. Très émerveillés, ils cherchent à comprendre ces observations. Alors ils décident, sous la supervision de leur professeur de Physique-Chimie, de définir un référentiel galiléen, d'établir un lien entre l'accélération et les forces extérieures appliquées au système et d'appliquer le théorème du centre d'inertie.

II. CONTENU

1. LES RÉFÉRENTIELS GALILÉENS

1.1 Définition

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe de l'inertie est vérifié.

1.2 Exemples

- Le référentiel de Copernic ou référentiel héliocentrique
  Il a pour origine le centre du système solaire et pour axes, trois axes dirigés vers trois étoiles fixes.
  .
- Le référentiel géocentrique
  Il a pour origine le centre d'inertie de la Terre. Ces axes sont ceux du référentiel de Copernic.
- Le référentiel terrestre ou référentiel du laboratoire
  Le solide de référence est un objet immobile situé sur la Terre (un arbre, un mur, …). Il est supposé galiléen pour des expériences de courtes durées.

2. THÉORÈME DU CENTRE D'INERTIE

Énoncé du théorème du centre d'inertie

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de la masse de ce solide par le vecteur-accélération de son centre d'inertie :

$$\sum \vec{f}_{ext} = m.\vec{a}_G$$

Remarque :

Si la somme des forces extérieures est nulle : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ *alors* $\vec{a} = \vec{0}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = \vec{0} \text{ ; le système est immobile} \\ \vec{v} = \overrightarrow{cst} \text{ ; lemouvement est uniforme.} \end{cases}$$

On retrouve alors le principe de l'inertie.

3. THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

Énoncé du théorème

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un solide entre deux instants est égale à la somme algébrique des travaux effectués entre les deux instants par toutes les forces extérieures appliquées au solide :

$$\Delta E_C = E_{C_B} - E_{C_A} = \sum W_{AB}(\vec{f}_{ext}).$$

Activité d'application

Pour chacune des affirmations suivantes, mets une croix dans la case qui correspond à la bonne réponse.

N°	Affirmations	Vrai	Faux
1	Dans un référentiel galiléen, si la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide est nulle alors ce solide est nécessairement au repos.		
2	Les théorèmes de l'énergie cinétique et du centre d'inertie ne sont applicables que dans des référentiels galiléens.		
3	Un solide en mouvement rectiligne et uniforme peut être considéré comme un référentiel galiléen.		
4	Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide en mouvement rectiligne et uniforme est nulle.		
5	Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un solide est égale à la somme des forces extérieures appliquées à ce solide.		

Solution

N°	Affirmations	Vrai	Faux
1	Dans un référentiel galiléen, si la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide est nulle alors ce solide est nécessairement au repos.		X
2	Les théorèmes de l'énergie cinétique et du centre d'inertie ne sont applicables que dans des référentiels galiléens.	X	
3	Un solide en mouvement rectiligne et uniforme peut être considéré comme un référentiel galiléen.	X	
4	Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide en mouvement rectiligne et uniforme est nulle.	X	
5	Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un solide est égale à la somme des forces extérieures appliquées à ce solide.		X

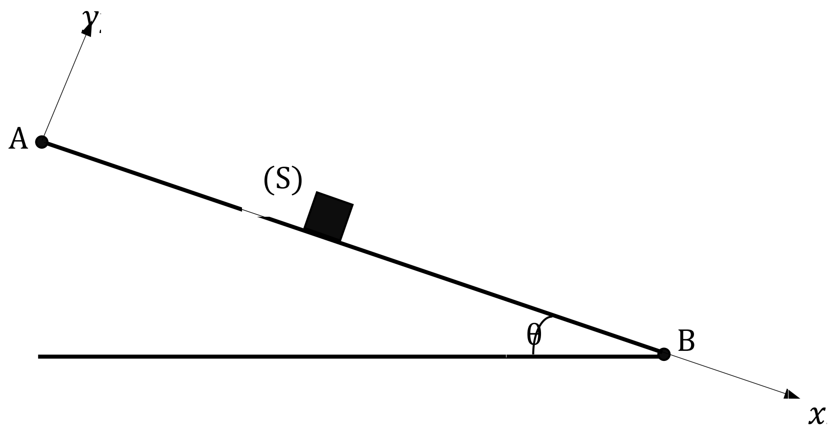
4. PROTOCOLE DE RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE

Pour résoudre un problème de mécanique, il faut :

- définir le système ;
- choisir un référentiel galiléen convenable muni d'un repère orthonormé ;
- faire le bilan ou l'inventaire des forces appliquées au système, avec un schéma si possible ;
- appliquer le théorème du centre d'inertie ou le théorème de l'énergie cinétique selon le besoin.

SITUATION D'ÉVALUATION

Lors d'une séance de TP, ton groupe étudie le mouvement d'un mobile de masse m = 630 g sur un banc à coussin d'air de longueur
AB = l = 2 m. Le banc est incliné d'un angle $\theta = 30^\circ$ par rapport à l'horizontale comme l'indique la figure ci-dessous. Le mobile initialement au repos en A, y est lâché sans vitesse initiale.



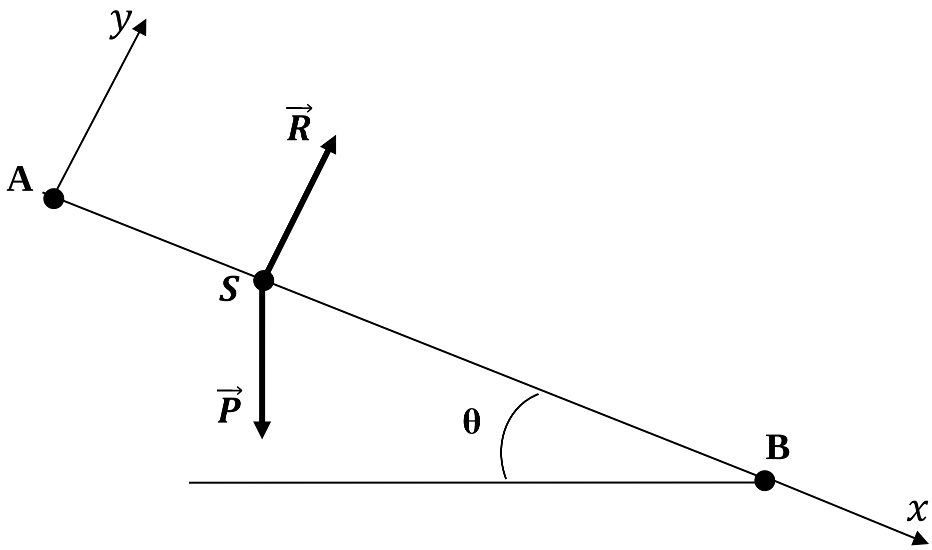
On donne : $g = 10\ m.s^{-2}$.
Le Professeur vous demande de déterminer l'accélération du mobile et sa vitesse V_B au point B. Tu es le rapporteur du groupe. Réponds aux questions suivantes :
1. Donne :
  1.1 la définition d'un référentiel galiléen ;
  1.2 l'énoncé du théorème du centre d'inertie.
2. Représente qualitativement les forces extérieures qui s'exercent sur le solide.
3. Détermine l'accélération a_x du mobile.
4. Détermine la vitesse V_B en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

Résolution

1.1 Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe de l'inertie est vérifié.
1.2 Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de la masse de ce solide par le vecteur-accélération de son centre d'inertie.

2. Système : le solide.
   Référentiel d'étude : Référentiel terrestre supposé galiléen.
   Bilan des forces :

$\vec{P}$: Poids du solide ;
$\vec{R}$: Réaction de la piste ;
Représentation des forces.



3. Appliquons le théorème du centre d'inertie au solide S.

$\vec{R} + \vec{P} = m.\vec{a}$

Projection de cette relation vectorielle sur l'axe (A, x) :

$R_x + P_x = ma_x$

$0 + m.g.\sin\theta = m.a_x$ d'où $a_x = g.\sin\theta$

Le calcul donne $a_x = 10\times\sin 30° = 5\ m.s^{-2}$

4. Détermination de V_B :

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au solide S entre les points A et B :

$E_{CB} - E_{CA} = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$

$W(\vec{R}) = 0$ car $\vec{R} \perp (AB)$; $W(\vec{P}) = mgl\sin\theta$

$E_{CA} = 0$ car $V_A = 0$ et $E_{CB} = \frac{1}{2}mV_B^2$

Le théorème devient $\frac{1}{2}mV_B^2 =$ mglsinθ ; on tire $V_B = \sqrt{2gl\sin\theta}$

A.N : $V_B = \sqrt{2\times 10\times 2\times 0{,}5} = 4{,}5 m/s^2$

III. EXERCICES

Exercice 1

Complète le texte ci-dessous avec les mots et groupe de mots suivants :**le théorème de l'énergie cinétique; des référentiels galiléens; le théorème du centre d'inertie; théorèmes.**

Un solide de masse m tombe d'une chute libre. En appliquant……………………………dans le référentiel terrestre, on montre que son vecteur accélération $\vec{a} = \vec{g}$.Après une chute d'une hauteur h, on établit, en appliquant ………………………………… que sa vitesse v est telle que $\overrightarrow{v^2}$ =2gh. Ces deux…………………………..qui ne s'appliquent que dans………………………………..sont très utilisés en Mécanique.

Solution

Un solide de masse m tombe d'une chute libre. En appliquant **le théorème du centre d'inertie** dans le référentiel terrestre, on montre que son vecteur accélération $\vec{a} = \vec{g}$. Après une chute d'une hauteur h, on établit, en appliquant **le théorème de l'énergie cinétique** que sa vitesse est telle que $\overrightarrow{v^2}$ =2gh. Ces deux **théorèmes** qui ne s'appliquent que dans **des référentiels galiléens** sont très utiles en Mécanique.

Exercice 2

Un solide S est lancé verticalement vers le haut. Au cours de sa montée, son vecteur accélération $\vec{a}$:

a) a le même sens que son vecteur-vitesse $\vec{v}$.
b) est opposé au vecteur –accélération de la pesanteur $\vec{g}$.
c) a le même sens que le vecteur- accélération de la pesanteur $\vec{g}$.
d) est un vecteur nul.

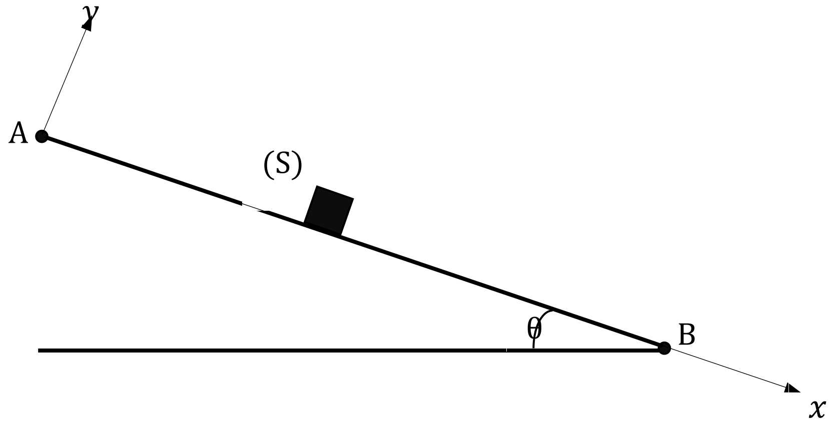
Entoure la lettre correspondant à la proposition correcte.

Solution

c)

Exercice 3

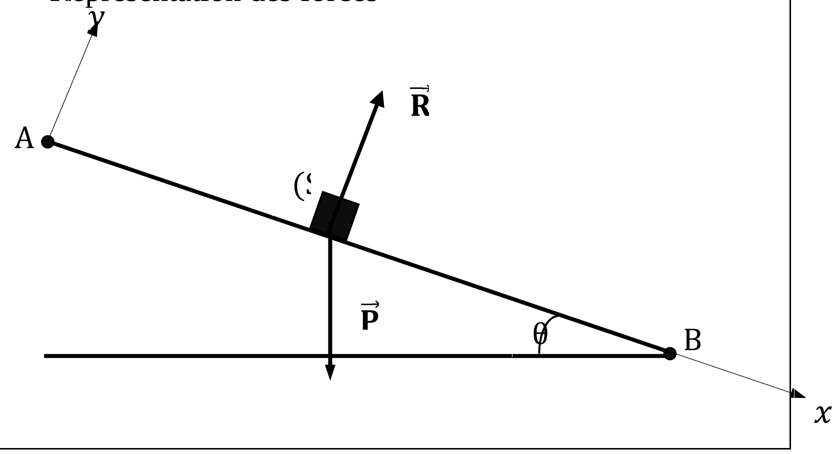
Un solide ponctuel (S) de masse m= 100 g est abandonné sans vitesse initiale, en un point A. Il glisse sur une piste rectiligne AB incliné d'un angle θ = 30° par rapport à l'horizontale (Voir figure).
On néglige les forces de frottement sur ce trajet.



On donne : g = 10 m.s^{-2}.

1. Représente les forces extérieures qui agissent sur le solide.
2. Détermine l'expression de l'accélération du solide en utilisant le théorème du centre d'inertie.
3. Calcule la valeur de cette accélération.

Solution

1. Système : le solide Référentiel d'étude : Référentiel terrestre supposé galiléen Bilan des forces : $\vec{P}$: Poids du solide $\vec{R}$: Réaction de la piste	Représentation des forces 

2. Expression de l'accélération

   Appliquons le théorème du centre d'inertie : $\vec{R}$ + $\vec{P}$ = m.$\vec{a}$

   Projection sur l'axe (A, x) : 0 + m.gsinθ = m.a_x ; d'où a_x= g.sinθ
3. Valeur de l'accélération

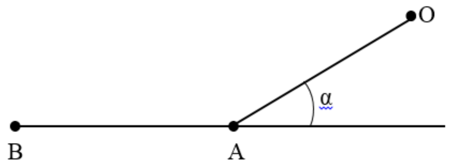
   a_x= 10×sin30° = 5 m.s^{-2}

Exercice 4

Au cours d'un voyage, tu empruntes un véhicule de transport en commun. Parvenu au sommet O d'une côte de longueur $\ell = 500\ m$ et faisant avec l'horizontale un angle α = 20°.Ce véhicule de masse m = 800 kg, tombe en panne. Le conducteur l'abandonne en cet endroit et part à la recherche d'un mécanicien pour le dépanner. Malheureusement, le frein à main du véhicule se desserre partiellement ; celui-ci descend alors et parvient au bas de la côte (au point A) avec une vitesse $v_A = 15\ m.s^{-1}$ en étant animé d'un mouvement supposé rectiligne et uniformément varié.

La valeur de la résultante $\vec{f}$ des forces de frottement qui s'exercent sur le véhicule est supposée constante tout au long du trajet OB. Cette force $\vec{f}$ est parallèle à la route rectiligne et opposée au vecteur-vitesse instantanée du véhicule.

Parvenu en A au bas de la côte, le véhicule continue son mouvement en ralentissant jusqu'au point B où il s'immobilise sous l'action des mêmes forces de frottements. (Voir figure ci-dessous)



L'intensité de la pesanteur vaut g = 9,8 m.s^{-2}.

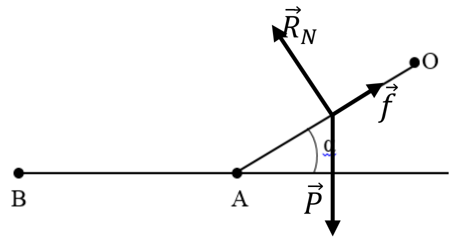
Tu racontes ta mésaventure à ton voisin de classe. Ce dernier te sollicite pour l'aider à déterminer la valeur des forces de frottement $\vec{f}$ et la distance d = AB parcourue par le véhicule sur le tronçon horizontal avant de s'arrêter au point B.

1. Précise le système étudié.
2. Représente qualitativement les forces extérieures appliquées au système étudié:
   2.1 sur le trajet OA ;
   2.2 sur le trajet AB.
3. Exprime la valeur algébrique de l'accélération $\vec{a}$ du véhicule entre O et A:

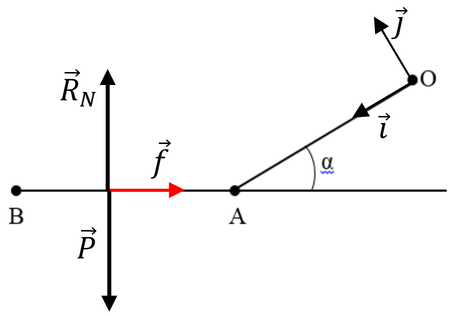
3.1 en fonction de v_A, v_0 et ℓ ;
3.2 en fonction de m, g, f et α.
4. Détermine la valeur :
4.1 numérique de l'accélération $\vec{a}$ du véhicule entre O et A ;
4.2 de l'intensité de la résultante $\vec{f}$ des forces de frottement à partir de l'expression de la valeur algébrique de l'accélération d'une part puis en appliquant le théorème de l'énergie cinétique d'autre part ;
4.3 de la distance d = AB.

Résolution

1. Le système étudié est le véhicule.
2. Représentation des forces extérieures appliquées au système :
2.1 sur le trajet OA.
Référentiel terrestre supposé galiléen

Bilan des forces extérieures	Représentation des forces extérieures
$\vec{P}$: poids du véhicule ; $\vec{R}_N$: réaction normale de la piste ; $\vec{f}$: résultante des forces de frottement.	

2.2 sur le trajet AB.

Bilan des forces extérieures	Représentation des forces extérieures
$\vec{P}$: poids du véhicule ; $\vec{R}_N$: réaction normale de la piste ; $\vec{f}$:résultante des forces de frottement.	

3. Expression de la valeur a_x de l'accélération $\vec{a}$ du véhicule :
3.1 en fonction de v_A, v_0 et ℓ :
On a un mouvement rectiligne uniformément varié, d'où :
$a_x = \frac{\Delta v^2}{2(x_A - x_O)} = \frac{v_A^2 - v_0^2}{2.l}$.
3.2 en fonction de m, g, f et α :
Appliquons le théorème du centre d'inertie : $\vec{R}_N + \vec{P} + \vec{f} = m.\vec{a}$
Projection sur (O,$\vec{i}$): 0 + m.g.sinα – f = m.a_x ; d'où a_x = g.sinα – $\frac{f}{m}$
4. Détermination de la valeur de :
4.1 l'accélération $\vec{a}$ du véhicule entre O et A : $a = a_x = \frac{15^2 - 0^2}{2 \times 500}$;

a_x = 0,225 m.s^{-2}.

4.2 la résultante $\vec{f}$ des forces de frottement :

- A partir de l'expression de a : On a : a_x= g.sinα – $\frac{f}{m}$.

On tire :f = m(gsinα – a_x)
A.N :f = 800×(9,8 ×sin20° - 0,225). f = 2 501,4 N.

- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre O et A :

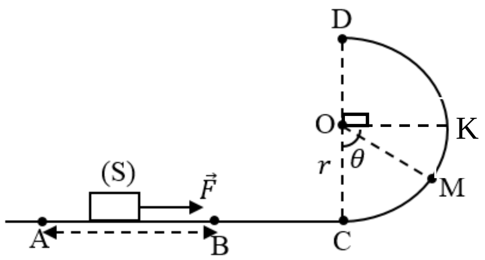
$E_{C_A} - E_{C_O} = W(\vec{f}) + W(\vec{R}_N) + W(\vec{P})$;

$\frac{m.v_A^2}{2} - 0 = -f.l + 0 + m.g.l.sin\alpha$; $f = m(g.sin\alpha - \frac{v_A^2}{2.l})$

A.N :f = 800×(9,8 × sin20° – $\frac{15^2}{2\times500}$) ; f= 2 501,4 N.

4.3 la distance l= AB :
$E_{C_B} - E_{C_A} = W(\vec{f}) + W(\vec{R}_N) + W(\vec{P})$;
0 - $\frac{m.v_A^2}{2}$ = - $f.l$ + 0 + 0 ;l = $\frac{m.v_A^2}{2.f}$
A.N :l = $\frac{800\times15^2}{2\times2501,4}$ = 36 m.

<u>Exercice</u> 5
Lors d'une séance d'exercices, ton professeur de Physique-Chimie soumet à ta classe la figure ci-dessous.
Sur cette figure, un solide de mase m = 0,5 g initialement au repos est lancé sur une piste ACD parfaitement lisse en faisant agir sur lui, le long de la partie AB une force $\vec{F}$ horizontale, de valeur constante F.
La portion CD de la piste est un demi-cercle de centre O et de rayon r = 1 m.
La résistance de l'air est négligeable.



On donne : $AB = L = 1{,}5\ m$; g $= 10\ m.s^{-2}$.
Le Professeur vous demande d'appliquer le théorème du centre d'inertie afin de déterminer la valeur minimale F_0 de F pour que le solide quitte la piste au point K.

1. Donne :
  1.1 la définition d'un référentiel galiléen ;
  1.2 l'énoncé du théorème du centre d'inertie.
2. Représente qualitativement les forces extérieures qui s'exercent sur le solide :
  2.1 entre A et B ;
  2.2 entre B et C ;
  2.3 entre C et D.
3. Etablis :
  3.1 l'expression de la vitesse v_B du solide (S) au point B en fonction de F, L et m ;
  3.2 que $v_C = v_B$;
  3.3 l'expression de la vitesse v_M du solide (S) au point M en fonction de F, L, m, g, $r$etθ ;
  3.4 l'expression de la valeur de la réaction $\vec{R}$ de la piste sur le solide au point M en fonction de F, L, m, g, $r$etθ.
4. Détermine :
  4.1 la valeur minimale F_0 de F ;
  4.2 la vitesse du solide au point K.

Solution

1.

1.1. Référentiel galiléen

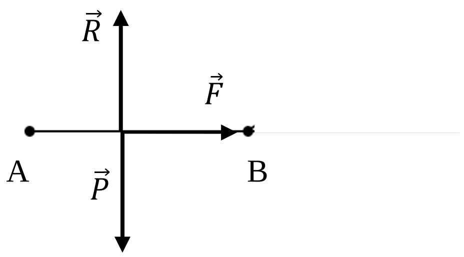
Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe de l'inertie est vérifié.

1.2. Enoncé du théorème du centre d'inertie

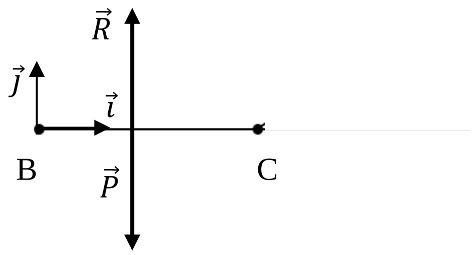
Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un système est égale au produit de la masse de ce système par le vecteur-accélération de son centre d'inertie : $\sum \vec{f}_{ext} = m.\vec{a}_G$

2. Représentation des forces extérieures appliquées au solide :

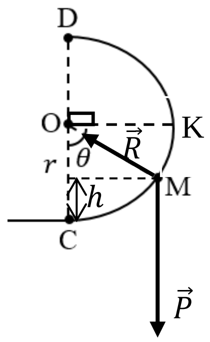
2.1. Entre A et B

Bilan des forces extérieures	Représentation des forces extérieures
$\vec{P}$: poids du solide ; $\vec{R}$: réaction de la piste ; $\vec{F}$: force motrice.	

2.2. Entre B et C :

Bilan des forces extérieures	Représentation des forces extérieures
$\vec{P}$: poids du solide ; $\vec{R}$: réaction de la piste.	

2.3 Entre C et D

Bilan des forces extérieures	Représentation des forces extérieures
$\vec{P}$: poids du solide ; $\vec{R}$: réaction de la piste.	

3.

3.1 Expression de la vitesse v_B du solide (S) au point B en fonction de F, L et m :

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre A et B dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

$\Delta E_C = \sum W(\vec{f})\,; E_{C_B} - E_{C_A} = W(\vec{F}) + W(\vec{R}) + W(\vec{P}) \Rightarrow \frac{m.v_B^2}{2} - 0 = F.L + 0 + 0 \longrightarrow v_B = \sqrt{\frac{2.F.L}{m}}$

3.2 Etablissons que $v_C = v_B$:

Appliquons le théorème du centre d'inertie :$\vec{R}$ + $\vec{P}$ + = m.$\vec{a}$

Projection sur (B, $\vec{\imath}$): 0 + 0 = m.$a_x \Rightarrow a_x$ = 0 m.s^{-2} $\longrightarrow v = constante, d'$où $v_C = v_B$

N.B : on peut aussi appliquer le théorème de l'énergie cinétique.

3.3 Expression de la vitesse v_M du solide (S) au point M en fonction de $F, L, m,$ g, r et θ :

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre C et M :

$\Delta E_C = \sum W(\vec{f})\,; E_{C_M} - E_{C_C} = W(\vec{R}) + W(\vec{P}) \Rightarrow$

$\frac{m.v_M^2}{2} - \frac{m.v_C^2}{2} = 0 - mgh\,; comme\ h = r(1 - cos\theta)etv_C = \sqrt{\frac{2.F.L}{m}}$

On tire la relation : $v_M = \sqrt{\frac{2.F.L}{m} - 2.g.r(1 - cos\theta)}$

3.4 Expression de la valeur de la réaction $\vec{R}$ de la piste sur le solide au point M en fonction de $F, L, m,$ g, r et θ.

Appliquons le théorème du centre d'inertie :$\vec{R}$ + $\vec{P}$ + = m.$\vec{a}$

Dans la base de Frenet, on a : R - P.cosθ = m.a_n = $\frac{m.v_M^2}{r}$

$\longrightarrow R = m.g.\cos\theta + \frac{m.v_M^2}{r}$; comme $v_M = \sqrt{\frac{2.F.L}{m} - 2.g.r(1 - cos\theta)}$, on tire la relation

$R = \frac{2.F.L}{r} - m.g(2 - 3.cos\theta)$.

4. Détermination de :

4.1 la valeur minimale F_0 de F:

En K on a θ = 90°

Le solide quitte la piste en K, si $R_K = 0\ N$;

$$R_K = \frac{2.F_0.L}{r} - m.g(2 - 3.cos90°) = 0 \quad \Rightarrow \frac{2.F_0.L}{r} - 2.m.g = 0 \Rightarrow F_0 = \frac{m.g.r}{L}$$

$$F_0 = \frac{0{,}5 \times 10 \times 0{,}5}{1{,}5} = 1{,}67\ N$$

4.2 la vitesse du solide au point K.

$v_K = \sqrt{\frac{2.F_0.L}{m} - 2.g.r(1 - cos90°)} = \sqrt{\frac{2.\frac{m.g.r}{L}.L}{m} - 2.g.r} = 0\ m.s^{-1} \longrightarrow v_K = 0\ m.s^{-1}$

IV. DOCUMENTATION

Qu'est-ce que le centre d'inertie ?

Le **centre d'inertie** d'un objet, ou **centre de masse**, est le point de l'espace où l'on applique les effets d'inertie, c'est-à-dire le vecteur variation de quantité de mouvement.

Pour mieux comprendre cette notion, il faut se dire que par exemple, si l'on veut faire tourner l'objet autour d'un axe de direction donnée, alors l'axe pour lequel il faut fournir le moins d'effort est l'axe passant par le centre d'inertie. Si l'axe de rotation ne passe pas par le centre d'inertie, cela génère des vibrations dans le système.

Dans le cas où l'on peut considérer le champ de gravitation uniforme, le centre d'inertie est confondu avec le centre de gravité. On le note de fait G.

Pour un système de points matériels M discrets assortis de leurs masses (M_i, m_i), le centre d'inertie est le barycentre des masses.

Le centre de masse de deux points (M_1, m_1) et (M_2, m_2) se trouve sur le segment de droite ouvert] M_1 M_2 [.

Il ne faut pas confondre le **centre d'inertie** au **centre de gravité**.
En effet, le **centre de gravité** est le point où la résultante des forces de gravité s'applique sur un solide. Mais on l'assimile au centre d'inertie par une bonne approximation liée au fait que dans la plupart des cas, le champ de gravitation auquel le corps est soumis peut être considéré comme uniforme dans le corps considéré.
D'ailleurs, les systèmes que nous étudions sont représentés par un point ; le centre d'inertie.

Pour plus d'exercices de renforcement, se référer aux sites suivants :
https://ressources.unisciel.fr DAEU/physique/
https://www.camerecole.org/classes/