MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ECOLE A LA MAISON

SECONDAIRE

1ère D
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 10 heures Code :

Compétence 3	**Traiter des situations relatives à la géométrie du plan, à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan**
Thème 1	**Géométrie du plan**

Leçon 10 : **Angles orientés et trigonométrie**

Dans cette leçon, le plan est muni d'un repère orthonormé direct$(0, I, J)$.
(C) est le cercle trigonométrique, I' et J' sont les points de (C) diamétralement opposés respectivement à I et J. (T) est la tangente à(C) en I. L'unité de mesure d'angle est le radian.

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un élève de 1ère D d'un lycée Moderne fait des recherches sur les équations et inéquations dans ℝ dans la salle multimédia de son établissement. Il découvre des équations de types :
$\cos x = a$; $\sin x = a$; $\tan x = a$ $(a \in \mathbb{R})$; $a\cos x + b\sin x + c = 0$ $(a \neq 0$ et $b \neq 0)$.
Il présente ses recherches à ces camarades de classe. Ceux-ci constatent que ces équations ne sont pas habituelles. Ils décident d'approfondir leurs connaissances sur la trigonométrie afin de résoudre ces équations.

B- RESUME DE COURS

I) ANGLES ORIENTES

1) Mesures d'un angle orienté

a) Définition

Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté et α sa mesure principale.

On appelle mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, tout nombre réel de forme α + 2kπ où $k \in \mathbb{Z}$.

On note $mes(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 2k\pi$.

Exemple

Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté de mesure principale $\frac{\pi}{3}$.

$\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3}$.

$\frac{7\pi}{3}$ et $-\frac{11\pi}{3}$ sont des mesures de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

Remarques

A tout nombre réel x correspond un unique point M de (C) ; donc un unique angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}})$ dont une mesure est x.

- Si x est une mesure d'un angle orienté, les mesures de cet angle orienté sont les nombres réels de la forme $x + 2k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$
- Toutes les mesures d'un même angle orienté ont le même point image M sur (C).

Notations

- L'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ de mesure α sera noté $\hat{\alpha}$.
- L'angle orienté nul et l'angle plat seront notés respectivement $\hat{0}$ et $\hat{\pi}$.

b) Recherche de la mesure principale d'un angle orienté

Propriété :

Soit $\hat{\alpha}$ un angle orienté de mesure α, $\alpha \in \mathbb{R}$. Il existe un unique nombre réel $x \in]-\pi ; \pi]$ tel que Mes$(\hat{\alpha}) = x$.

Méthode

Déterminer la mesure principale α d'un angle orienté dont une mesure x est connue, consiste à écrire $\alpha = x + 2k\pi$ où $-\pi < \alpha \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$.

- Cette écriture peut être immédiate.
- Sinon, on détermine tout d'abord k à l'aide des inégalités $-\pi < x + 2k\pi \leq \pi$;
- Puis l'on détermine α à l'aide de l'égalité $\alpha = x + 2k\pi$.

Exercice de fixation

Détermine la mesure principale α de l'angle orienté dont une mesure est : $-\frac{119\pi}{4}$.

Solution

α vérifie les deux conditions suivantes :

(1) $-\pi < \alpha \leq \pi$; (2) il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = -\frac{119\pi}{4} + 2k\pi$.

De (1) et (2) on déduit que :

$-\pi < -\frac{119\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$, en divisant par 2π on obtient : $-\frac{1}{2} < -\frac{119}{8} + k \leq \frac{1}{2}$;

par la suite : $\frac{115}{8} < k \leq \frac{123}{8}$; d'où : $k = 15$.

donc $\alpha = -\frac{119\pi}{4} + 15 \times 2\pi$; ce qui donne : $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2) Somme et différence de deux angles orientés

Définitions

Soient $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés de mesures respectives α et β.

- On appelle somme des angles orientés $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ et on note $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ l'angle orienté dont une mesure est α + β.
- Deux angles orientés sont opposés lorsque leur somme est l'angle orienté nul. L'opposé de $\hat{\alpha}$ est noté $-\hat{\alpha}$, il a pour mesure $-\alpha$.
- La différence des angles orienté $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$, noté $\hat{\alpha} - \hat{\beta}$ est l'angle orienté $\hat{\alpha} + \left(-\hat{\beta}\right)$ dont une mesure est α – β.

Exemple :

Soit $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés de mesures respectives $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{-2\pi}{5}$

- $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ est l'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{5}$
- $\hat{\alpha} - \hat{\beta}$ est l'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{5}$

Remarque

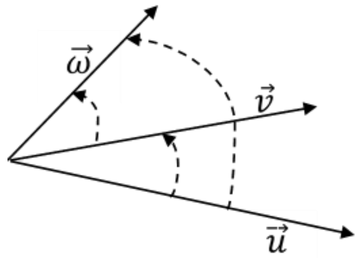
$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\beta} + \hat{\alpha}$

II) PROPRIETES DES ANGLES ORIENTES

1) Relation de Chasles

Propriété

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$: $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + (\widehat{\vec{v},\vec{w}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{w}})$.



EXERCICE DE FIXATION

A , B, C et D sont quatre points distincts. Choisis l'égalité correcte :

a) $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}}\right) + (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DC}})$

b) $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}}\right) + (\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AC}})$

c) $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AB}}\right)$

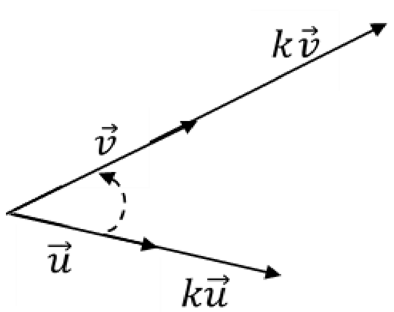
SOLUTION

L'égalité correcte est b)

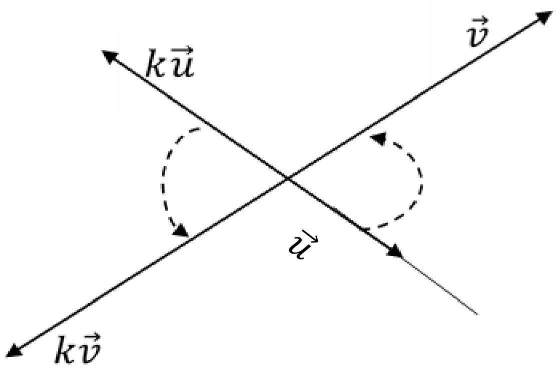
Conséquences

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et k un nombre réel non nul on a :

1) $(\widehat{\vec{v},\vec{u}}) = -(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
2) Si k > 0 alors $(\widehat{k\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
3) Si k < 0 alors $(\widehat{k\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},k\vec{v}}) = \hat{\pi} + (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
4) $(\widehat{k\vec{u},k\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}})$



$k > 0$



$k < 0$

EXERCICE DE FIXATION

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Ecris le numéro de l'égalité suivi de VRAI si l'égalité est juste ou de FAUX si l'égalité n'est pas juste.

N°	Égalités
1	$(\widehat{-2\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$
2	$(\widehat{-\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + \hat{\pi}$
3	$(\widehat{7\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, 7\vec{v}})$
4	$(\widehat{-5\vec{u}, -5\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$
5	$(\widehat{\vec{u}, 4\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + \hat{\pi}$

SOLUTION

1- FAUX ; 2- VRAI ; 3- VRAI ; 4- VRAI ; 5- FAUX

2) Double d'un angle orienté

Définition

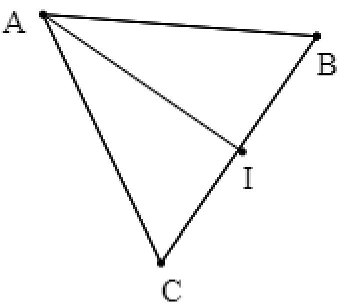
Soit $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ un angle orienté.

On appelle double de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ et on note $2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ l'angle orienté défini par : $2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

Exemple

ABC est un triangle équilatéral de sens indirect et I le milieu de $[BC]$

$2\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right)$



Remarques

- Le double d'un angle orienté de mesure α a pour mesure 2α.
- Soient $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés ; on a : $2\hat{\alpha} + 2\hat{\beta} = 2(\hat{\alpha} + \hat{\beta})$.

Propriétés

Soient $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles orientés et $\frac{\hat{\pi}}{2}$ l'angle orienté droit direct. On a :

1) $2\hat{\alpha} = \hat{0} \Leftrightarrow (\hat{\alpha} = \hat{0}$ ou $\hat{\alpha} = \hat{\pi})$
2) $2\hat{\alpha} = 2\hat{\beta} \Leftrightarrow (\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ ou $\hat{\alpha} = \hat{\beta} + \hat{\pi})$
3) $2\hat{\alpha} = \hat{\pi} \Leftrightarrow (\hat{\alpha} = \frac{\hat{\pi}}{2}$ ou $\hat{\alpha} = -\frac{\hat{\pi}}{2})$

EXERCICES DE FIXATION

A, B et C sont trois points distincts tels $2\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \hat{0}$.

Démontre que les points A, B et C sont alignés.

CORRIGÉ

$$2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=\hat{0} \Leftrightarrow \left(\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=\hat{0} \text{ ou } \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=\hat{\pi}\right)$$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires

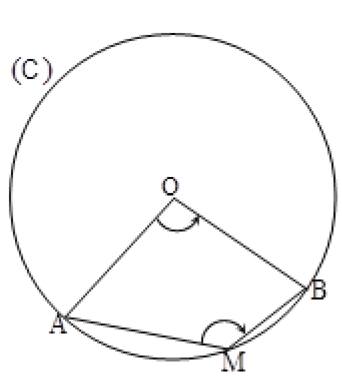
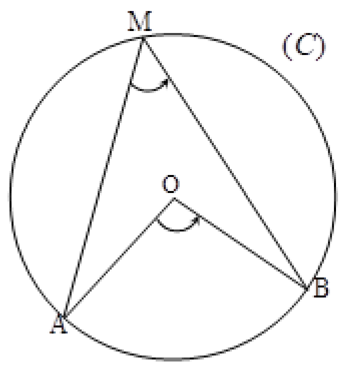
$\Leftrightarrow$ A, B et C sont alignés

3) Angles orientés et cercle

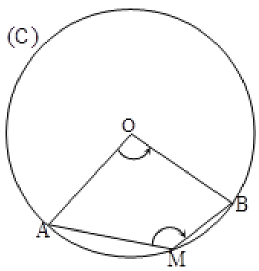
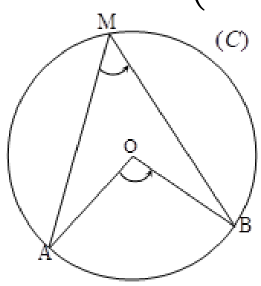
a) Angles orientés inscrits dans un cercle.

Propriété

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O ; A et B deux points distincts de ce cercle. Soit M un point de $(\mathcal{C})$ distinct de A et B

 $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})=\frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})+\hat{\pi}$	 $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})=\frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$

Exercice de fixation

1)On donne Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\frac{2\pi}{3}$.  Calcule Mes $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})$	2) On donne Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)=\frac{\pi}{4}$  Calcule Mes$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$.

Solution

1) $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})=\frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})+\hat{\pi}$ donc mes$(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})=\frac{1}{2}$ mes$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ + mes $\hat{\pi}=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}$.

Donc Mes $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})=\frac{4\pi}{3}-2\pi=-\frac{2\pi}{3}$.

2) $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})=\frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ donc mes$(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})=\frac{1}{2}$ mes$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$

$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$ mes$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ donc mes$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})=\frac{\pi}{2}$.

Par suite Mes$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})=\frac{\pi}{2}$.

b) Caractérisation d'un cercle

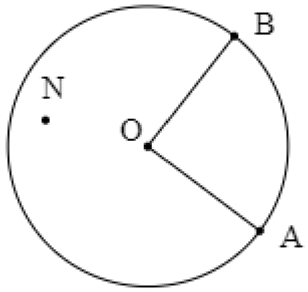
Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O ; A et B deux points distincts de ce cercle. Pour tout point M du plan distinct de A et B on a :

$$M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$$

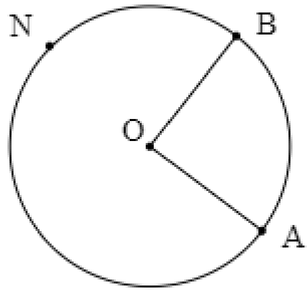
EXERCICE DE FIXATION

Observe les figures ci-dessous et indique dans quel cas on a : $2(\widehat{\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$

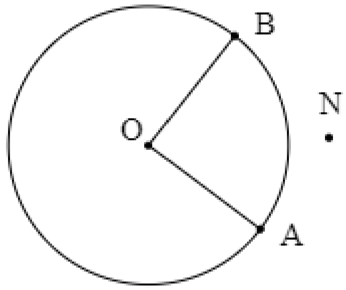
a)



b)



c)



Solution

Figure b)

c) Points cocycliques

Propriété

Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan tels que trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés.

Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $2(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}})$.

EXERCICE DE FIXATION

Soit ABC un triangle rectangle en C et D le symétrique de C par rapport à la droite (AB).

Démontre que les points A, B , C et D sont cocycliques.

Solution

Les triangles ABC et ABD sont rectangles respectivement en C et en D

On a : $2\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) = \hat{\pi}$ et $2\left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}\right) = \hat{\pi}$ donc $2\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}\right)$. Donc les points A, B, C et D sont cocycliques.

III) TRIGONOMETRIE

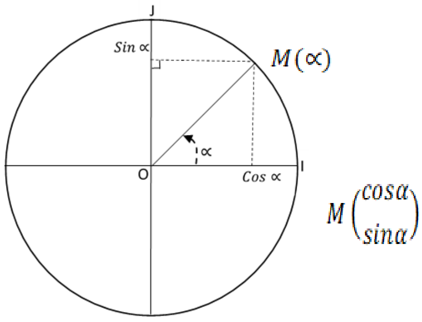
1) Lignes trigonométriques d'un angle orienté

a) Cosinus et Sinus d'un angle orienté

Définition

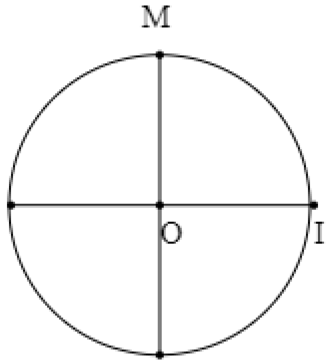
Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté de mesure α et M l'image de α sur (C).

- Le cosinus de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou de α est l'abscisse de M.
- Le sinus de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou de α est l'ordonnée de M.



Exemple

- $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $\quad M\binom{0}{1}$



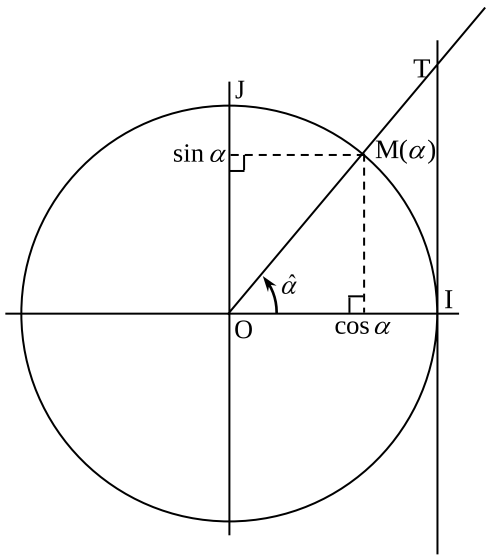
b) Tangente d'un angle orienté

Définition

Soient $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté non droit de mesure α ($\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$).

La tangente du $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou de α est le nombre réel noté tan $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ défini par :

tan $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ = tanα = $\frac{sin\alpha}{cos\alpha}$



$\tan\alpha = \overline{IT}$

Exemple

$$tan\pi = \frac{sin\pi}{cos\pi} = \frac{0}{-1} = 0$$

Remarques

- cosα, sinα et tanα sont appelés lignes trigonométriques de l'angle orienté de mesure α
  Le tableau ci-dessous indique les lignes trigonométriques des angles remarquables

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0

- tan n'est pas définie pour les nombres réels α de la forme : $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

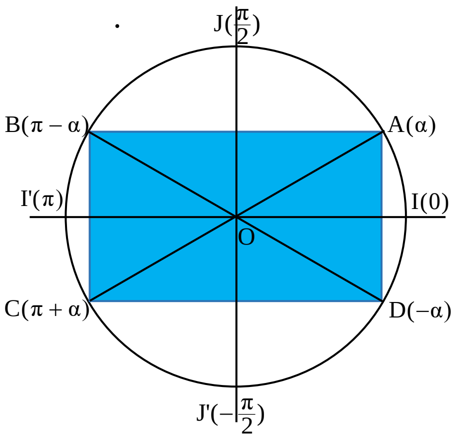
c) Lignes trigonométriques d'angles associés

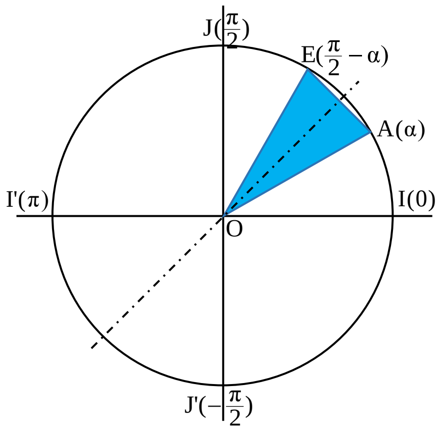
Soit $\hat{\alpha}$ un angle orienté de mesure α.
Les angles orientés de mesures $-\alpha$, $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} + \alpha$ sont dit associés à $\hat{\alpha}$

Propriété

Pour tout nombre réel α on a :

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$ $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$ $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$ $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$





EXERCICE DE FIXATION

Détermine $cos\alpha$ et $sin\alpha$ dans chacun des cas suivants :

1) $\alpha = \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$

2) $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

3) $\alpha = \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \pi$

4) $\alpha = \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

Solution

1) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

2) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$; $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

Remarque

Les tangentes des angles associés, non droits, se déduisent des formules précédentes.

Exemple : Pour $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

$\tan(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} = \frac{sin\alpha}{-cos\alpha} = -tan\alpha$

$\tan(\pi + \alpha) = \frac{\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)} = \frac{-sin\alpha}{-cos\alpha} = tan\alpha$

$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-sin\alpha}{cos\alpha} = -tan\alpha$

2) Formules trigonométriques

a) Formules d'addition

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b, on a :

1) cos (a + b) = cos a cos b − sin a sin b
2) sin (a + b) = sin a cos b +cos a sin b
3) cos (a − b) = cos a cos b + sin a sin b
4) sin (a − b) = sin a cos b − cos a sin b

EXERCICE DE FIXATION

En remarquant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$, détermine $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Solution

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = cos\frac{\pi}{4}\ cos\frac{\pi}{3} - sin\frac{\pi}{4}\ sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = sin\frac{\pi}{4}\ cos\frac{\pi}{3} + cos\frac{\pi}{4}\ sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

b) Formules de duplication et de linéarisation

Propriété

Pour tout nombre réel a, on a :

Formules de duplication	**Formules de linéarisation**
$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$ $\sin 2a = 2\sin a \cos a$.	$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$. $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

EXERCICE DE FIXATION

Pour chacune des propositions suivantes, trois réponses sont proposées ; une seule est exacte.
Ecris le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

		Réponses		
N°	Affirmation	A	B	C
1	$\cos^2 a - \sin^2 a$ est égale à	1	$\cos 2a$	$\sin 2a$
2	$\sin 2a$ est égale à	$2\sin a$	$1 - 2\sin^2 a$	$2\cos a \sin a$
3	$2\sin^2 a$ est égale à	$1 - \cos 2a$	$1 + \cos 2a$	$4\sin a$
4	$1 + \cos 2a$ est égale à	$2\cos^2 a$	$1 - 2\sin^2 a$	$1 - 2\cos^2 a$

CORRIGÉ

1-B ; 2-C ; 3-A ; 4-A

3) Fonctions circulaires

a) Fonctions cosinus ; fonctions sinus

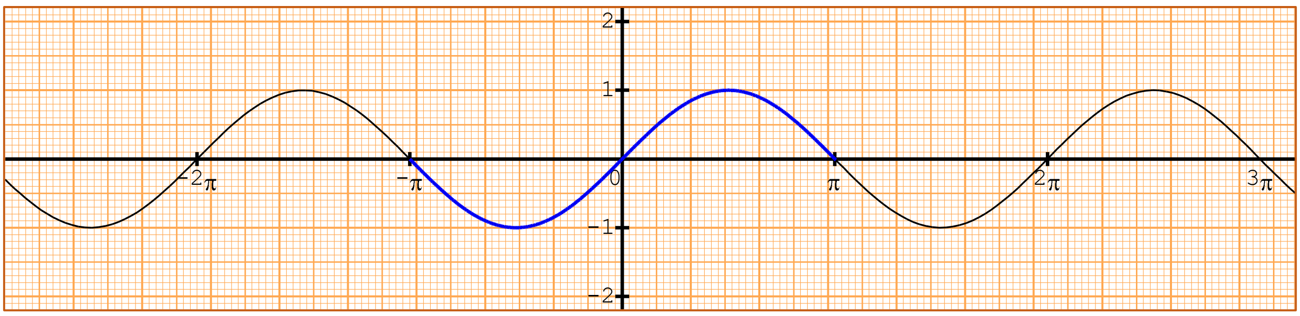
Définitions

- On appelle fonction sinus, la fonction notée sin : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto \sin x$
- On appelle fonction cosinus, la fonction notée cos : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto \cos x$

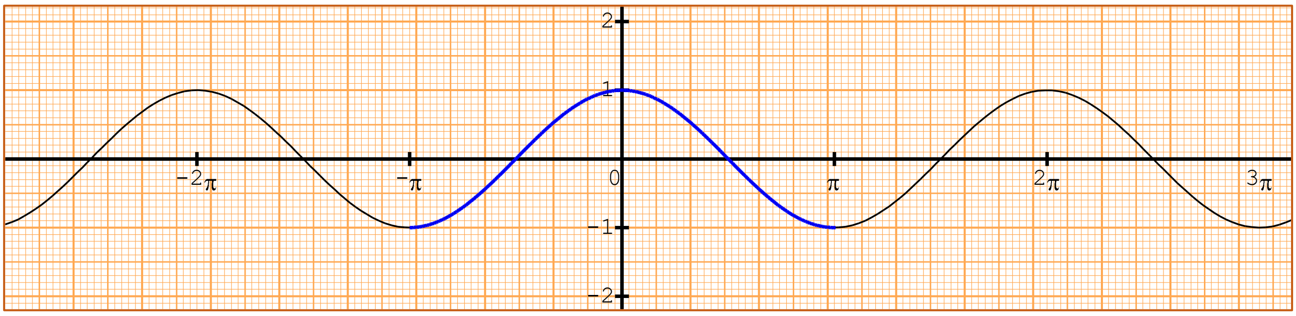
b) Représentations graphiques des fonctions cosinus et sinus

Pour construire les courbes représentatives des fonctions : $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \cos x$, on construit les courbes sur $]-\pi, \pi]$ puis on complète en utilisant les translations de vecteurs $2\pi\overrightarrow{OI}$ et $-2\pi\overrightarrow{OI}$.

Représentation graphique de la fonction sin



Représentation graphique de la fonction cos



b) Fonction tangente

La fonction tangente notée tan est la fonction : tan : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto tanx$$

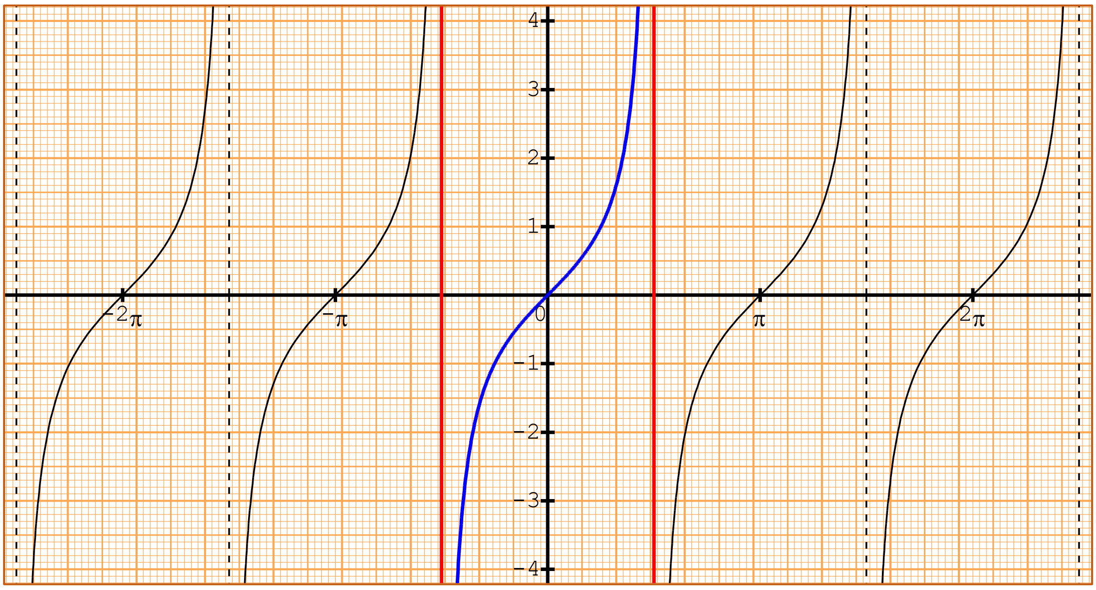
L'ensemble de définition de la fonction tan est $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Cette fonction est continue en tout élément de son ensemble de définition

On construit sa courbe représentative sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ puis on complète en utilisant les translations de vecteur $\pi \times \overrightarrow{OI}$ et $-\pi \times \overrightarrow{OI}$.

<u>Exemple</u>

Représentation graphique de la fonction tangente dans le plan muni d'un repère orthonormé



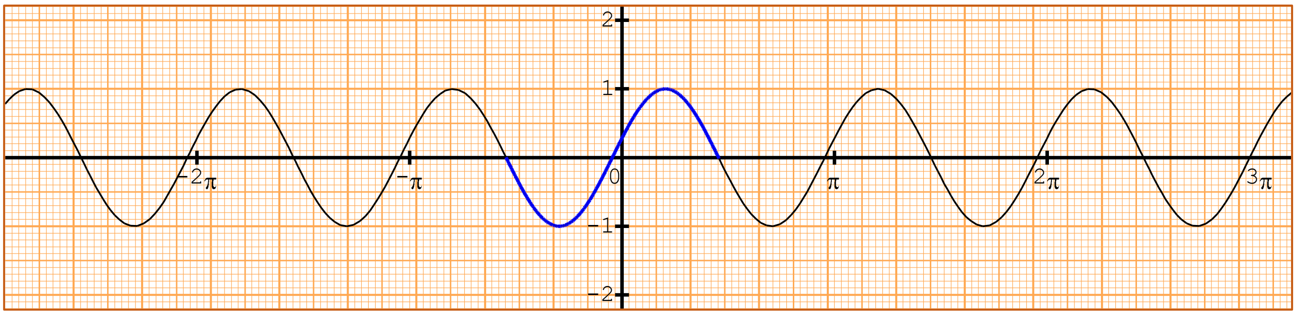
EXERCICE DE FIXATION

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Représente graphiquement la fonction :

$f: x \mapsto \cos(2x + 5)$

CORRIGÉ

Représentation graphique de la fonction $x \mapsto \cos(2x + 5)$



IV) EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

1) Equations du type : $\boldsymbol{cos\ x = cos\ a}$; $\boldsymbol{sin\ x = sin\ a}$ et $\boldsymbol{tan\ x = tan\ a}$

Propriétés

Pour tous nombres réels x et a, on a :

- cos x = cos a ⇔ $\begin{cases} x = \ a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \qquad ou \\ x = -a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

- sin x = sin a ⇔ $\begin{cases} x = a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \qquad ou \\ x = \pi - a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

- tan x = tan a ⇔ x = a + kπ, ∈ ℤ **,** pour x et a différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE DE FIXATION

Résous dans ℝ chacune des équations :

a) $cosx = \frac{1}{2}$.

b) $sinx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $tanx = 1$

SOLUTION

a) On a : $\boldsymbol{cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}}$.

$$cosx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ cosx = cos\frac{\pi}{3}$$

$$cosx = cos\frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \qquad ou \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les solutions sont les nombres réels x de forme : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$S_{\boldsymbol{R}} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) On a : $\boldsymbol{\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$sinx = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = \pi + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les solutions sont les nombres réels x de forme : $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) On a : $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Les solutions sont les nombres réels x de la forme : $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

<u>Remarques</u> : cas particuliers d'équations trigonométriques

1) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

2) $sx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

3) $sx = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

4) $sinx = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

5) $sinx = 0 \Leftrightarrow x = k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

6) $sinx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

2) Equations du type : $a\cos x + b\sin x + c = 0$

Méthode

Pour réduire l'expression : $a\cos x + b\sin x$, on peut procéder de la façon suivante :

- On écrit : $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$
- On détermine un nombre réel α tel que :

$$\begin{cases} cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

- On écrit ensuite : $acos\,x + bsin\,x = \sqrt{a^2+b^2}\,(cos\alpha\ cosx + sin\alpha\ sinx)$
- Donc : $acos\,x + bsin\,x = \sqrt{a^2+b^2}cos(x-\alpha)$
- On résout l'équation : $cos(x-\alpha) = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

EXERCICE DE FIXATION

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\sqrt{3}cox + sinx = \sqrt{2}$

Solution

$$\sqrt{3}cosx + sinx = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2}}cosx + \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2}}sinx\right) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}cosx + \frac{1}{2}sinx\right) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}cosx + \frac{1}{2}sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow cos\frac{\pi}{6}cosx + sin\frac{\pi}{6}sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \quad ou \\ x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \quad ou \\ x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme $x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou

$x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

V) INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

Les résolutions d'inéquations trigonométriques seront traitées sous forme d'exercices.

EXERCICE DE FIXATION

a) Résous dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation (I_1) : sin x $> -\frac{1}{2}$.

b) Résous dans $[0,2\pi]$, l'inéquation (I_2) : $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

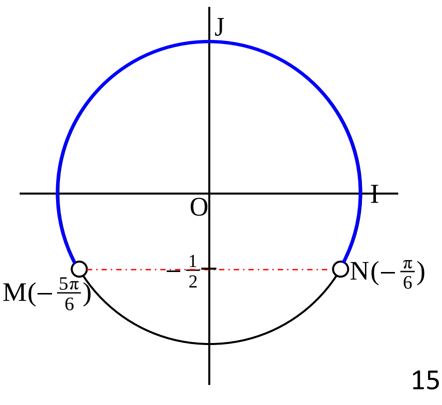
c) Résous dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation (I_3): $tan < 1$.

Solution

Résolution de l'inéquation (I_1) : $\sin x > -\frac{1}{2}$

Considérons les points M et M' du cercle trigonométrique ayant pour ordonnée $-\frac{1}{2}$.

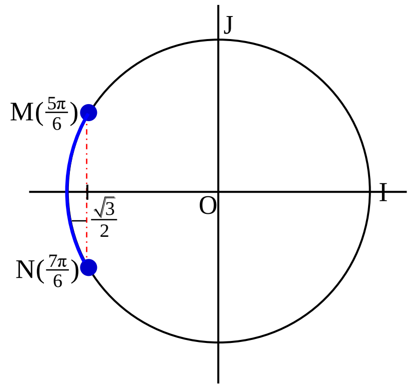
Les points du cercle trigonométrique ayant une ordonnée strictement supérieur à $-\frac{1}{2}$ sont les points du grand arc $\overset{\frown}{MN}$, M et N étant exclus.



Dans $]-\pi, \pi]$ M et N sont les images respectives de $\frac{-5\pi}{6}$ et $\frac{-\pi}{6}$.

Donc : $S_{]-\pi,\pi]} =]-\pi ; -\frac{5\pi}{6}[\cup \left]-\frac{\pi}{6} ; \pi\right]$.

Résolution de l'inéquation (I_2) : $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

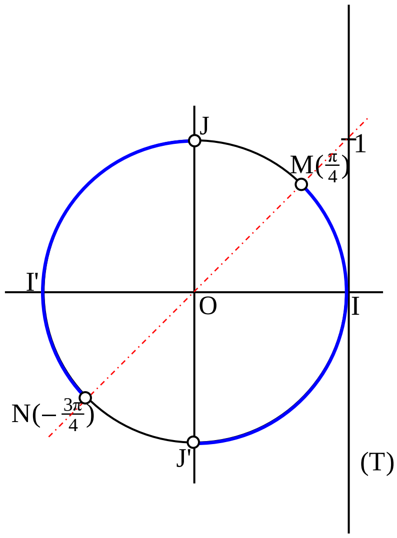


Soient les points M et N du cercle trigonométrique ayant pour abscisse $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les points du cercle trigonométrique ayant une abscisse inférieure ou égale à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont les points du petit arc $\widehat{MN}$, les points M et N étant inclus.

Dans $[0; 2\pi]$, M et M' sont les images respectives de $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6.}$

Donc : $S_{[0,2\pi]} = \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$

Résolution de l'inéquation (I_3) : $tan < 1$



Contraintes sur l'inconnue : $x \neq -\frac{\pi}{2}$ et $x \neq \frac{\pi}{2}$.

Dans]-π ;π], tan x = 1 ⇔ $x = -\frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{4}$.

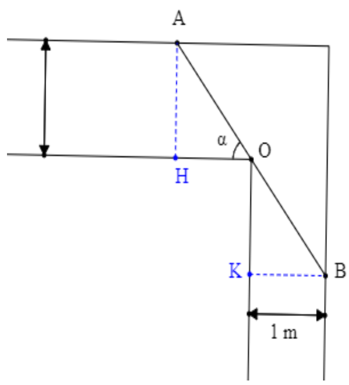
Désignons par N et M les images respectives sur (C) de $-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$.

Les points M du cercle trigonométrique tels que (OM) coupe (T) en un point d'abscisse strictement inférieure à 1 sont les points des petits arcs *JN et J'M ; J, N, J' et M* étant exclus.

Dans]-π ;π], l'ensemble des solutions de (I_3) est donc :

$\left]-\pi ; -\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$.

C- <u>SITUATION COMPLEXE</u>



Au cours d'une séance de travaux dirigés en Physique chimie, des élèves de 1ère D découvrent la figure ci-contre :

Cette figure représente un couloir de largeur $\sqrt{3}$ m qui tourne à l'angle droit et cette largeur n'est plus alors que de 1 m

Sur la figure, une droite passe par O fait avec l'un des murs un angle α et coupe les deux autres murs en A et

.

B $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\ \ et\ \ AB = 4\right)$. *L'unité de longueur est le mètre*

En observant la figure, Séri, le chef de classe, affirme que l'angle α admet deux valeurs $\frac{2\pi}{9}$ ou $\frac{\pi}{3}$.

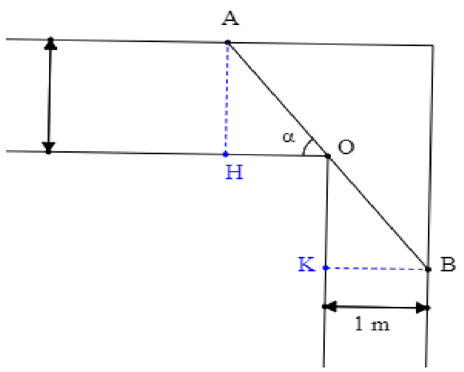
Par contre, son voisin affirme que α n'a qu'une seule valeur égale à $\frac{\pi}{3}$. Tu es sollicité pour les départager. Dis, en le justifiant par une production argumentée, qui de Séri ou de son voisin a raison.

SOLUTION

Pour départager Séry et son voisin, nous allons utiliser nos connaissances mathématiques sur la leçon angles orientés et trigonométrie.

Pour ce faire, Nous allons :

- En fonction des données connues, obtenir une
- équation contenant une ligne trigonométrique de α.
- Résoudre l'équation obtenue pour trouver (si possible) les valeurs de α.



Déterminer une ligne Soit H le projeté orthogonal de A sur le bord du mur opposé à A et K le projeté orthogonal de B sur le bord du mur opposé à B.

Le triangle AHO est rectangle en H.

On a : $sin\alpha = \frac{AH}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{OA}$;

donc $OA = \frac{\sqrt{3}}{sin\alpha}$

Le triangle BKO est rectangle en K.

On a : $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{OK}{OB} = \frac{1}{OB}$

Donc : $OB = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{1}{cos\alpha}$

On a : $AB = OA + OB = \frac{\sqrt{3}}{sin\alpha} + \frac{1}{cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}cos\alpha + sin\alpha}{sin\alpha\ cos\alpha}$

Comme $AB = f(\alpha) = 4$, on déduit l'équation (E) : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\sqrt{3}cos\alpha+sin\alpha}{sin\alpha\ cos\alpha} = 4$

Résolvons l'équation (E) : $\alpha \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{\sqrt{3}cos\alpha+sin\alpha}{sin\alpha\ cos\alpha} = 4$.

- Comme $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, on a $\cos\alpha \neq 0$ et $\sin\alpha \neq 0$ par suite $\cos\alpha.\sin\alpha \neq 0$. Donc le domaine de validité de (E) est : $\left]0 \,;\, \frac{\pi}{2}\right[$.
- $\frac{\sqrt{3}cos\alpha+sin\alpha}{sin\alpha\ cos\alpha} = 4 \iff \sqrt{3}cos\alpha + sin\alpha = 4sin\alpha cos\alpha$

Or : $\sqrt{3}cos\alpha + sin\alpha = 2\left(cos\frac{\pi}{6}cos\alpha + sin\frac{\pi}{6}sin\alpha\right) = 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ et $4sin\alpha cos\alpha = 2sin2\alpha$

Donc : $\frac{\sqrt{3}cos\alpha+sin\alpha}{sin\alpha\ cos\alpha} = 4 \iff 2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right) = 2sin2\alpha \iff \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right) = sin2\alpha$

$sin2\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)$ donc $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right) = sin2\alpha \iff \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)$

$$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right) \iff \begin{cases} \alpha-\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ \alpha - \frac{\pi}{6} = 2\alpha - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right) \iff \begin{cases} \alpha = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ \alpha = \frac{\pi}{3} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Comme α appartient à $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a deux valeurs de α qui correspondent : $\alpha = \frac{2\pi}{9}$ ou $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

C'est donc Seri qui a raison.

D- EXERCICES

A) Exercices de fixation

Exercice 1

Détermine la mesure principale α de l'angle orienté de mesure $\frac{149\pi}{3}$ et place sur le cercle trigonométrique le point M $\left(\frac{149\pi}{3}\right)$.

SOLUTION

α vérifie les deux conditions suivantes :

(1) $-\pi < \alpha \leq \pi$; (2) il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = \frac{149\pi}{3} + k2\pi$.

De (1) et (2) on déduit que :

$-\pi < \frac{149\pi}{3} + k2\pi \leq \pi$, en divisant par 2π on obtient : $-\frac{1}{2} < \frac{149}{6} + k \leq \frac{1}{2}$;

par la suite : $-\frac{152}{6} < k \leq -\frac{146}{6}$; d'où : $k = -25$.

donc $\alpha = \frac{149\pi}{3} - 25 \times 2\pi$; ce qui donne : $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.

Exercice 2

Soit $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ un angle orienté de mesure principale $\frac{\pi}{12}$.

Parmi les nombres ci-dessous indique ceux qui sont des mesures de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$:

$\frac{\pi}{12}+3\pi$; $\frac{\pi}{12}-6\pi$; ; $\frac{\pi}{12}+2020\pi$; $\frac{\pi}{12}-2021\pi$

SOLUTION

Les mesures l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ sont : $\frac{\pi}{12}-6\pi$ et $\frac{\pi}{12}+2020\pi$

Exercice 3

Relie chaque élément du tableau A à l'élément du tableau B qui lui est égal.

Tableau A
$\sin(a-b)$
$\cos(a+b)$
$\sin(a+b)$
$\cos(a-b)$

Tableau B
$cosb\ cosa - sina\ sinb$
$sina\ sinb + cosa\ cosb$
$sina\ cosb - cosa\ sinb$
$sinb\ cosa + cosb\ sina$

SOLUTION

Tableau A
$\sin(a-b)$
$\cos(a+b)$
$\sin(a+b)$
$\cos(a-b)$

Tableau B
$cosb\ cosa - sina\ sinb$
$sina\ sinb + cosa\ cosb$
$sina\ cosb - cosa\ sinb$
$sinb\ cosa + cosb\ sina$

Exercice 3

Calcule la tangente de l'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6}$ sachant que : $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

SOLUTION

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, détermine le sinus et le cosinus de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ de mesure α

a) $\alpha=\pi$ b) $\alpha=0$ c) $\alpha=-\frac{\pi}{2}$

SOLUTION

a) $cos\pi=-1$; $sin\pi=0$
b) $cos0=1$; $sin0=0$
c) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$; $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$

Exercice 6

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Indique les égalités justes :

a) $2(\widehat{\vec{u},-\vec{v}}) = 2(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

b) $2(\widehat{\vec{u},-\vec{u}}) = \hat{\pi}$

c) $2(\widehat{\vec{u},-\vec{u}}) = \hat{0}$

SOLUTION

Les égalités justes sont : a) et c)

car $(\widehat{\vec{u},-\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \hat{\pi}$ et $(\widehat{\vec{u},-\vec{u}}) = \hat{\pi}$

Exercice 7

$\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ sont deux angles orientés. Recopie et complète le tableau suivant :

Une mesure de $\hat{\alpha}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{-2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{25\pi}{3}$
Une mesure de $\hat{\beta}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\pi$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$
Une mesure de $\hat{\propto} + \hat{\beta}$				
Une mesure de $\hat{\propto} - \hat{\beta}$				

SOLUTION

Une mesure de $\hat{\alpha}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{-2\pi}{3}$	$-\frac{25\pi}{3}$
Une mesure de $\hat{\beta}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\pi$	$\frac{7\pi}{6}$
Une mesure de $\hat{\propto} + \hat{\beta}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{-5\pi}{3}$	$\frac{-43\pi}{6}$
Une mesure de $\hat{\propto} - \hat{\beta}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{-57\pi}{6}$

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, détermine la mesure principale α de l'angle orienté dont une mesure est :

a) $\frac{2021\pi}{6}$.

b) $-\frac{37\pi}{3}$

SOLUTION

a) α vérifie les deux conditions suivantes :

(1) $-\pi < \alpha \leq \pi$; (2) il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha = \frac{2021\pi}{6} + k2\pi$.

De (1) et (2) on déduit que :

$-\pi < \frac{2021\pi}{6} + k2\pi \leq \pi$, en divisant par 2π on obtient : $-\frac{1}{2} < \frac{2021}{12} + k \leq \frac{1}{2}$;

par la suite : $-\frac{2027}{12} < k \leq -\frac{2015}{12}$; d'où : $k = -168$.

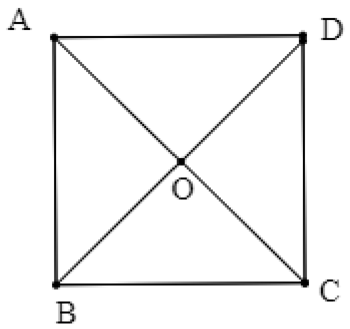
donc α = $\frac{2021\pi}{6} - 168 \times 2\pi$; ce qui donne : $\alpha = \frac{5\pi}{12}$.

b) $-\frac{37\pi}{3} = \frac{-36\pi-\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} - 6 \times 2\pi$; donc $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

Exercice 9

ABCD est un carré de centre O et de sens direct. Relie chaque élément du tableau A à un élément du tableau B qui lui est égal.

Tableau A	Tableau B
$2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}\right)$ •	• $\hat{\pi}$
$2\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}\right)$ •	• $\hat{0}$
$2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}}\right)$ •	• $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)$
$2\left(\widehat{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CD}}\right)$ •	• $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)$



SOLUTION

Tableau A	Tableau B
$2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}\right)$ •	• $\hat{\pi}$
$2\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}\right)$ •	• $\hat{0}$
$2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}}\right)$ •	• $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)$
$2\left(\widehat{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CD}}\right)$ •	• $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)$

Exercice 10

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$, trois vecteurs non nuls.
Sachant que $-\frac{\pi}{7}$ *et* $\frac{\pi}{4}$ *sont des mesures* respectives des angles orientés $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{u},\vec{w}})$, complète les phrases suivantes :

1) Une mesure de $(\widehat{2\vec{u},\vec{v}})$ est ....
2) Une mesure de $\left(\widehat{\vec{u},-3\vec{v}}\right)$ est ....
3) Une mesure de $(\widehat{\vec{w},\vec{u}})$ *est* ....

Une mesure de $(\widehat{\vec{v},\vec{w}})$ *est* .... car $(\widehat{\vec{v},\vec{w}})$ =.................+ ....

SOLUTION

1) Une mesure de $(\widehat{2\vec{u},\vec{v}})$ est $-\frac{\pi}{7}$

2) Une mesure de $\left(\widehat{\vec{u}, -3\vec{v}}\right)$ est $-\frac{\pi}{7} + \pi = \frac{6\pi}{7}$

3) Une mesure de $(\widehat{\vec{w}, \vec{u}})$ $est -\frac{\pi}{4}$

4) Une mesure de $(\widehat{\vec{v}, \vec{w}})$ est $\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{4}$ car $(\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) = (\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) + (\widehat{\vec{u}, \vec{w}})$

B) Exercices de renforcement

Exercice 11

1. Démontre que pour tous nombres réels a et b on a : $2sina\ cosb = \sin(a+b) + \sin\,(a-b)$

2. Soit A le nombre réel défini par : $A = 2sin\frac{\pi}{11}(cos\frac{\pi}{11} + cos\frac{3\pi}{11} + cos\frac{5\pi}{11} + cos\frac{7\pi}{11} + cos\frac{9\pi}{11})$

a) Démontre que : $A = sin\frac{10\pi}{11}$

b) Déduis-en que : $A = sin\frac{\pi}{11}$

c) Démontre que : $cos\frac{\pi}{11} + cos\frac{3\pi}{11} + cos\frac{5\pi}{11} + cos\frac{7\pi}{11} + cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$

SOLUTION

1. on a : $\sin(a+b) = sina\ cosb + cosa\ sinb$ et $\sin(a-b) = sina\ cosb - cosa\ sinb$

Donc : $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2sina\ cosb$

2. a) On a : $A = \left(2sin\frac{\pi}{11}cos\frac{\pi}{11}\right) + \left(2sin\frac{\pi}{11}cos\frac{3\pi}{11}\right) + \left(2sin\frac{\pi}{11}cos\frac{5\pi}{11}\right) + \left(2sin\frac{\pi}{11}cos\frac{7\pi}{11}\right) + \left(2sin\frac{\pi}{11}cos\frac{9\pi}{11}\right)$

$$A = \left(sin\frac{2\pi}{11} + sin0\right) + \left(sin\frac{4\pi}{11} + sin\frac{-2\pi}{11}\right) + \left(sin\frac{6\pi}{11} + sin\frac{-4\pi}{11}\right) + \left(sin\frac{8\pi}{11} + sin\frac{-6\pi}{11}\right) + \left(sin\frac{10\pi}{11} + sin\frac{-8\pi}{11}\right)$$

$$A = sin\frac{2\pi}{11} + \left(sin\frac{4\pi}{11} - sin\frac{2\pi}{11}\right) + \left(sin\frac{6\pi}{11} - sin\frac{4\pi}{11}\right) + \left(sin\frac{8\pi}{11} - sin\frac{6\pi}{11}\right) + \left(sin\frac{10\pi}{11} - sin\frac{8\pi}{11}\right)$$

D'où: $A = sin\frac{10\pi}{11}$

b) On a: $\frac{10\pi}{11} = \pi - \frac{\pi}{11}$; donc $A = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{11}\right) = sin\frac{\pi}{11}$

c) On a : $A = 2sin\frac{\pi}{11}(cos\frac{\pi}{11} + cos\frac{3\pi}{11} + cos\frac{5\pi}{11} + cos\frac{7\pi}{11} + cos\frac{9\pi}{11})$ et $A = sin\frac{\pi}{11}$

On en déduit que : $cos\frac{\pi}{11} + cos\frac{3\pi}{11} + cos\frac{5\pi}{11} + cos\frac{7\pi}{11} + cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$ car $sin\frac{\pi}{11} \neq 0$

Exercice 12

1) Démontre pour tout nombre réel x, $cos2x - \sqrt{3}sin2x = 2\cos\,(2x + \frac{\pi}{3})$.

2) a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $cos2x - \sqrt{3}sin2x = -1$.

b) Représente les solutions sur le cercle trigonométrique.

c) Donne les solutions de (E) appartenant à $\left]-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

SOLUTION

1) Pour tout nombre réel x , on a : $cos2x - \sqrt{3}sin2x = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}(\frac{1}{2}cos2x - \frac{\sqrt{3}}{2}sinx)$

$$= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)cos2x + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)sin2x\right)$$

$$= 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

2) a) $(E) \Leftrightarrow 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

On a : $cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

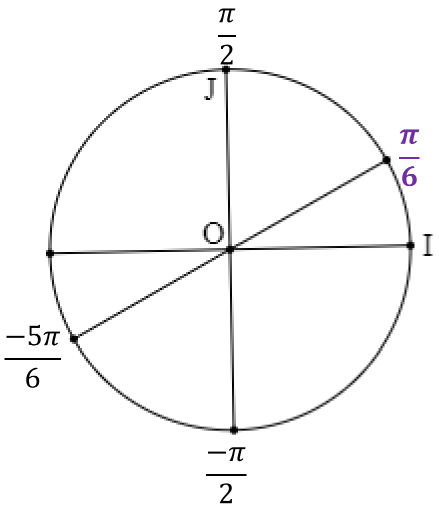
Donc : $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \quad ou \\ 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \quad ou \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les solutions de (E) sont les nombres réels x de la forme :

$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b)



c)

- Cherchons les nombres entiers k tels que : $-\frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{6} + k\pi \leq 2\pi$

  $-\frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{6} + k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{10}{6} < k \leq \frac{11}{6}$. Trois valeurs de k conviennent : -1; 0 et 1 .

  Il leur correspond les solutions : $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$

- Cherchons les nombres entiers k tels que : $-\frac{3\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} + k\pi \leq 2\pi$

  $-\frac{3\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} + k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -1 < k \leq \frac{5}{2}$. Trois valeurs de k conviennent : 0; 1 et 2 .

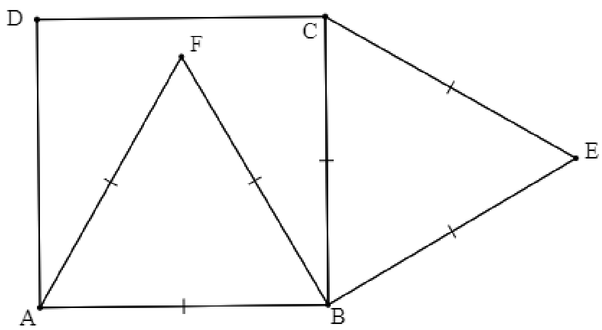
  Il leur correspond les solutions : $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$

  Les solutions de l'équation (E) appartenant à $\left]-\frac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$ sont : $-\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$; ; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{7\pi}{6}$

C) EXERCICE D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 5

ABCD est un carré de sens direct. ABF et CBE sont des triangles équilatéraux directs



1. Justifie que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DF}}) = \frac{5\pi}{12}$

2. Démontre que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DC}}) = \frac{\pi}{12}$

3. a) Donne une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}})$.

   b) Déduis-en que : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}}\right) = -\frac{\pi}{12}$

4. Démontre que les points D, E et F sont alignés.

SOLUTION

1) Le triangle AFD est isocèle en A et de sens direct. On a : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

Comme $\left(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DF}}\right) + (\widehat{\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FA}}) = \hat{\pi}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DF}}\right) = (\widehat{\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FA}})$

on déduit que : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DF}}\right) = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{12}$

2) On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DC}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DA}}\right) + (\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}})$ (relation de Chasles)

Donc : $mes\left(\widehat{\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DC}}\right) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DA}}\right) + mes(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}})$

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DC}}\right) = -\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12}$. D'où $Mes(\widehat{\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DC}}) = \frac{\pi}{12}$

3) a) $\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}\right) + (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CE}})$ donc $mes\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}}\right) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}\right) + mes(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CE}})$.

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$.

b) Le triangle CDE est isocèle en C et de sens direct.

On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}}\right) + (\widehat{EC,\overrightarrow{ED}}) = \hat{\pi}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC}}\right) = (\widehat{EC,\overrightarrow{ED}})$.

Donc : $\left(\widehat{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC}}\right) = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12}$. On en déduit que : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}}\right) = -\frac{\pi}{12}$

c) On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DE}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DC}}\right) + \left(\widehat{DC,\overrightarrow{DE}}\right) = \hat{0}$ car $\left(\widehat{\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DC}}\right) = -\left(\widehat{DC,\overrightarrow{DE}}\right)$

Par suite, les points D; E et F sont alignés.