Terminale C

Mathématiques

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Thème : Fonctions numériques

Durée : 06 **heures** **Code :**

Leçon 12 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pendant un cours de physique-chimie dans une classe de Terminale scientifique, le professeur donne l'exercice ci-dessous à ses élèves :
« Une substance chimique se dissout dans l'eau. On admet que la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute. A l'instant t=0 (t en minutes), on place 20 grammes de cette substance dans une grande quantité d'eau.
Sachant que les dix premiers grammes se dissolvent en cinq minutes, donne une expression de la quantité non dissoute $f(t)$, en grammes, en fonction de t. »
Après un temps de recherche, les élèves n'arrivent pas à proposer une solution.
Le professeur leur demande donc de se faire aider par leur professeur de mathématiques. Ce dernier leur demande de traduire cette situation sous forme d'équation et de la résoudre.

B. CONTENU DE LA LECON

I. Notion d'équation différentielle

1. Définition
On appelle **équation différentielle**, toute équation ayant pour inconnue une fonction et dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue.

Exemple
$(E_1): -2f' + 5f = 0$; $(E_2): f'' - 25f = 2x + 1$

(E_1) et (E_2) sont des équations différentielles avec comme inconnue la fonction f.

Remarques
•Toute autre lettre désignant une fonction peut être utilisée à la place de f.
• Résoudre une équation différentielle sur un intervalle K, c'est déterminer l'ensemble des fonctions définies sur K qui sont solutions de cette équation différentielle.

N.B.
Dans la suite du cours, nous utiliserons $\boldsymbol{y}$ comme fonction inconnue dans les équations différentielles.

2. Exercices de fixation

Exercice 1
Parmi les équations suivantes, indique celles qui sont des équations différentielles.
1) $(E\ ): 2y^2 + y = 2$; 2)$(E\ ): y' + 4 = 0$; 3) $(E\ ): y^2 = 1$;

4) $(E): y'' + 2y' + y = 5$; 5) $(E): y + 3 = 0$.

SOLUTION

Les équations différentielles sont : 2) (E) : $y' + 4 = 0$ et 4) (E) : $y'' + 2y' + y = 5$.

II. Résolution de quelques équations différentielles

1. Équations du type : $\boldsymbol{y' + ay = b}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$

a) Cas où b = 0

L'équation devient : $y' + ay = 0$, $a \in \mathbb{R}$

Propriété1

Les solutions sur $\mathbb{R}$ **de l'équation différentielle**: $y' + ay = 0$, $a \in \mathbb{R}$, sont les fonctions :
$x \longmapsto ke^{-ax}$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercice de fixation

Résous sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1) $y' + 2y = 0$ 2) $7y' = 3y$

SOLUTION

1) Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions : $x \longmapsto ke^{-2x}$, $k \in \mathbb{R}$.

2) Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions : $x \longmapsto ke^{\frac{3}{7}x}$, $k \in \mathbb{R}$

b) Cas où b ≠ 0

L'équation différentielle devient : $y' + ay = b$, $a \in \mathbb{R}*$, $b \in \mathbb{R}*$

Propriété 2

Les solutions sur $\mathbb{R}$ **de l'équation différentielle**: $y' + ay = b, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}^*$, sont les fonctions :
$x \longmapsto ke^{-ax} + \frac{b}{a}$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercice de fixation

Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y' + 2y = 6$.

SOLUTION

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions : $x \longmapsto ke^{-2x} + 3$, $k \in \mathbb{R}$
car a=2 et b =6.

Propriété 3 (Solution vérifiant une condition initiale)

Pour tout couple (x_0 ;y_0) de nombres réels, l'équation différentielle : $y' + ay = \mathrm{b}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur y_0 en x_0 (c'est-à-dire telle que : $y(x_0) = y_0$)

Exercice de fixation

On donne l'équation différentielle (E): $y' - 3y = 7$.
Détermine la solution f de (E) qui vérifie : $f(0) = 1$.

Solution

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions : $x \longmapsto ce^{3x} - \frac{7}{3}$, $c \in \mathbb{R}$.

f étant une solution de (E), $f(x) = ce^{3x} - \frac{7}{3}$, $c \in \mathbb{R}$.

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow ce^{3\times 0} - \frac{7}{3} = 1 \Leftrightarrow c - \frac{7}{3} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{10}{3}$$

Donc la solution f de (E)qui vérifie : $f(0) = 1$est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \frac{10}{3}e^{3x} - \frac{7}{3}$

c) cas où $a = 0$

l'équation devient : $y' = b$. Ses solutions sont les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto b$,

qui sont les fonctions $x \longmapsto bx + c, c \in \mathbb{R}$

2. Équations du type : $y'' + my = 0$, $m \in \mathbb{R}$

a) Cas où $m = 0$

L'équation devient :$y'' = 0$.

Propriété

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $\boldsymbol{y'' = 0}$ sont les fonctions :
$x \longmapsto ax + b$, $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

b) Cas où $m < 0$

On pose : $m = -\omega^2$,$\omega \in \mathbb{R}^*$.
L'équation devient $y'' - \omega^2\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, $\omega \in \mathbb{R}^*$.

Propriété

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $\boldsymbol{y'' - \omega^2 y = 0}$, $\omega \in \mathbb{R}^*$ sont les fonctions :
$x \longmapsto ae^{-\omega x} + be^{\omega x}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Exercice de fixation

Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :$y'' - 4y = 0$.

SOLUTION

$y'' - 4y = 0$ d'où $\omega^2 = 4 \Leftrightarrow \omega = 2$ ou $\omega = -2$
Donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sont les fonctions : $x \longmapsto ae^{-2x} + be^{2x}$,$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

c) Cas où $m > 0$

On pose :$m = \omega^2$, $\omega \in \mathbb{R}^*$.
L'équation devient : $\boldsymbol{y'' + \omega^2 y = 0}$, $\omega \in \mathbb{R}^*$.

Propriété

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $\boldsymbol{y'' + \omega^2 y = 0}$, $\omega \in \mathbb{R}^*$ sont les fonctions :
$x \longmapsto a\cos(\omega x) + b\,sin(\omega x)$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Exercice de fixation

Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :$y'' + 4y = 0$.

Solution

$y'' + 4y = 0 \Leftrightarrow y'' + 2^2y = 0$ $avec$ $\omega^2 = 2^2. \Leftrightarrow \omega = 2$ ou $\omega = -2$
Donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sont les fonctions : $x \longmapsto a\,cos2x + b\,sin\,2x$,$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Propriété (Solution vérifiant des conditions initiales)

Pour tout triplet (x_0 ; y_0 ; z_0) de nombres réels, l'équation différentielle : $y'' + my = 0$, $m \in \mathbb{R}$, admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ telle que : $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$.

Exercice de fixation
1. Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' + 25y = 0$.
2. Détermine la solution f de (E) qui vérifie : $f(0) = 1$ et $f'\left(\frac{\pi}{5}\right) = -2$.
SOLUTION

1. $y'' + 25y = 0 \Leftrightarrow y'' + 5^2 y = 0$.
Donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions:
$x \longmapsto a\cos(5x) + b\sin(5x)$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
2. f étant une solution de (E), $f(x) = a\cos(5x) + b\sin(5x)$ et $f'(x) = -5\,a\sin(5x) + 5b\cos(5x)$.

•$f(0) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{a}\cos(0) + b\sin(0) = 1 \Leftrightarrow a = 1$
•$f'\left(\frac{\pi}{5}\right) = -2 \Leftrightarrow -5\mathrm{a}\sin(\pi) + 5b\cos(\pi) = -2 \Leftrightarrow -5b = -2 \Leftrightarrow b = \frac{2}{5}$
D'où la solution f de (E) *est définie par* : $f(x) = \cos(5x) + \frac{2}{5}\sin(5x)$.

3. Tableau récapitulatif

Types d'équations différentielles	Fonctions solutions
$y' + ay = 0\,, a \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto ke^{-ax}, k \in \mathbb{R}$
$y' + ay = \mathrm{b}\,, a \in \mathbb{R}^*\,, b \in \mathbb{R}^*$	$x \longmapsto ke^{-ax} + \frac{b}{a}, k \in \mathbb{R}$
$y'' = 0$	$x \longmapsto ax + b\,,\ a \in \mathbb{R}\,, b \in \mathbb{R}$
$y'' - \omega^2 y = 0\ ,\omega \in \mathbb{R}^*$	$x \longmapsto ae^{-\omega x} + be^{\omega x}\,,\ a \in \mathbb{R}\,, b \in \mathbb{R}$
$y'' + \omega^2 y = 0\ ,\omega \in \mathbb{R}^*$	$x \longmapsto a\cos\omega x + b\sin\omega x\,,\ a \in \mathbb{R}\,, b \in \mathbb{R}$

C- SITUATION COMPLEXE

Lors d'une campagne innovante du Fonds des Nations Unies pour la population intitulée « 7 Milliards d'Actions », qui mettait l'accent sur les défis, les possibilités et les actions nécessaires à notre avenir commun sur la Terre, les élèves de la promotion terminale d'un lycée ont appris que :
- plus de la moitié de la croissance démographique dans le monde d'ici à 2050 aura lieu en Afrique ;
- la population d'Afrique subsaharienne, par exemple, devrait doubler d'ici à 2050 ;
- selon les projections, la population mondiale devrait augmenter de 2 milliards de personnes au cours des trente prochaines années, passant de 7,7 milliards actuellement à 9,7 milliards en 2050 ;
- la population d'un pays était de 4, 75 millions d'habitants en 1990 et de 5,5 millions d'habitants en 1995.

Etonnés du boum démographique de ce pays, ces élèves veulent déterminer l'année où la population de ce pays atteindra 20 millions d'habitants, si on suppose que la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle au nombre d'habitants. Ils désignent par $f(t)$ le nombre de millions d'habitants à l'instant t.
Ayant entendu ces informations, tu veux tester tes connaissances et aussi les aider.
Réponds, dans ces conditions, à la préoccupation de ces élèves.

SOLUTION
- **Pour répondre à la préoccupation de ces élèves, je vais utiliser les équations différentielles ;**
- **Je vais déterminer l'année où la population atteindra les 20 MIILLIONS.**
  <u>**Modélisation**</u>

•Détermination de l'équation différentielle :

L'hypothèse la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle au nombre d'habitants se traduit par : f'(t)= a f(t) où a $\neq 0$
Ainsi, il est question de trouver une f, dérivable sur [0 ; +∞[telle que pour tout t ≥ 0 ;
f'(t)= a f(t) et f(0) =4,75 ; on prend t=0 pour l'année 1990 comme année d'origine

•Résolution de l'équation $y' = ay$.

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions f définies sur [0 ; +∞[par : $x \longmapsto k e^{at}$, k∈ ℝ :

Comme f(0)= 4,75 alors ke^0= 4,75 d'où k= 4,75 ainsi f(t) = 4,75 e^{at}

D'autre part de 1990 à 1995, on a t = 5 alors f(5)=5,5 ; ce qui donne 4,75 e^{5a}= 5,5 donc a = $\frac{ln\frac{22}{19}}{5}$

Par conséquent, f(t)= 4,75 $e^{\frac{ln\frac{22}{19}}{5}t}$

Pour f(t)= 20 on a : 4,75 $e^{\frac{ln\frac{22}{19}}{5}t}$ = 20 d'où t =$\frac{5ln\frac{80}{19}}{ln\frac{22}{19}}$ ~= 48 donc ce pays atteindra 20 millions d'habitants en 1990+48 = 2038.
Conclusion :

D. Exercices

Exercices de fixation

Exercice 1

Parmi les équations suivantes, indique celles qui sont des équations différentielles :
(E) : y² +y =2 ; (F) : y'-ln2y = 3 ; (G) : y'' –y' =3x² ; (H) : y = 3x
Solution
Les équations (F) et (G) sont des équations différentielles

Exercice 2

Pour chacune des équations différentielles suivantes, détermine la solution vérifiant la condition donnée :

a. $y' = -2y$, $f(0) = 1$.
b. $y' - (ln2)y = 0$, $f(2) = \frac{1}{2}$.

Solution

a. Les solutions sont les fonctions f définies sur ℝ par f(x)= k e^{-2x} , k ϵℝ
Comme f(0)= 1 alors on a : k e^0= 1 ⟺k = 1, donc la solution f qui vérifie f(0)=1 est la fonction f définie sur ℝ par : f(x) = e^{-2x}
b. Les solutions sont les fonctions f définies sur ℝ par f(x)= k e^{xln2} , k ϵℝ

Comme f(2)= $\frac{1}{2}$ alors on a : k e^{2ln2} = $\frac{1}{2}$ ⟺ ke^{ln4} = $\frac{1}{2}$ ⟺ 4k = $\frac{1}{2}$ ⟺ k = $\frac{1}{8}$, donc les la fonction f qui vérifie f(2)= $\frac{1}{2}$ est la fonction f définie sur ℝ par f(x)= $\frac{1}{8}$ e^{xln2}

Exercices de renforcement

Exercice 3

Soit θ la température d'un corps à l'instant *t*. La température ambiante est 30°C.

A chaque instant$t$, on pose : $x(t) = \theta(t) - 30$. On suppose que la fonction x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $x' = -k^2x$ ($k \in \mathbb{R}^*$). A l'instant$t = 0$, la température de ce corps est 70°C et au bout de 5 minutes, elle n'est plus que de 60°C.
1) Détermine$\theta(t)$, où t est mesuré en minutes.
2) Détermine la température de ce corps au bout de 20 minutes.

Solution

1) On a : θ(t)= x(t) +30 ; or x'(t) = -k²x d'où x(t) = c e^{-k^2t} , c$\epsilon\mathbb{R}$ par suite $\theta(t) = c\ e^{-k^2t}$+30
   Comme θ(0)= 70 alors c= 70-30=40 et θ(5)= 60 alors –k² = $\frac{1}{5}$ln$\frac{3}{4}$ donc $\theta(t) = 40e^{\frac{1}{5}ln\frac{3}{4}t}$+30.
2) Pour t= 20, on a : θ(20)= 42,66° , donc la température de ce corps au bout de 20mn est 42,66°.

Exercice 4

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle$(E) :\ y' + 2y = e^{-2x}$.
1. Vérifie que la fonction g telle que $g(x) = (x + 1)e^{-2x}$ est une solution de(E).
2. Démontre qu'une fonction $h + g$ est solution de (E)si et seulement si la fonction h est solution de l'équation différentielle(E'): $y' + 2y = 0$.
3. Détermine les solutions sur $\mathbb{R}$de l'équation différentielle(E').
4. a) Déduis des questions précédentes, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle(E).
   b) Détermine la solution f de(E) vérifiant la condition$f(0) = -2$.

Solution

1. On a : g'(x)+2g(x) = (-2x-1)e^{-2x}+2(x+1)e^{-2x}= e^{-2x} donc g est une solution de (E).
2. On a : h+g solution de (E) $\Leftrightarrow$ (h+g)' +2(h+g) = e^{-2x}
   $\Leftrightarrow$h' +2h =0 car g'+2g = e^{-2x}
   Par suite, h est solution de l'équation différentielle (E') : y'+2y=0
3. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions h définies sur $\mathbb{R}$ par h(x)= ke^{-2x}, k$\epsilon\mathbb{R}$
4. a) Ainsi les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$
   Par f(x)= ke^{-2x}+(x+1) e^{-2x} = (k+x+1) e^{-2x}
   b) On a: f (0) = 1 $\Leftrightarrow$ (k+1) e^0= 1 $\Leftrightarrow$k=0 donc f(x) = (x+1) e^{-2x}

Exercice d'approfondissement

Exercice 4

On considère l'équation différentielle$(E) :\ y' + 3y = 2e^{-x}$.
1. Détermine le nombre réel m pour que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = me^{-x}$ soit solution de(E).
2. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E'): $y' + 3y = 0$.
3. Démontre qu'une fonction $h - g$ est solution de (E') si et seulement si la fonction g est solution de (E).
4. Déduis des questions précédentes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle(E).

Solution

1.Déterminons le nombre réel m pour que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = me^{-x}$soit solution de $(E) :\ y' + 3y = 2e^{-x}$. $\forall\ x \in \mathbb{R}\ h(x) = me^{-x}$ et $h'(x) = -me^{-x}$
h est solution de $(E) \Leftrightarrow h'(x) + 3h(x) = 2e^{-x}$
$\Leftrightarrow -me^{-x} + 3me^{-x} \Leftrightarrow 2me^{-x} = 2e^{-x}$
$\Leftrightarrow m = 1$

Donc la fonction h définie par : $h(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}$ est solution de (E).

2. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E'): $y^{'} + 3y = 0$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E') : $y' + 3y = 0$ sont les fonctions :
$x \mapsto ke^{-3x}$, $k \in \mathbb{R}$.
3. On a : h-g solution de (E') ⟺ (h-g)' +3(h-g) =0⟺h'+3h –(g'+3g)=0 , or h+3h = $2e^{-x}$
Donc g' +3g = $2e^{-x}$; par suite g est solution de l'équation (E).

1. Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur par : x⟼ e^{-x}-ke^{-3x} ,k$\epsilon\mathbb{R}$