MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ECOLE A LA MAISON

SECONDAIRE

1ère D
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 3 heures Code :

Compétence 1 **Traiter des situations relatives aux calculs algébriques et aux fonctions**

Thème 1 **Calculs algébriques**

LEÇON 13 : SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS $\mathbb{R}^2$ ET DANS $\mathbb{R}^3$

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Trois élèves d'une classe de première D font des recherches sur les hydrocarbures. Ils découvrent le texte suivant :
« Un mélange de méthane, d'acétylène et d'oxygène est introduit dans un eudiomètre. Le mélange initial occupe un volume de 70 cm^3. Après le passage d'une étincelle, il se produit une réaction. Au retour dans les conditions normales, il reste dans l'eudiomètre 30 cm^3 de dioxyde de carbone et 10 cm^3 d'oxygène ».

Impressionnés par les résultats de cette expérience, ils veulent déterminer les volumes respectifs des gaz qui composent le mélange initial.
Pour cela, ils décident d'apprendre à résoudre des systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^3$.

B- CONTENU DE LA LEÇON

I. SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS $\mathbb{R}^2$

1) Définition

On considère un système (S) de deux équations du premier degré à deux inconnues $(x; y)$:

(S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où $a, b, c, a', b' et\ c'$ sont des nombres réels.

On appelle déterminant du système (S), le nombre réel $ab' - a'b$. On le note : $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

Exemple

Le déterminant du système(S) : $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + y = 0 \end{cases}$ est: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$= - 13

2) Propriété

On considère un système (S) de deux équations du premier degré à deux inconnues $(x; y)$:

(S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où $(a, b) \neq (0,0)\ et\ (a', b') \neq (0, 0)$.

Le système (S) admet une unique solution si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$.

Remarque

Le système (S) n'admet pas de solution ou admet une infinité de solutions si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$.

EXERCICE DE FIXATION

Pour chacun des systèmes ci-dessous, détermine le nombre de solutions.

(S_1): $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y - 5 = 0} \\ \boldsymbol{3x - y + 2 = 0} \end{cases}$; (S_2): $\begin{cases} \boldsymbol{3x + 15y + 2 = 0} \\ \boldsymbol{2x + 10y - 6 = 0} \end{cases}$.

Solution

$\det(S_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 3 \times 2 = -7 \neq 0$, donc (S_1) admet exactement un couple de solutions.

$\det(S_2) = \begin{vmatrix} 3 & 15 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 3 \times 10 - 2 \times 15 = 0$. Soit (S_2) n'admet pas de couples solutions, soit (S_2) admet une infinité de couples solutions.

3) Résolution d'un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Méthode

Un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$, peut se résoudre :

- Par le calcul à l'aide de la substitution, de la combinaison ou du déterminant.
- Graphiquement.

Exemple1 : Par le calcul à l'aide du déterminant

Résous les systèmes d'inconnue $(x; y)$ dans $\mathbb{R}^2$:

a) (S_1): $\begin{cases} \boldsymbol{3x + 15y + 2 = 0} \\ \boldsymbol{2x + 10y - 6 = 0} \end{cases}$

Le déterminant du système est : $D = \begin{vmatrix} 3 & 15 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 3 \times 10 - 2 \times 15 = 0$	le couple $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$ vérifie l'équation $3x + 15y + 2 = 0$ et ne vérifie pas l'équation

Donc le système (S_1) admet zéro solution ou plusieurs solutions.	$2x + 10y - 6 = 0$. Donc (S_1)n'admet aucun couple solution.

b) (S_2): $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y - 5 = 0} \\ \boldsymbol{3x - y + 2 = 0} \end{cases}$

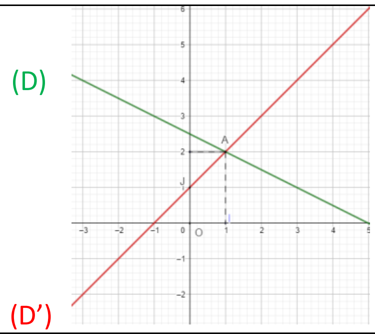
Le déterminant du système est : $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\times(-1) - 3\times 2 = -7$ Donc le système (S_2) admet une seule solution.	$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1$ donc $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$. $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -17$ donc $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-17}{-7} = \frac{17}{7}$. L'unique couple de solutions de (S_2) est $\left(\frac{1}{7}; \frac{17}{7}\right)$.

Synthèse : **Cas général**

S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où $(a, b) \neq (0,0)$ *et* $(a', b') \neq (0, 0)$. On pose $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

Lorsque le déterminant $D \neq 0$, le système admet une unique solution. On calcule $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ et $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$ puis $x = \frac{D_x}{D}$ et $y = \frac{D_y}{D}$.

Exemple 2 : Graphiquement, résous le système (S): $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y - 5 = 0} \\ \boldsymbol{x - y + 1 = 0} \end{cases}$.

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on trace les droites (D) et (D') d'équations respectives $x + 2y - 5 = 0$ et $x - y + 1 = 0$ puis on lit les coordonnées du point d'intersection des droites. (D) et (D') sont sécantes en A et A(1 ; 2) . La solution du système est (1 ; 2).	

II. SYSTEMES DE TROIS EQUATIONS LINEAIRES DANS $\mathbb{R}^3$

1) Définitions

- On appelle système linéaire de trois équations du premier degré à trois inconnues $(x; y; z)$, un système du type : $\begin{cases} ax + by + cz = m \\ a'x + b'y + c'z = m' \\ a''x + b''y + c''z = m'' \end{cases}$ où $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', m, m'$ *et* m''sont des nombres réels.

- Un système triangulaire d'équations dans $\mathbb{R}^3$ est un système du type : $\begin{cases} ax + by + cz = m \\ b'y + c'z = m' \\ c''z = m'' \end{cases}$

  où a, b, c, b', c', c'', m, m' *et* m''sont des nombres réels.

Exemples

:(Σ_1) $\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$ $\qquad (S)$ $\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2y + 4z = 0 \\ 3z = 6 \end{cases}$

2) Résolution d'un système de trois équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$

Méthode

Pour résoudre un système de trois équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- Par substitution ;
- Par la méthode du Pivot de Gauss.

a) Par substitution

Exemple

Résous le système suivant par la méthode de substitution :$(\sum_1)\begin{cases} x-2y-3z=-9 \\ 2x+5y-3z=0 \\ x+y+2z=9 \end{cases}$

$$\begin{cases} x-2y-3z=-9 \\ 2x+5y-3z=0 \\ x+y+2z=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+3z-9 \\ 2(2y+3z-9)+5y-3z=0 \\ 2y+3z-9+y+2z=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+3z-9 \\ 9y+3z=18 \\ 3y+5z=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2y+3z-9 \\ 3y+z=6 \\ 3y+5z=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+3z-9 \\ z=6-3y \\ 3y+5(6-3y)=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+3z-9 \\ z=6-3y \\ -12y=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ z=3 \\ x=2 \end{cases}$$

Donc : $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(2;1;3)\}$

b) Par la méthode du pivot de Gauss

Exemple

Résous le système suivant par la méthode de pivot de Gauss : $(\sum_2)\begin{cases} x-5y-7z=3 \\ 5x+3y+z=3 \\ 3x+y-2z=-1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x-5y-7z=3 \; (L_1) \\ 5x+3y+z=3 \; (L_2) \\ 3x+y-2z=-1 \; (L_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5y-7z=3 & (L_1) \\ 0+28y+36z=-12 & (L'_2)=(L_2)-5(L_1) \\ 0+16y+19z=-10 & (L'_3)=(L_3)-3(L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5y-7z=3 & (L_1) \\ 14y+18z=-6 & (L'_2) \\ 16y+19z=-10 & (L'_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5y-7z=3 & (L_1) \\ 14y+18z=-6 & (L'_2) \\ 0-22z=-44 & (L''_3)=14(L'_3)-16(L'_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=2 \\ y=-3 \\ x=2 \end{cases}$$

Donc : $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(2;-3;2)\}$

C- SITUATION COMPLEXE

On propose un jeu à trois groupes d'élèves d'une classe de première D.
A ce jeu, les groupes peuvent solliciter une personne ressource. Le problème posé est le suivant : « un fermier élève des canards, des lapins et des dromadaires. Il compte le nombre de pattes de ses canards, de ses lapins et de bosses de ses dromadaires. Il trouve 130. Il compte le nombre de têtes de ceux-ci, et il trouve 46. Il compte ensuite le nombre d'oreilles des lapins et des dromadaires et trouve 38. Enfin, le fermier affirme avoir dénombré au moins 16 lapins et souhaite déterminer le nombre d'animaux de chaque espèce. »

Tu es la personne ressource sollicitée, A L'aide de tes connaissances mathématiques aide ce fermier.

Corrigé

Pour résoudre ce problème nous allons utiliser la leçon : systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$ pour cela nous allons :

- Traduire le problème en un système de 3 équations
- résoudre ce système et
- déterminer le nombre de canards de lapins et de dromadaire

Mise en équation : soit x le nombre de canards, y celui des lapins et z le nombre de lapins.
On a : $2x+4y+z=130$, $x+y+z=46$, $2y+2z=38$ et $y\geq 16$

Ce qui nous conduit au système suivant : $\begin{cases} 2x+4y+z=130 \\ x+y+z=46 \\ y+z=19 \\ y\geq 16 \end{cases}$

On trouve $x=27,\quad y=19,\quad z=0$

Donc ce fermier a 27 canards, 19 lapins et 0 dromadaire.

D- EXERCICES

Exercice 1

Calcule le déterminant de chacun des systèmes suivants, puis indique le nombre de solutions du système.

$(S_1)\begin{cases} 2x+3y=2 \\ x+2y=-3 \end{cases}$; $(S_2)\begin{cases} 3x-y=1 \\ 6x-2y=-1 \end{cases}$; $(S_3)\begin{cases} \sqrt{2}x-2y=\sqrt{2} \\ 2x-2\sqrt{2}y=-2 \end{cases}$

Corrigé

- $\det(S_1)=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\times 2-1\times 3=4-3=1$ (S_1) a une solution unique.
- $\det(S_2)=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}=3\times(-2)-6\times(-1)=-6+6=0$ (S_2) n'a pas de solution car (1 ;-2) est solution de la première équation mais pas solution de la deuxième équation.

- $\det(S_3) = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -2 \\ 2 & -2\sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2} \times (-2\sqrt{2}) - 2 \times (-2) = -4 + 4 = 0$ **(S_3)** n'a pas de solution car (1 ;0) est solution de la première équation mais pas solution de la deuxième équation

<u>Exercice 2</u>

Résous dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes ci-dessous en utilisant :

1) La méthode de substitution ;
2) La méthode de combinaison.

$(S_1)\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$; $(S_2)\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 5x - 2y = -1 \end{cases}$; $(S_3)\begin{cases} -\sqrt{2}x + y = \sqrt{3} \\ 2x - \sqrt{2}y = -\sqrt{6} \end{cases}$;

<u>Corrigé</u>

1) $(S_1)\begin{cases} 2x + 3y = 2 & (L_1) \\ x + 2y = -3 & (L_2) \end{cases}$

Résolution par substitution :

De (L_2) on a $x = -3 - 2y$ (L'_2). On remplace x par -3-2y dans (L_1) on obtient $2(-3-2y) + 3y = 2$ soit $y = -8$ on calcule x en remplaçant y par -8 dans (L'_2) on trouve x=13.

<u>La solution du système est le couple :</u> $(13;-8)$

Résolution par combinaison :

$(L'_2) = (L_1) - 2(L_2) : 3y - 4y = 2 + 6$

$y = -8$

On remplace y par -8 dans (L_1) ; on trouve $x = 13$.

<u>La solution du système est le couple :</u> $(13;-8)$

$(S_2)\begin{cases} 3x - y = 1 & (L_1) \\ 5x - 2y = -1 & (L_2) \end{cases}$

Résolution par substitution

$$(S_2)\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 5x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ 5x - 2(3x - 1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ 5x - 2(3x - 1) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 \\ x = 3 \end{cases}$$

<u>La solution du système est le couple :</u> (3 ,8)

Résolution par combinaison :

$(L_3) = -2L_1 + L_2 \Leftrightarrow x = 3$

On remplace x par 3 dans (L_1) ; on trouve$y = 8$.

<u>La solution du système est le couple</u> (3 ,8)

$(S_3)\begin{cases} -\sqrt{2}x + y = \sqrt{3} \\ 2x - \sqrt{2}y = -\sqrt{6} \end{cases}$

Det(S_3) $= 0$ et le couple (0,$\sqrt{3}$) est solution de des deux équations donc (S_3) a une infinité de solution

Exercice 3

3) Résous dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes a) b) c) ci-dessous en utilisant La méthode de substitution et d) e) et f) par la méthode du Pivot de Gauss ;

.

$a)\begin{cases} x+2y+z=8 \\ -3y-2z=-12 \\ -22z=-66 \end{cases}$; $b)\begin{cases} 2x+y-4z=4 \\ 3x+2y=-5 \\ 5x+8y=1 \end{cases}$; $c)\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=1 \\ x+z=-8 \end{cases}$

$d)\begin{cases} x-5y-7z=3 \\ 5x+3y+z=3 \\ 3x+y-2z=-1 \end{cases}$; $e)\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 2x+3y-z=6 \\ -x+2y+2z=-1 \end{cases}$; $f)\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x-2y+7z=1 \\ -2x+y+z=1 \end{cases}$

Corrigé

$a)\begin{cases} x+2y+z=8 \\ -3y-2z=-12 \\ -22z=-66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-z+8 \\ -3y=2z-12 \\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y+5 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$ Donc : $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\{(1;2;3)\}$

$b)\begin{cases} 2x+y-4z=4 \\ 3x+2y=-5 \\ 5x+8y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{1}{4}(2x+y-4) \\ y=\frac{1}{2}(-3x-5) \\ 5x+4(-3x-5)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{1}{4}(2x+y-4) \\ y=-7 \\ x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{-11}{4} \\ y=-1 \\ x=-3 \end{cases}$

$$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\{\left(-3;-1;-\frac{11}{4}\right)\}$$

$c)\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=1 \\ x+z=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-y \\ z=1-y \\ 5-y+1-y=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-y \\ z=1-y \\ y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-6 \\ y=7 \\ x=-2 \end{cases}$

$$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\{(-2;7;-6)\}$$

$d)\begin{cases} x-5y-7z=3\ (L_1) \\ 5x+3y+z=3(L_2) \\ 3x+y-2z=-1(L_3) \end{cases}$

On élimine x dans (L_2) et (L_3) on obtient $\begin{cases} x-5y-7z=3\ (L_1) \\ -28y-36z=12\ (5L_1-L_2) \quad (L_3) \\ -16y-19z=10\ (3L_1-L_3)(L_4) \end{cases}$

On élimine y dans (L_3) et (L_4) on obtient

$$\begin{cases} x-5y-7z=3\ (L_1) \\ -7y-9z=3 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=2 \end{cases}$$

$$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\{(2;-3;2)\}$$

$$e)\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 2x+3y-z=6 \\ -x+2y+2z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y+2z=-1 (L_1) \\ 2x+3y-z=6\ (L_2) \\ 2x+y+z=1\ (L_3) \end{cases}$$

On élimine x dans (L_2) et (L_3) on obtient $\begin{cases} -x+2y+2z=-1\ \ (L_1) \\ 7y+3z=4\ \ (2L_1+\ L_2\ ) \qquad (L_4) \\ 5y+5z=-1\ \ (2L_1+L_3\ \ )\ \ (L_5) \end{cases}$

On élimine y dans (L_3) et(L_4) on obtient $\begin{cases} -x+2y+2z=1\ \ \ (L_1) \\ 7y+3z=4\ \ \ (L_4) \\ -20z=27\ (7L_5)-5(L_4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ y=\frac{23}{20} \\ z=\frac{-27}{20} \end{cases}$

$$S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\left\{\left(\frac{3}{5};\frac{23}{20};-\frac{27}{20}\right)\right\}$$

$f)\begin{cases} x+y-2z=1(L_1) \\ x-2y+7z=1(L_2) \\ -2x+y+z=1(L_3) \end{cases} \Leftrightarrow) \begin{cases} x+y-2z=1(L_1) \\ 3y-3z=0(L_1-\ L_2 \\ 3y-3z=3\ (2L_1-L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-3z=0 \\ 3y-3z=0 \end{cases}$ n'a pas de solution donc le systeme n'a pas de solution

<u>Exercice 4</u>

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Détermine une équation de la parabole dont la courbe représentative passe par les points :

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}3\\-12\end{pmatrix}$.

Corrigé

L'équation de la parabole est de la forme :$y=ax^2+bx+C$ et passe par les points $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}3\\-12\end{pmatrix}$ donc on a le système suivant :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=-5 \\ 9a+3b+c=-12 \end{cases}$$

La résolution de ce système par substitution ou par pivot de Gauss nous donne a=-1 .b=-2 et c=3

<u>Exercice 5</u>

Le plan est muni du repère (O, I, J). On donne les points :

$A(2;6)$, $B(-3;1)$, $C(7;-2)$; $D(4;0)$, $E(-4;4)$ et $F(11;-1)$.

Les droites (AB), (CD) et (EF) sont-elles concourantes ? Justifie ta réponse.

<u>Corrigé</u>

$(AB): x-y=-4;\quad (CD): 2x+3y=8;\quad (EF): x+3y=8$

$\left(-\frac{4}{5};\frac{16}{5}\right)$ est solution de $(s_1)\begin{cases} x-y=-4 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$, mais pas solution de $(s_2):\begin{cases} x-y=-4 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$ par conséquent, les droites (AB), (CD) et (EF) ne sont pas concourantes.

<u>Exercice 6</u>

Détermine un nombre de trois chiffre sachant que :

- La somme des chiffres est égale à 14 ;
- Si on permute le chiffre des dizaines et celui des centaines le nombre augmente de 180 ;
- Si on permute le chiffre des unités et celui des centaines le nombre diminue de 297.

Corrigé

Mise en équation : soit x le chiffre des unités, y celui des dizaines et z le chiffre des centaines.

- $x+y+z=14$
- $y-z=2$
- $-x+z=3$

Les chiffres de ce nombre sont solution du système suivant : $(s):\begin{cases} x+y+z=14(L_1) \\ y-z=2(L_2) \\ -x+z=3(L_3) \end{cases}$

Résolution du système :

De (L_3) on a : $z=x+3$ on remplace z par x+3 dans (L_1) et (L_2). On obtient le système suivant :

$(s_2):\begin{cases} x-y=-5(L'_1) \\ 2x+y=11(L'_2) \end{cases}$ on trouve : $x=2, \quad y=7, \quad z=5$. Le nombre cherché est 572.